關於三道幾何題的另解

連威翔
自由作家

壹、前言

在中學時期學習數學的過程中，我們學到一些工具或技巧，除了可以幫助我們通過各項考試之外，在經過一段歲月之後，如果發現這些工具還能夠持續用來幫我們解決問題，便會覺得當初的學習是值得的。

在本文中，筆者將介紹三道幾何問題的另解，其中將使用中學數學的技巧來解題。透過本文的介紹，除了提供自己的解法供有興趣的讀者參考，也希望藉此分享中學數學可以帶給我們的解題樂趣。

貳、第一道幾何題

在教育部高中數學學科電子報第 101 期的文章[1]中，作者陳建燁老師介紹了一道有趣的幾何題，該問題如下：

問題 1：如圖，設ΔABC中，$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上的高。設P為$\overline{AD}$上一點，直線BP交AC於E，直線CP交AB於F。試證：$\angle PDE = \angle PDF$。

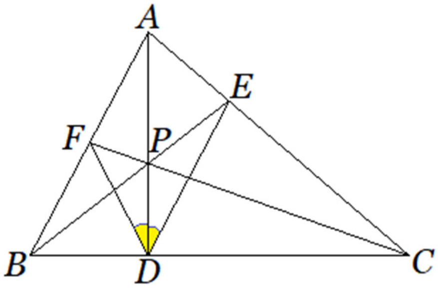

圖 1

在[1]中，作者使用 Ceva 與 Menelaus 定理證明了上述問題。

我們知道，Ceva 與 Menelaus 定理在正規的中學數學課程中並未介紹，因此底下筆者將透過兩種方法給出另證。第一種方法是使用國中課程中介紹的平面幾何方法來處理，第二種方法則將透過坐標，並使用高中數學課程中介紹的斜率、分點坐標與三角函數的概念給出另證。

開始證明之前，注意圖 1 中當P, D兩點重合時，問題 1 中想證明的等式$\angle PDE = \angle PDF$

之中的符號$\angle PDE, \angle PDF$將失去定義，因此在底下的討論中，當P, D兩點重合時我們特別改為證明$\angle ADE = \angle ADF$，其餘情況則不變。

筆者對問題 1 的第一個證明如下：

證明 1：圖 1 中，當P, D兩點重合時，E, C兩點重合且F, B兩點也重合，因此有

$$\angle ADE = \angle ADC = 90^\circ = \angle ADB = \angle ADF;$$

當P, A兩點重合時，因A, E, F, P四點重合，可知有

$$\angle PDE = 0^\circ = \angle PDF.$$

所以，接下來我們只需處理P不與A, D兩點重合的情況。

當P不與A, D兩點重合時，在圖 1 中作$\overline{EG}, \overline{FH}$，使$\overline{EG} \perp \overline{BC}$於$G$、$\overline{FH} \perp \overline{BC}$於$H$，如下圖所示：

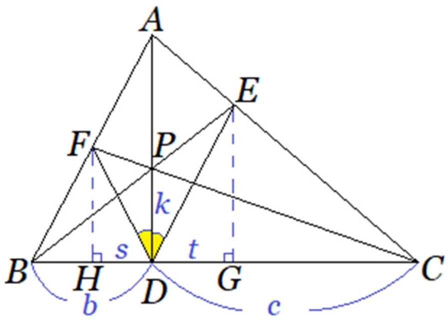

圖 2

在圖 2 中，假設

$$\overline{BD} = b, \overline{CD} = c, \overline{PD} = k, \overline{HD} = s, \overline{GD} = t.$$

因為$\overline{AD}$平行$\overline{EG}$，且$\overline{EG}$平行$\overline{PD}$，可證明有 $\Delta CAD \sim \Delta CEG$ 與 $\Delta BEG \sim \Delta BPD$ (均為 AA 相似)，因此可知

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CG}}, \qquad \frac{\overline{EG}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BD}}.$$

由上述兩式可知

$$\overline{AD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} \cdot \overline{EG} = \frac{c}{c-t} \cdot \frac{\overline{BG}}{\overline{BD}} \cdot \overline{PD} = \frac{c}{c-t} \cdot \frac{b+t}{b} k. \qquad \dots(1)$$

