

臺南市美術館二館的 謝爾賓斯基三角形屋頂

王儷娟

臺南市立仁德文賢國民中學

碎形屋頂的設計

臺南市美術館二館(圖 1)於 2019 年 1 月 27 日開館,官網中介紹二館建築為日本建築師坂茂所設計,主體建築是將臺南市的市樹鳳凰木的花之花型轉化的五角造型,但是用來遮蔭的屋頂卻是以謝爾賓斯基三角形(Sierpinski triangle) [1] 之碎形結構(圖 2)為設計的基底,其特殊的造型吸引著每一位美術館參觀者的目光。特別是對碎形結構有興趣的參觀者可能會希望能多認識它一些,就在台南市文化局長葉澤山”台南市美館的興建紀錄”的影片中 [2]得知碎形屋頂是由日本京都大學所開發的,日本京都大學人間・環境學研究所 (Graduate School of Human and Environmental Studies) 酒井敏 (Satoshi Sakai)博士的研究團隊所設計 [3]。此外,筆者也發現,摺紙大師三谷純 (Jun Mitani) 亦提出以一張紙創造這美麗立體幾何的具體作法 [4]。接下來,讓筆者帶領各位讀者一窺這美麗的幾何結構。

認識正四面體

首先,從一維的直線開始,通過相異



圖 1、臺南市美術館二館

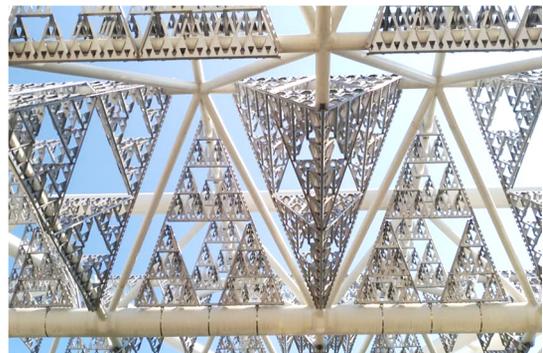


圖 2、碎形結構

的 A、B 二點只有一條直線 L (圖 3)。進一步,通過不共線的 A、B、C 三點只有一個平面 E (圖 4),然而,相異的四個點是否就能夠得到立體的形體呢? 答案應該是很容易想到的,當第四個點 D 不在平面 E 上時, A、B、C、D 四點恰可以決定一個三角錐即四面體 (圖 5)。

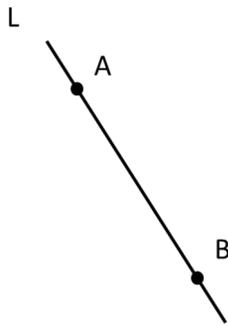


圖 3



圖 4

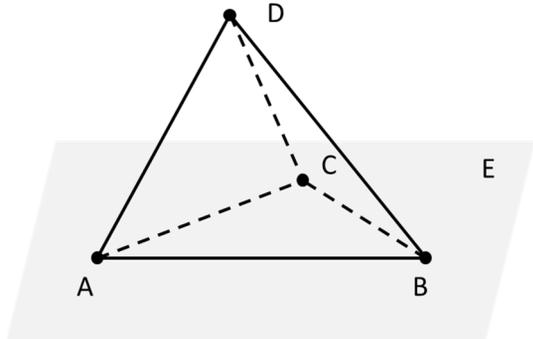


圖 5

為了方便觀察四面體的頂點、邊及面的數量關係，可藉由各邊等長的正四面體來進一步討論。在圖 6 中，正四面體有六個邊恰為正立方體每個面的對角線，而且 \overline{AH} 和 \overline{FC} ， \overline{AF} 和 \overline{HC} 以及 \overline{AC} 和 \overline{HF} 為三組歪斜線。以紅色的 \overline{AH} 和 \overline{FC} 為例，可以將四面體的四個面分為二組， $\triangle AHF$ 和 \triangle

