中學生通訊解題第 123 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
12301

設 $h+k=2016$，已知方程式 $x^2+hx+k=0$ 的兩根為整數，試求此方程式的解。

簡答：$2,2018$ 或 $0,-2016$

【詳解】

設方程式的兩根為 α,β，則有 $\alpha+\beta=-h,\alpha\beta=k$，

則 $2016=h+k=-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=(\alpha-1)(\beta-1)-1$

$\Rightarrow(\alpha-1)(\beta-1)=2017$ (質數)

$(\alpha-1)$	1	2017	-1	-2017
$(\beta-1)$	2017	1	-2017	-1

求得方程式兩整數解為 $2,2018$ 或 $0,-2016$

【解題評析】

本題屬於簡易的數論問題，用到 2017 為質數的特性，有些同學沒有分解出 $2017=(-1)(-2017)$ 這組，導致答案少一組解。

問題編號
12302

證明：在任意 105 個實數中可找到 a,b 使得

$208\cdot|a-b|\cdot|4-ab|\le(4+a^2)(4+b^2)$。

【證明】

$208|a-b||4-ab|\le(4+a^2)(4+b^2)$

$\Leftrightarrow 208|4a-4b+ab^2-a^2b|\le(4+a^2)(4+b^2)$

$\Leftrightarrow 208|a(4+b^2)-b(4+a^2)|\le(4+a^2)(4+b^2)$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{a}{4+a^2}-\dfrac{b}{4+b^2}\right|\le\dfrac{1}{208}$

設函數 $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$，$x\in R$

因為 $2|x|=\sqrt{4x^2}\le\dfrac{4+x^2}{2}\Rightarrow\dfrac{|x|}{4+x^2}\le\dfrac{1}{4}$，

所以 $f(x)$ 的值域為 $[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}]$

因此將 $[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}]$ 分割為 104 個長度為 $\dfrac{1}{208}$ 的區間

故由抽屜原理得知在任意 105 個實數中可找到 a,b 使得 $f(a),f(b)$ 在同一個區間內，

即$|f(a)-f(b)|\leq\dfrac{1}{208}$，得證

【解題評析】

本題僅有 1 人參與徵答，得到 6 分，該生利用反證法來找出矛盾進而得證，解題過程闡明詳盡，敘事條理分明，值得讚許，若能多加注意到新產生變數的範圍與根式中有變數的化簡，整個解題過程會更加完美；此題需從不等式的關係轉化為某函數上相異兩點的距離關係，接著利用該函數的值域與鴿籠原理即可得證，解題的過程運用到許多觀念，難度頗高。

問題編號
12303

$\triangle ABC$ 中，$\angle B=30^\circ$，且

$\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AB}\times\overline{AC}$，求 $\angle C$ 。

簡答：50°

【詳解 1】

在 $\overrightarrow{BA}$ 上取一點 D，使得 $\overline{AD}=\overline{AC}$，

$$\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AB}\times\overline{AC}$$

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB}\times\overline{AC}$$

$$=\overline{AB}\times(\overline{AB}+\overline{AC})$$

$$=\overline{AB}\times(\overline{AB}+\overline{AD})=\overline{AB}\times\overline{BD}$$

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$，又 $\angle B=\angle B$，

故 $\triangle ABC\sim\triangle CBD(\mathrm{SAS})$

則 $\angle ACB=\angle D$

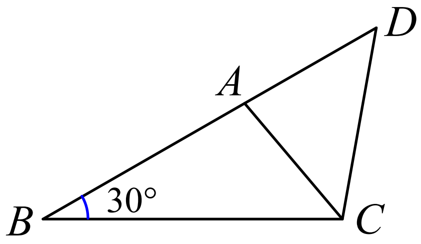
又 $\overline{AD}=\overline{AC}$，則 $\angle D=\angle ACD$，則

$\angle BAC=\angle D+\angle ACD=2\angle D=2\angle ACB$

在 $\triangle ABC$ 中，

$30^\circ+\angle ACB+2\angle ACB=180^\circ$

$\therefore\ \angle ACB=50^\circ$



【詳解 2】

$a^2-c^2=bc$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}=\frac{b^2-bc}{2bc}=\frac{b-c}{2c}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{2\sin C}$$

$\sin B-\sin C=2\cos A\sin C$

$=\sin(A+C)-\sin(A-C)$

$\sin C=\sin(A-C)$

(1) $C=A-C\Rightarrow A=2C\therefore C=50^\circ$

(2) $180^\circ-C=A-C\Rightarrow A=180^\circ\rightarrow\leftarrow$

【解題評析】

此題屬於幾何問題。每位投稿同學都有想到在射線 BA 上取一點 D，使得 $\overline{AD}=\overline{AC}$，再來只要利用 SAS 的相似定理，或者圓冪定理，找出一個比 $\triangle ABC$ 更大的相似形 $\triangle CBD$，接下來就可解出此題；除了廖同學，他反而是在線段 $\overline{AB}$ 上取一點 D，使得 $\angle ADB=\angle BAC$，找到一個比 $\triangle ABC$ 更小的相似形 $\triangle DBA$，接下來也可解出此題。此次投稿同學全部都有算出正確解答，都可獲得 7 分的滿分。但是老師還是要提醒一下，有些同學在證明過程中的彼此因果關係不夠嚴謹，且符號標示不夠清楚，這是稍微美中不足之處；但因為此題並非證明題，上述小瑕疵還可被原諒，將來書寫其它幾何證明題時，必須多加注意才可。