同理可證 $\Delta BAD \sim \Delta BFH$ 與 $\Delta CFH \sim \Delta CPD$，因此有

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}, \qquad \frac{\overline{FH}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}.$$

由上述兩式可知

$$\overline{AD}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}\cdot\overline{FH}=\frac{b}{b-s}\cdot\frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}\cdot\overline{PD}=\frac{b}{b-s}\cdot\frac{c+s}{c}k. \qquad \ldots(2)$$

此時由(1), (2)兩式可知

$$\frac{c(b+t)}{b(c-t)}k=\frac{b(c+s)}{c(b-s)}k.$$

將上式等號兩側的k消去，並改寫為

$$c^2(b+t)(b-s)=b^2(b+t)(b-s),$$

展開上式兩側相乘的括號後得

$$c^2[b^2-(s-t)b-st]=b^2[c^2+(s-t)c-st].$$

再經過整理後有

$$bc(s-t)(b+c)=st(b^2-c^2),$$

消去上式等號兩邊的正項$b+c$，再同時除以正數$bcst$，最後再移項可得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{t}=\frac{1}{c}+\frac{1}{s}. \qquad \ldots(3)$$

此時，先回頭觀察圖 2，再利用(1), (2)兩式上方由相似形而得的比例關係，可知

$$\overline{EG}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BD}}\cdot\overline{PD}=\frac{b+t}{b}k, \qquad \overline{FH}=\frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}\cdot\overline{PD}=\frac{c+s}{c}k,$$

因此有

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{GD}}=\frac{b+t}{bt}k=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{t}\right)k, \qquad \ldots(4)$$

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{HD}}=\frac{c+s}{cs}k=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{s}\right)k. \qquad \ldots(5)$$

利用(3), (4), (5)三式可知

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{FH}}{\overline{HD}},$$

接著配合$\angle EGD=\angle FHD=90°$的條件，可證得$\Delta EGD\sim\Delta FHD$(SAS 相似)，從而有$\angle EDG=\angle FDH$，因此得$\angle PDE=\angle PDF$，證畢。

接著，是筆者對問題 1 提出的第二種證明：

證明 2：在證明 1 的一開始，我們已對P與A, D重合的兩種情形給出證明，因此在本證明中將會省略對此兩情形的討論，只看P不與A, D兩點重合的情形。

在圖 1 中置入直角坐標，以D為原點，並分別以$\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}$兩向量所指的方向為$x$軸與$y$軸正向，則如下圖：

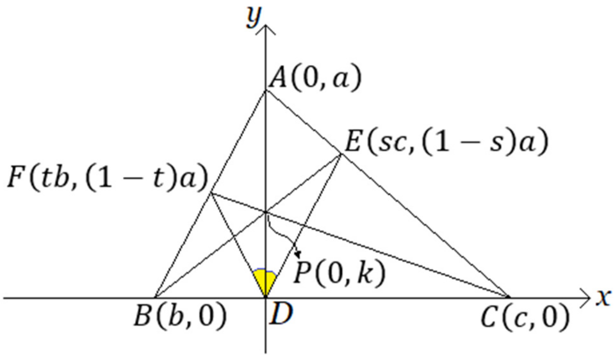

圖 3

在圖 3 中，我們假設A,B,C,P 的坐標分別為

$$A(0,a),B(b,0),C(c,0),P(0,k),$$

其中有$a>0$與$c>0>b$。因為我們只考慮P不與A,D兩點重合的情形，所以底下我們只對$0<k<a$的情況進行討論。

因為 E,F 分別在 $\overline{AC},\overline{AB}$ 上，設 $\overline{AE}=s\overline{AC},\overline{AF}=t\overline{AB}$，其中 $0<s,t<1$，則有

$$\overline{AE}:\overline{EC}=s:(1-s),\qquad \overline{AF}:\overline{FB}=t:(1-t).$$

使用分點公式，可將E,F的坐標寫成：

$$E(sc+(1-s)\cdot 0,s\cdot 0+(1-s)a)=(sc,(1-s)a),$$
$$F(tb+(1-t)\cdot 0,t\cdot 0+(1-t)a)=(tb,(1-t)a).$$