AHC 一組， $\triangle FCA$ 和 $\triangle FCH$ 一組，它們的展開圖為菱形(如圖 7)。讀者可以列印圖 7，再試著摺疊並組合成一個四面體(如圖 8)，這個組合後的四面體將有助了解接下來的討論！

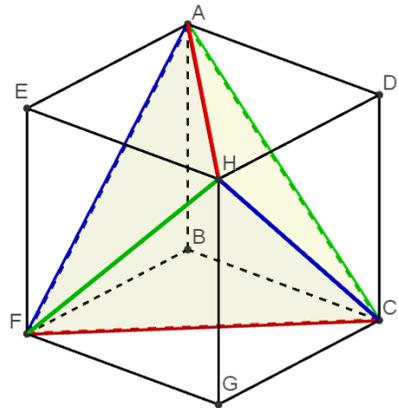


圖 6

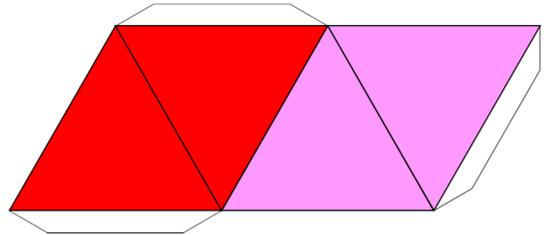


圖 7

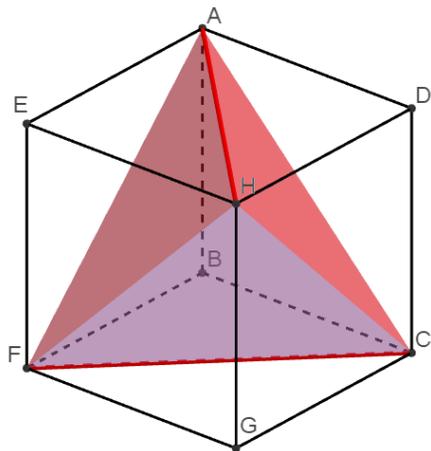


圖 8

從正四面體的面上做切割而成的碎形結構

接下來，解釋如何產生碎形結構的基本元素。首先，先連接圖七中的三角形之各邊中點連線，形成一個內三角形，再將內三角形的頂點予以適當截角，就是平面的碎形結構，如圖 9 所示。在圖 9 中，實線是切割線，虛線是摺線，依據山摺與谷摺的摺疊後，將得到四個三角錐，就得到立體的碎形結構，其結果如圖 10 所示。在圖 9 中，如果只取左半邊紅色的部分再摺一次，隱約可看出立體的碎形結構(如圖 11)，其原因是，三角形的面數量減半，卻仍涵蓋了所有的四面體的頂點。