問題編號 12304

在以下的小方格中填上「＋」、「－」號，如果可使其和為 n，就稱數 n 是「可表示出的數」，否則稱 n 是「不可表示出的數」

（例如 1 是可表示出的數，因為 $+1+2-3-4+5+6-7-8+9=1$ 是一種方法。）

□ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

(1) 證明：11 是可表示出的數，而 10 是不可表示出的數；

(2) 求出 21 可被表示出的所有方法數。

簡答：(1)見詳解。 (2) 12。

詳解：

(1) 因 $+1+2-3+4+5-6+7-8+9=11$，所以 11 是可表示出的數。

又 $+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 是奇數，而對任意兩個整數 a,b。它們的和 $a+b$ 與差 $a-b$ 有相同的奇偶性，因此，無論怎樣填「＋」、「—」號，所得代數和一定是奇數，所以偶數 10 是不可表示出的數。

(2) 設填「＋」號的數字和為 x，填「—」號的數字和為 y，則 $x-y=21$。

又 $x+y=45$，解得 $x=33, y=12$。

又 $1+2+3+4=10$，故填「—」號的數至少 2 個，至多 4 個。

(a) 將 12 表示成 2 個不同正整數之和，12=3+9=4+8=5+7，有 3 種方法；

(b) 將 12 表示成 3 個不同正整數之和，12=1+2+9=1+3+8=1+4+7=1+5+6=2+3+7=2+4+6=3+4+5，有 7 種方法；

(c) 將 12 表示成 4 個不同正整數之和，12=1+2+3+6=1+2+4+5，有 2 種方法。

綜上所述，21 可被表示出的不同方法有 $3+7+2=12$ 種。

【解題評析】

本題主要討論奇數與偶數的問題。其中有 1 位同學使用 EXCEL 列出各種情形，但討論起來相當花時間；有些同學使用奇數與偶數加減分成四種情形討論；也有 6 位同學使用如詳解中更有系統性的方法討論。

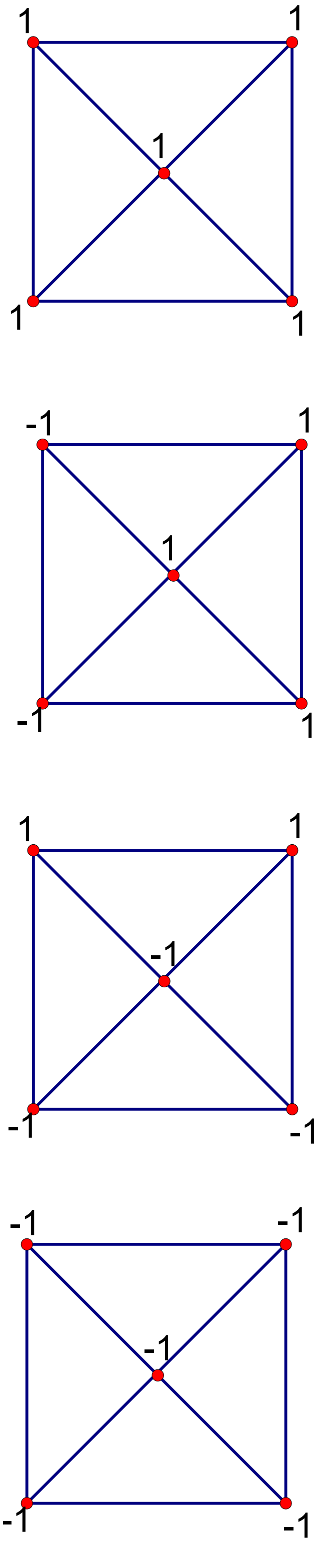
問題編號
12305

在一個正多邊形的所有頂點及所有對角線的交點都寫上 1，接下來的每一步都是把一條邊或對角線上的所有數都改變符號（即 1 變 -1，-1變 1)，試就下列各情形討論是否有機會經過若干步之後，所有的數都變成 -1？

(1) 正三角形　　(2) 正方形
(3) 正五邊形　　(4) 正六邊形

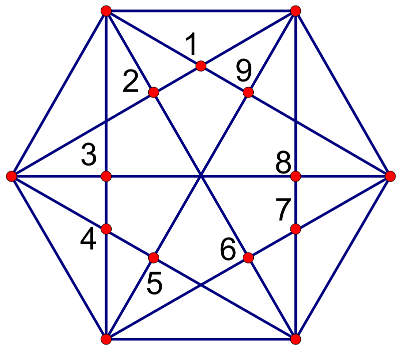
詳解：

(1) 不可以，三個數的乘積奇偶性不變
(2) 可以，如下圖所示



(3) 不可以，頂點上五個數的乘積奇偶性不變

(4) 不可以，圖示中有編號的九個數的乘積奇偶性不變



【解題評析】

這樣的題目主要的重點有兩個，第一個重點是奇偶性的討論及算兩遍，如果考慮所有點或線的兩種面向的算法，會產生矛盾，就可以知道其不可行，如果不會矛盾，則可以試著操作看看是不是可行，第二個重點是，在一直嘗試下，都不可行，就可以試著不要一次看全部的點或線，只找部分的點或線，至於是找那些點或線，就是透過嘗試，去感覺去歸納。有些同學沒完全了解題意，希望在重新了解之後，可以再重新嘗試。更進一步地，大家可以嘗試找出那些正多邊形是可以達成，那些不行；如果不是正多邊形，只是多邊形而對角線除頂點處沒有三線共點，這樣的多邊形有那些是可行的。