圖 3 中，因為$\overline{BE},\overline{BP}$的斜率相同，即$m_{\overline{BE}}=m_{\overline{BP}}$，可知有

$$\frac{(1-s)a}{sc-b}=\frac{k}{-b}.$$

利用上式，可寫下

$$s=\frac{b(a-k)}{ab-kc}.\qquad \dots(6)$$

又因為$\overline{CF},\overline{CP}$的斜率相同，即$m_{\overline{CF}}=m_{\overline{CP}}$，可知有

$$\frac{(1-t)a}{tb-c}=\frac{k}{-c}.$$

利用上式，可寫下

$$t=\frac{c(a-k)}{ac-kb}.\qquad \dots(7)$$

不難驗證，在(6), (7)兩式中分式的分母處出現的$ab-kc, ac-kb$兩項均不為零。

利用(6), (7)兩式，我們可寫下$\overline{DE}, \overline{DF}$的斜率，兩者分別為

$$m_{\overline{DE}}=\frac{(1-s)a}{sc}=\frac{\left(1-\dfrac{b(a-k)}{ab-kc}\right)a}{\dfrac{bc(a-k)}{ab-kc}}=\frac{ak(b-c)}{bc(a-k)},$$

$$m_{\overline{DF}}=\frac{(1-t)a}{tb}=\frac{\left(1-\dfrac{c(a-k)}{ac-kb}\right)a}{\dfrac{bc(a-k)}{ac-kb}}=\frac{ak(c-b)}{bc(a-k)}.$$

由上兩式可知$m_{\overline{DE}}=-m_{\overline{DF}}$。又因為有

$$m_{\overline{DE}}=\tan\angle CDE,\quad m_{\overline{DF}}=\tan(\pi-\angle BDF)=-\tan\angle BDF,$$

可得

$$\tan\angle CDE=m_{\overline{DE}}=-m_{\overline{DF}}=\tan\angle BDF. \qquad \ldots(8)$$

由於 tan 函數在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上嚴格遞增，因此具有一一對應的特性，而 $0<\angle CDE, \angle BDF<\frac{\pi}{2}$，故由(8)式可知 $\angle CDE=\angle BDF$，也因此得 $\angle PDE=\angle PDF$，證畢。

參、第二道幾何題

本節中，筆者將介紹國立中山大學應數系雙週一題活動中一道與幾何有關的計算題，該問題如下：

問題 2：設正六邊形$ABCDEF$ 的對角線$\overline{AC}$ 及$\overline{CE}$ 分別被點M與N分割，使得

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CE}}=r,$$

若B, M, N 三點共線，求r之值。

此問題的公告解答，請參考[2]。

在[2]的兩種解法中，均使用了高中課程中介紹的複數來處理，解法很特殊。其中的第一種解法，還用上了在第貳節證明 2 中曾使用的分點公式。在[2]中的兩種解法，應該比較適合高中以上程度的學生來閱讀。

對於問題 2，底下筆者也將介紹兩種方法來求解，第一種是使用國中平面幾何的解法，而第二種則將使用高中數學會學到的向量工具來解題。第一種解法如下：

解答 1：連接$\overline{BE}$ 設交$\overline{AC}$ 於Q，並作$\overline{NP}\perp\overline{AC}$ 於P，如下圖：

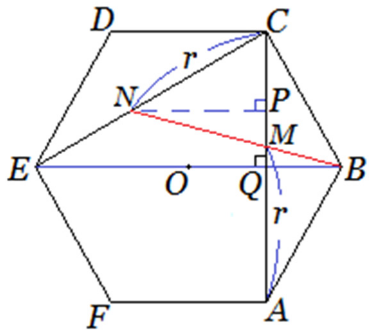

圖 4

假設$\overline{AC}=\overline{CE}=1$，則由題目所給的等式可知$\overline{AM}=\overline{CN}=r$，且$\overline{AQ}=\frac{1}{2}$。上圖中若$r<\frac{1}{2}$，則直線$BM$與$\overline{CE}$不相交，此結果違反題目假設，因此可知$r\geq\frac{1}{2}$。