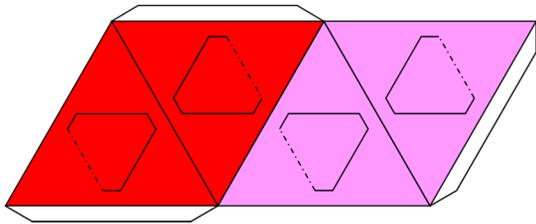


圖 9

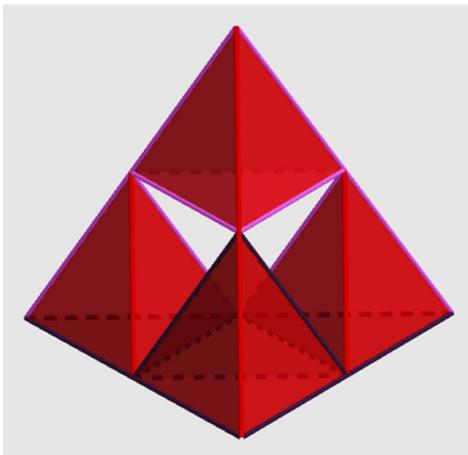


圖 10

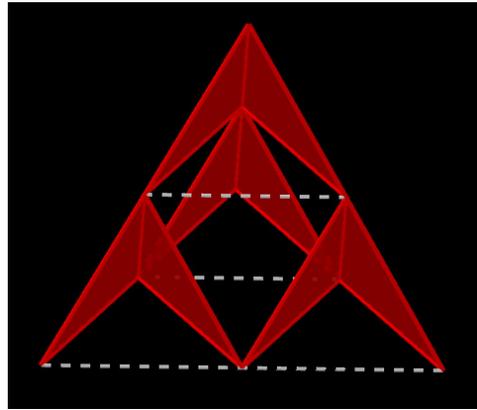


圖 11

從三視圖了解碎形屋頂的遮蔭

臺南市美術館二館屋頂係為四面完整的四面體所形成的碎形結構，這個結構會不會影響它的遮蔭效果呢？利用三視圖加以觀察，可以看出設計師的精心設計。四面完整的正四面體(圖 12)及其碎形(圖 13)的正視圖、上視圖及側視圖形皆是正方形，如果陽光直射這三個方向可以得到完整的遮蔽，但如果是僅有二面結構的四面體(圖 14)及其碎形(圖 15)的正視圖與側視圖面積皆僅剩正方形的四分之三，顯然遮蔭效果良好。臺南市美術館二館屋頂的謝爾賓斯基三角形結構是將圖 15 的下半部上下翻轉 180 度，翻轉後的結構如圖 16 所示。從圖 16 的碎形結構可以發現其遮蔭效果與圖 15 一樣佳。然而，更進一步的是其四面體結構較為穩定，堪稱四面體最神奇巧妙的設計巧思！[5]

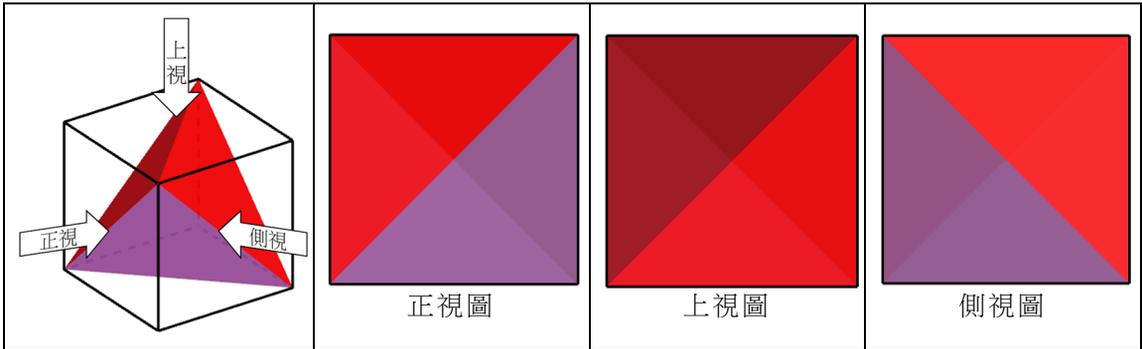


圖 12、四面體-四面完整結構

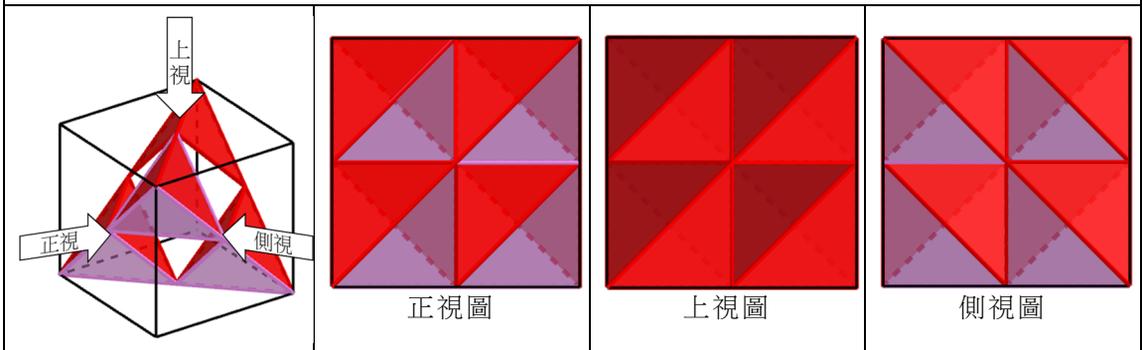


圖 13、四面碎形體-四面完整結構

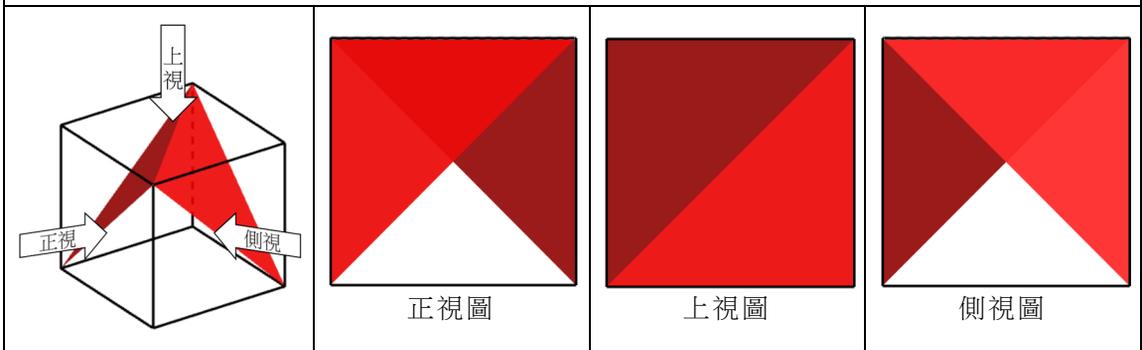


圖 14、四面體-二面結構

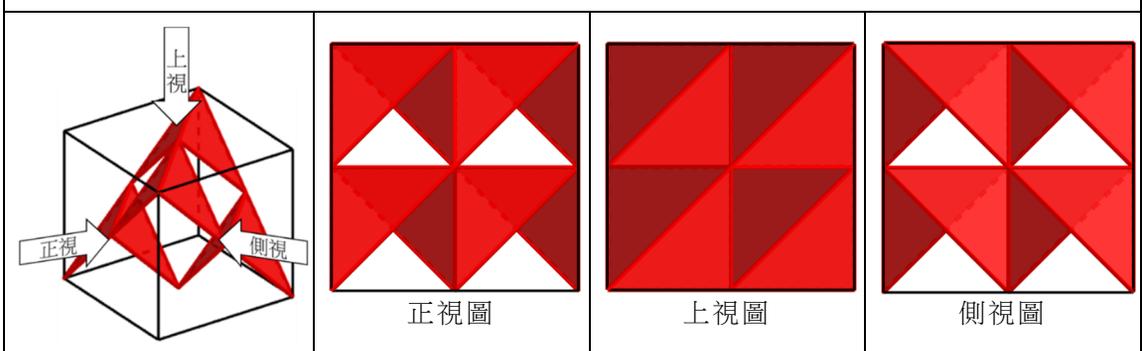
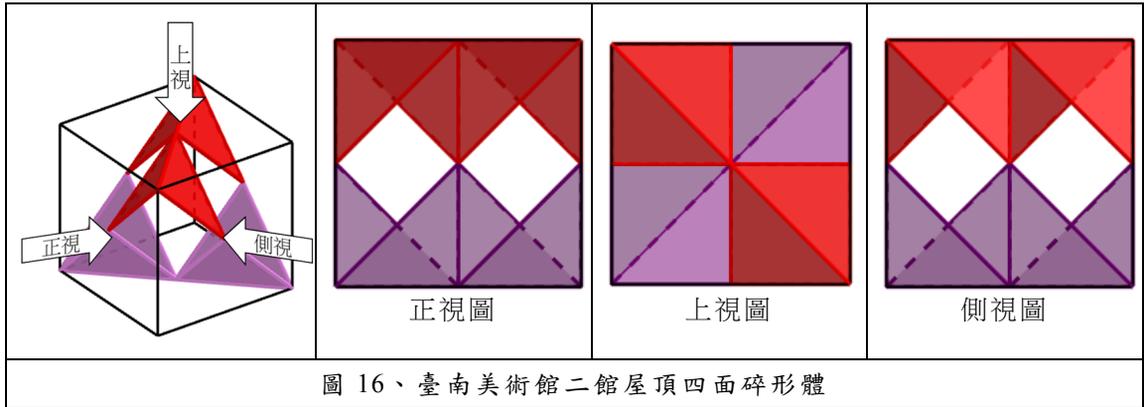