注意，若M,Q兩點重合，可得$r=\overline{AQ}=\frac{1}{2}$，此時$E,N$兩點亦重合，得$r=\overline{CE}=1$，此為矛盾，故$M,Q$兩點不重合；若$M,C$兩點重合，同理亦可得出$r=1$且$r=0$的矛盾，故$M,C$兩點不重合。至此，可知$M$落在$\overline{CQ}$上且與$C,Q$兩點相異，因此知$\frac{1}{2}<r<1$。

圖 4 中，不難證明$\Delta BMQ\sim\Delta NMP$(AA 相似)，因此可知

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}. \quad \dots(9)$$

由於$\overline{AQ}=\frac{1}{2}$，且$\Delta ABQ,\Delta NCP$均為$30°-60°-90°$三角形，因此有

$$\overline{BQ}=\frac{1}{2\sqrt{3}},\qquad \overline{MQ}=\overline{AM}-\overline{AQ}=r-\frac{1}{2},$$
$$\overline{NP}=\frac{\sqrt{3}r}{2},\qquad \overline{MP}=\overline{CM}-\overline{CP}=1-\frac{3r}{2}.$$

將上述四個線段長代入(9)式，可得

$$2\sqrt{3}\left(r-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{3r}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}r}.$$

上式可化簡為$3r^2=1$，因$r>0$可解得$r=\frac{1}{\sqrt{3}}$，解題完畢。

以上就是第一種解法。在開始介紹將會使用向量工具的第二種解法之前，我們先介紹一個平面向量的性質如下：

性質 1：已知$\vec{a},\vec{b}$是平面上的兩非零向量，且$\vec{a},\vec{b}$不平行。若已知實數s_1,t_1,s_2,t_2滿足

$$s_1\vec{a}+t_1\vec{b}=s_2\vec{a}+t_2\vec{b}, \quad \dots(10)$$

則有$s_1=s_2$且$t_1=t_2$。

證明：使用反證法。首先，若$s_1\neq s_2$，則由(10)式可知

$$\vec{a}=-\frac{t_1-t_2}{s_1-s_2}\vec{b}. \quad \dots(11)$$

因為 $\vec{a}$ 為非零向量，故由(11)式可知必然有 $t_1\neq t_2$。此時，(11)式顯示 $\vec{a}$ 等於 $\vec{b}$ 乘上一個非零常數，因此 $\vec{a}$ 平行 $\vec{b}$，但此結果與 $\vec{a},\vec{b}$ 不平行的前提矛盾，因此可知 $s_1\neq s_2$ 不成立。

接著，若$t_1\neq t_2$，同理可得$\vec{a},\vec{b}$ 兩向量平行的結果，但這再次抵觸 $\vec{a},\vec{b}$ 不平行的前提，故$t_1\neq t_2$不成立。至此，因$s_1\neq s_2$與$t_1\neq t_2$均不成立，可知$s_1=s_2$且$t_1=t_2$，證畢。

有了上述性質後，我們便可開始看問題 2 的第二種解法，如下：

解答 2：請參考下圖：

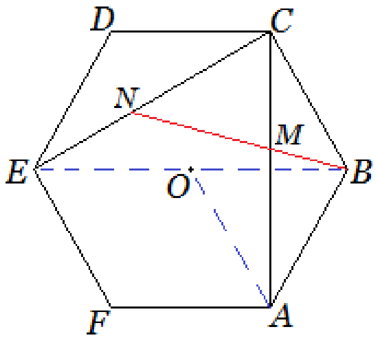

圖 5

由題意可知$\overline{AM}:\overline{MC}=r:(1-r)$，因此有

$$\overrightarrow{BM}=r\overrightarrow{BC}+(1-r)\overrightarrow{BA}. \quad \dots(12)$$

回顧解答 1，我們知道 r 值滿足 $\frac{1}{2}<r<1$。因為$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$，所以有

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}, \quad \dots(13)$$

將(13)式代入(12)式後，可得

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(1-r)\overrightarrow{BE}+(2r-1)\overrightarrow{BC}.$$

假設$\overrightarrow{BN}=t\overrightarrow{BM}$，其中$t>0$，則有

$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(1-r)t\overrightarrow{BE}+(2r-1)t\overrightarrow{BC}. \quad \dots(14)$$