圖 15、四面碎形體—二面結構



豔陽高照的夏天，謝爾賓斯基三角形結構的屋頂不僅提供臺南市美術館二館屋頂良好遮蔽效果，在陽光斜照的時候，陽光從碎形的間隙穿過，灑落一地的美麗圖案(圖 17)。微風徐拂，猶如在樹蔭下漫遊美術館！最後，特別說明臺南市美術館二館屋頂實際上為五角造型其真正的碎形結構

所使用的四面體並非正四面體，讀者可於參觀時仔細觀察，附件為筆者重繪圖 18 是日本摺紙藝術家三谷純利用一張謝爾賓斯基三角形碎形結構模板製作後的完成品，圖 19 是臺南市美術館二館屋頂碎形結構的最小單元，有興趣的讀者可以自行試試看！。



圖 17、謝爾賓斯基三角形的遮陽效果良好

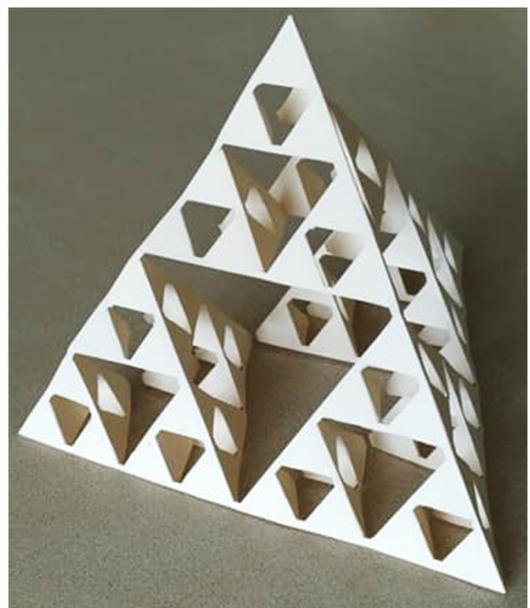


圖 18、謝爾賓斯基三角形完成品

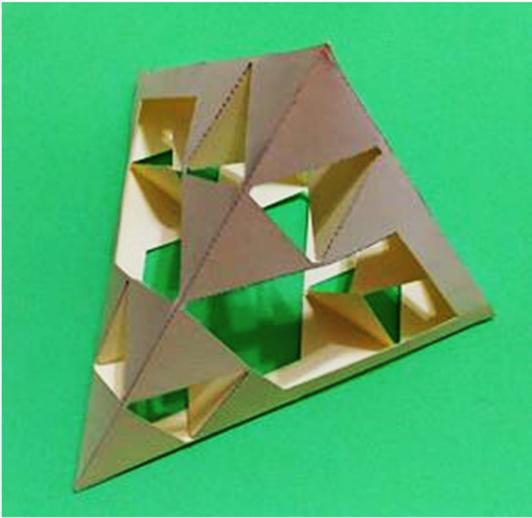


圖 19、臺南市美術館二館屋頂碎形結構的最小單元

本文的完成特別感謝彭良禎老師(師大附中)、「藝數摺學」寫作群組的李政憲老師(林口國中)、連崇馨老師(鳳山高中)和

吳惠美老師(台中二中)的建議與校稿。

參考資料

謝爾賓斯基三角形

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%BE%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2> 1.

臺南美術館興建紀錄

<https://www.youtube.com/watch?v=6iamEp6g2s4&fbclid=IwAR3wBr3epDdxNAJLUd0FUB4YwPCPxHE8rWjwoCSn-PiSWyQ7Bi2S6d1Qa58>

京都大學大學人間與環境研究科網站

<http://www.gaia.h.kyoto-u.ac.jp/~fractal/index.html>

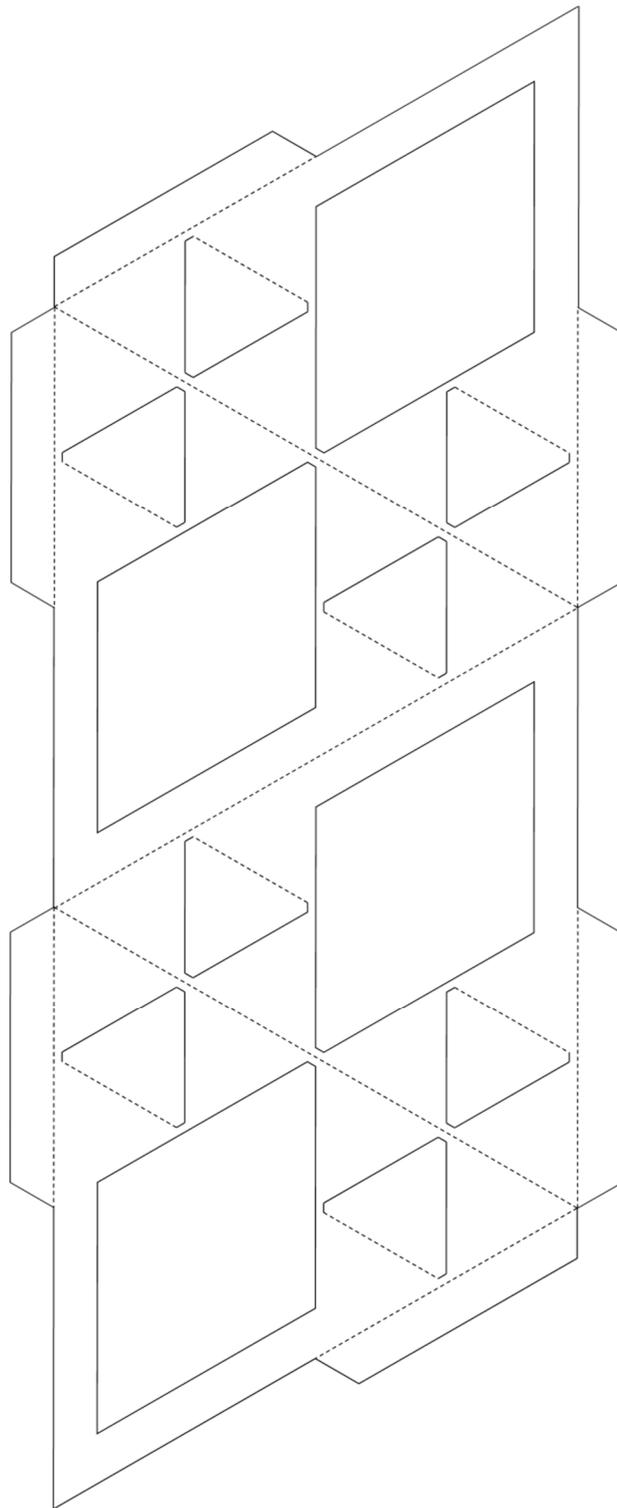
三谷純のブログ

http://junmitani.hatenablog.com/entry/20111221?fbclid=IwAR3QKNR8JU7sUw-hhq5mXxX7IDCz_zcTD9BdoyauAgHANJzCEOkvMtQPbRg