又因為$\overline{CN}:\overline{NE}=r:(1-r)$，因此有

$$\overrightarrow{BN} = r\overrightarrow{BE} + (1-r)\overrightarrow{BC}. \quad \dots(15)$$

由(14), (15)兩式可知

$$\frac{1}{2}(1-r)t\overrightarrow{BE} + (2r-1)t\overrightarrow{BC} = r\overrightarrow{BE} + (1-r)\overrightarrow{BC},$$

因為$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}$是不平行的非零向量，利用性質 1，由上式可知

$$\frac{1}{2}(1-r)t = r, \qquad (2r-1)t = 1-r,$$

從而可寫下

$$t = \frac{2r}{1-r} = \frac{1-r}{2r-1}. \quad \dots(16)$$

由(16)式的右半邊可得$3r^2 = 1$，又因$r > 0$可得$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$，解題完畢。

最後，若我們將$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$代回(16)式，還可得$t = \sqrt{3} + 1$，而 $t > 1$ 的結果也與圖 5 中呈現出的條件 $\overline{BN} > \overline{BM}$ 相符。其實，此 t 值也可由解法 1 算出，有興趣的讀者不妨試試。

肆、第三道幾何題

在教育部高中數學學科電子報第 104 期的文章[3]中，作者陳建燁老師介紹了與三角形之「布洛卡角」有關的一個性質，該性質是指底下的等式：

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C, \qquad \dots(17)$$

其中A, B, C為三角形的三內角，ω 則為布洛卡角，可參考下圖：

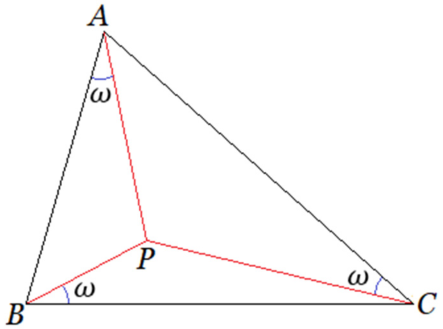

圖 6

在上述仿照[3]中參考圖形所繪製的圖 6 中，P 點稱為「第一布洛卡點」，它所在的位置其實可藉由尺規作圖畫出兩圓來交出。上圖中，只要作出過B, C 兩點且與$\overline{AC}$ 相切於C 的第一個圓，以及過A, B 兩點且與$\overline{BC}$ 相切於B 的第二個圓，則兩圓之交點即為P 點。讀者不

妨先試著思考其中的原因，筆者將在文末的[註 1]中給出簡單的說明。

而陳老師在[3]文中證明(17)式時，沒有走平面幾何的路線，反而透過高中數學的多項式與三角等技巧來完成證明，過程頗為精彩，讀者不妨多多參考。而為何要介紹[3]文呢？在此先賣個關子，請讀者先看看底下的性質：

性質 2：如下圖，圓O是ΔABC的外接圓，試證：$\angle BAC=\frac{1}{2}\widehat{BDC}.$

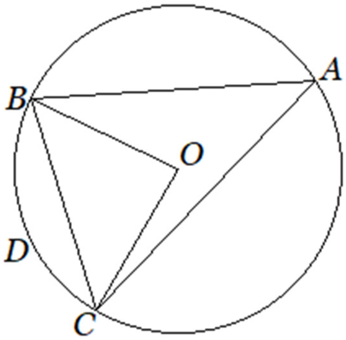

圖 7

性質 2 是說明一個圓周角的度數等於其所對弧度數的一半，想必大家都不陌生(註 2)。其證明方式，通常是使用平面幾何的方法，有興趣的讀者可參考[4]。

底下，筆者將把性質 2 當成是一個有待證明的幾何題，並介紹一個使用坐標平面、向量與三角函數的證法來證明它。對性質 2 提出另證，是想藉此呼應[3]文使用高中數學工具對平面幾何問題提出另解的精神。筆者的證法如下：

證明：在圖 7 中，以圓心O為原點建立坐標平面，如下圖所示：

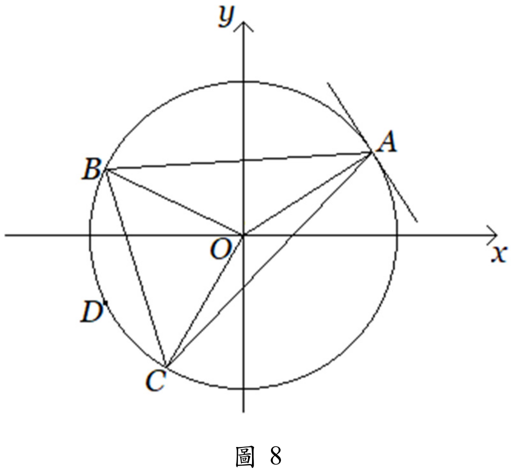

圖 8

上圖中，我們假設圓半徑為 1，並過 A 點作圓的切線。假設以 x 軸正向為始邊、射線 OA, OB, OC 為終邊的三個廣義角大小分別為 α, β, γ，則我們有

$$A(\cos\alpha, \sin\alpha), B(\cos\beta, \sin\beta), C(\cos\gamma, \sin\gamma).$$

不失一般性，假設 $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$，則從圖 8 的三角形外接圓與 x 軸正向之交點出發，以逆時針方向沿著外接圓繞一圈時，經過的三角形頂點依序為 A, B, C。

此時，利用兩向量夾角的計算公式計算$\cos\angle BAC$，我們可寫下

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}. \quad \ldots(18)$$

為了計算(18)的右式，我們先考慮$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的計算。利用上面寫下的$A, B, C$坐標，再透過三角函數的差角公式與和化積公式，可得如下的結果：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\cos\beta - \cos\alpha, \sin\beta - \sin\alpha)\cdot(\cos\gamma - \cos\alpha, \sin\gamma - \sin\alpha) \\
&= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + (\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) \\
&\quad - \cos\alpha(\cos\beta + \cos\gamma) - \sin\alpha(\sin\beta + \sin\gamma) \\
&= 1 + \cos(\gamma - \beta) - 2\cos\alpha\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2} \\
&\quad - 2\sin\alpha\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2} \\
&= 1 + \cos(\gamma - \beta) - 2\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{\gamma+\beta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\right) \\
&= 1 + \cos(\gamma - \beta) - 2\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2} - \alpha\right). \quad \ldots(19)
\end{aligned}$$

再利用cos 函數的倍角公式，可知

$$1 + \cos(\gamma - \beta) = 2\cos^2\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

將上式代入(19)式後，利用和差角公式，可得

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma-\beta}{2} - \cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2} - \alpha\right)\right) \\
&= 2\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\left(\cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right) \\
&= 4\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \quad \ldots(20)
\end{aligned}$$

另一方面，為了計算(18)式中的$\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|$這項，先計算$\left|\overrightarrow{AB}\right|$如下：

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right| &= |(\cos\beta-\cos\alpha,\sin\beta-\sin\alpha)| = \sqrt{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2}\\ &= \sqrt{2-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)} = \sqrt{2-2\cos(\beta-\alpha)}\\ &= \sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} = 2\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|.\end{aligned}$$

因為$0<\beta-\alpha<2\pi$，可知$0<\frac{\beta-\alpha}{2}<\pi$，因此$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}>0$，故上式可化簡為

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad \dots(21)$$

同理，我們也可得$\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}>0$，以及

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}. \qquad \dots(22)$$

將(20), (21), (22)三式代入(18)式，即可得到

$$\cos\angle BAC = \cos\frac{\gamma-\beta}{2}. \qquad \dots(23)$$

觀察圖 8，可知$\gamma-\beta$就是BDC弧的度數，且滿足$0<\frac{\gamma-\beta}{2}<\pi$；此外，由圖 8 也可看出$B, C$兩點落在過$A$之圓切線的同側，因此$0<\angle BAC<\pi$。由於cos函數在區間$(0,\pi)$上為嚴格遞減，因此具有一一對應的特性，故我們由(23)式可知

$$\angle BAC = \frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{1}{2}\widehat{BDC}.$$