筆者 GeoGebra 繪圖

<https://www.geogebra.org/m/hcw5cdtu>

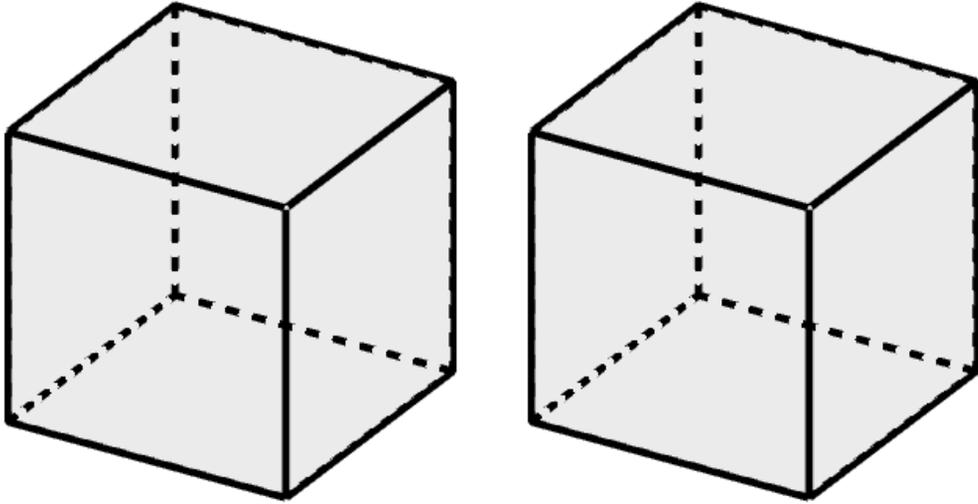
附件 1、臺南市美術館二館屋頂碎形結構的最小單元模板



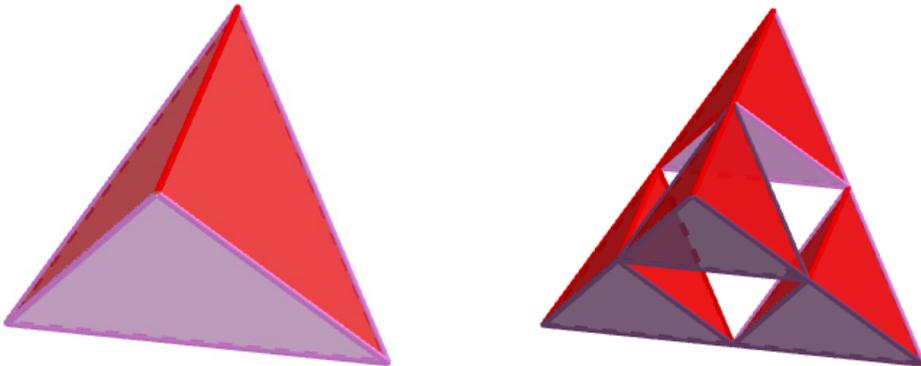
附件 2

淺談臺南市美術館二館的謝爾賓斯基三角形屋頂學習單

1. 請利用下正方立方體的頂點畫出正四面體



2. 承第 1 題如果正立方體的邊長為 a ，則正四面體的邊長為何？
3. 下方左圖為正四面體，右圖為連接左圖各邊中點而形成四個四面體的相連接的結構，請問左圖與右圖之表面積比為何？體積比為何？



4. 承第 3 題右圖相較於左圖，中央鏤空的空間可利用哪一種立體圖形將它填滿呢？

解答：1.略 2. $\sqrt{2}a$ 3.1:1;2:1 4.正八面體