這樣就完成了性質 2 的證明。

伍、結語

本文只是簡單的心得分享，寫作日期是 2019 年 7 月初的夏天，同時間世大運正好在義大利的拿坡里舉辦。寫作過程中，有時會從白天寫到晚上，也顧不得飯有沒有吃，好像怕靈感跑掉的樣子。覺得寫得不順的時候，會選擇在晚上出門散步吹吹風、聽聽蟲鳴，在身心放鬆的狀態下，也得到一些不錯的想法。

筆者對問題 3 的證明，在本文寫作前約半年就已大致記錄在紙上，剛好因為看到[3]文，所以決定和問題 1 與問題 2 的另解一起提出來分享給大家。文章最後，筆者要感謝[1],[3]文的作者陳建燁老師以及提供問題[2]的雙週一題主辦單位，因為有他們所提供的珍

貴的資料，才有本文的誕生。

備註：

註 1：當我們依照圖 6 底下所介紹的作法，在圖 6 中畫出所需要的兩個圓後，假設兩圓相交於P，則如下圖：

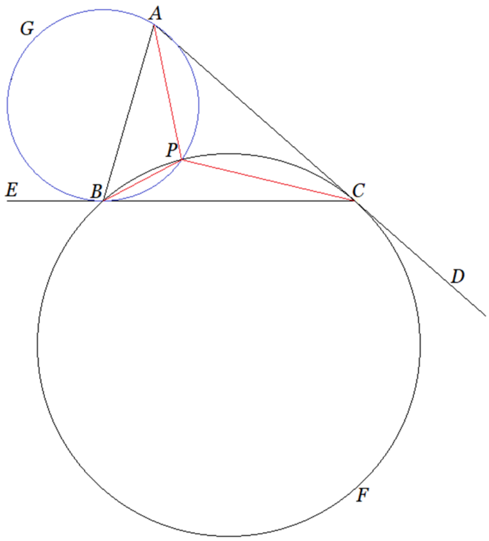

圖 9

上圖中，我們也畫出了兩圓的切線：直線 AD 與直線 CE。若問圖 9 中兩圓其圓心的位置如何確定，首先，過 C 且垂直 $\overline{AD}$ 之直線與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點，就是圖 9 下方較大圓的圓心位置；而圖 9 左上方較小圓的圓心，則落在過 B 且垂直 $\overline{CE}$ 之直線與 $\overline{AB}$ 中垂線的交點處。

圖 9 中，因為$\angle BCD, \angle BPC$分別為對弧BFC的圓周角與弦切角，可知

$$\angle BPC = \frac{1}{2} \times \widehat{BFC} = \angle BCD = \pi - \angle BCA.$$

觀察ΔBPC，因三角形內角和為π，利用上式可知

$$\angle PBC + \angle PCB = \pi - \angle BPC = \angle BCA = \angle PCB + \angle PCA,$$

消去上式等號兩端的$\angle PCB$，即得

$$\angle PBC = \angle PCA.$$

接著，只要觀察圖 9 中的另一個圓，同理也可得出$\angle PAB = \angle PBC$。這樣，我們就證出圖 6 中所標示之$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$的結果了。

圖 9 中的P，依據[3]文的介紹，就稱為「第一布洛卡點」。至於[3]文中介紹的

「第二布洛卡點」，其作圖法亦與圖 9 類似，讀者若有興趣，不妨自行完成。

註 2：性質 2 所想證明的結論，為何不寫成$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$呢？其中的一個原因，大概是因為當圖 7 中的$BDC$弧的度數大於平角時，我們對於$\angle BOC$究竟是指$BDC$弧還是$BAC$弧會感到混淆。此時，若引入像$\angle BOC-A$與$\angle BOC-D$這兩個新的記號，就可以幫助我們區別，但這樣的記號就較不簡潔與自然。筆者認為，這就是我們以「弧度記號⌒」取代「角度符號∠」來標示圓心角的主因。

參考資料

1. 陳建燁，老題新證-同時使用 Ceva 與 Menelaus 定理，**高中數學學科電子報第 101 期**
2. 國立中山大學應數系雙週一題活動，99 學年度第二學期第 7 題
3. 陳建燁，「布洛卡角」性質的代數證法，**高中數學學科電子報第 104 期**
4. **國民中學數學第五冊**，左台益主編，南一書局
5. **普通高級中學數學第三冊**，許志農主編，龍騰文化