圓內接多邊形頂角的合分角正弦與餘弦函數值關係方程式(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

【(續)科學教育月刊第 **423** 期第 **64** 頁之後】

2. 圓內接五邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

[2.1]. 展示 圓內接五邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

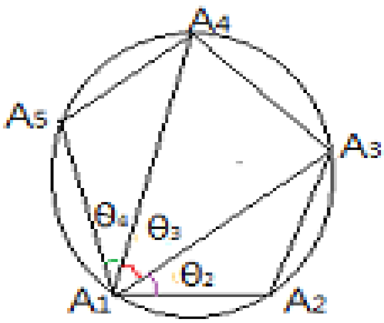

圖 16

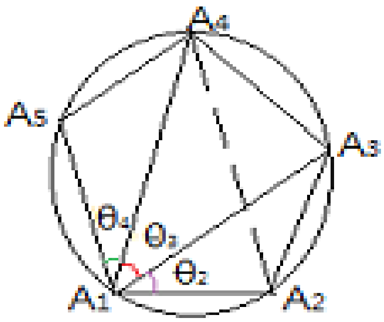

圖 17

參考圖 16.，取 $n=5$ 並根據歸納出 3 個綜合法則的規範搜尋：由**法則[1]**得 $\dfrac{\cos A_1}{V_5V_1}$ 項，由**法則[2]**得 $\dfrac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}+\dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$，由**法則[3]** (3-1).得分式項分母部份為 $V_5V_1{d_{13}}^2{d_{14}}^2$，由(3-2).得分子部份的 4 個組合模式；[第一組合模式]裡由 V_5V_1 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=5-4=1 種情況組合，就是 case 1.下的 2 種組合，此組合為 V_5V_1 [${d_{13}}^2+{d_{14}}^2$]。[第二組合模式]裡由 V_5V_2 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=1 種項式組合，此組合為 $V_5V_2V_3d_{14}$。[第三組合模式]裡由 V_1V_4 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=1 種項式組合，此組合為 $V_1V_4V_3\ d_{13}$。[第四組合模式]裡由 V_2V_4 乘積引領的單一項為 $V_2V_4\ d_{14}\ d_{13}$ 。將以上搜尋到的所有項式按規範集合起來，得下式；

$$\frac{\cos A_1}{V_5V_1} = \frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$$

$$-\frac{V_5V_1[d_{13}{}^2+d_{14}{}^2]+V_5V_2V_3d_{14}+V_1V_4V_3d_{13}+V_2V_4d_{14}d_{13}}{V_5V_1d_{13}{}^2d_{14}{}^2} \quad (3)$$

方程式 (3)式為法則規範的圓內接五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

檢視 (3)式的每一個別項式運算量綱都是長度的負 2 次方！

[2.2]. 驗證證明： 在上圖 17.中，令對角線長 $\overline{A_2A_4} = d_{24}$；

見上圖 17.，先選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，並引用方程式 (2)式，得

$\dfrac{\cos A_1}{V_5V_1} = \dfrac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}} + \dfrac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1} - \dfrac{V_5V_1+d_{24}V_4}{V_5V_1d_{14}{}^2}$ ，再選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，

得 $\dfrac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1} = \dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \dfrac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}{}^2}$ ，代入前式，排列成下式；

$$\frac{\cos A_1}{V_5V_1} = \frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \frac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}{}^2} - \frac{V_5V_1+d_{24}V_4}{V_5V_1d_{14}{}^2} \quad (3^*)$$

這(3*)式的末項裡有 $d_{24}V_4$ 的乘積項需要被轉換，再參考上圖 17.的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，引用托勒密公式，得 $d_{13}d_{24} = V_1V_3 + V_2d_{14} \Rightarrow d_{24} = \dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}$ ，

則 $V_5V_1 + d_{24}V_4 = V_5V_1 + \dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}} \times V_4 = \dfrac{V_5V_1d_{13}+V_1V_4V_3+V_2V_4d_{14}}{d_{13}}$ 代入(3*)式

，得 $\dfrac{\cos A_1}{V_5V_1} = \dfrac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}} + \dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \dfrac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}{}^2} - \dfrac{V_5V_1d_{13}+V_1V_4V_3+V_2V_4d_{14}}{V_5V_1d_{14}{}^2d_{13}}$

$$= \frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \frac{V_5V_1[d_{13}{}^2+d_{14}{}^2]+V_5V_2V_3d_{14}+V_1V_4V_3d_{13}+V_2V_4d_{14}d_{13}}{V_5V_1d_{13}{}^2d_{14}{}^2}$$

到此為止，已完成證明方程式 (3)式。其等號右側總計有 $C_2^5 - 2 = 8$ 項數。

3. 圓內接六邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

[3.1]. 展示 圓內接六邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

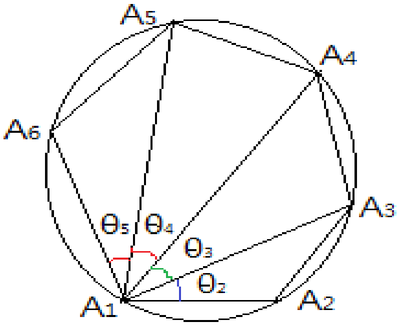

圖 18

參考圖 18.，取 $n=6$ 並根據歸納出 3 個綜合法則的規範搜尋：由**法則[1]**得 $\dfrac{\cos A_1}{V_6V_1}$ 項，

由**法則[2]**得 $\dfrac{\cos\theta_5}{V_6d_{15}}+\dfrac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$ ，由**法則[3]** (3-1).得分式項分母部份為 $V_6V_1d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2$，由(3-2).得分子部份的 4 個組合模式；[第一組合模式]裡由 V_6V_1 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=6-4=2 種情況組合，就是包括：case 1.下的($n-3$)=6-3=3 項組合，相加的 3 項組合式為 $V_6V_1(\,d_{13}{}^2d_{14}{}^2+d_{14}{}^2d_{15}{}^2+d_{15}{}^2d_{13}{}^2)$。case 2.的($n-5$)=6-5=1 乘積項式為 $V_6V_1\,V_3V_4\,d_{13}\,d_{15}$ 。總計有 4 項式。

[第二組合模式]裡由 V_6V_2 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=2 個項式組合，此組合為 $V_6V_2\,[\,V_3d_{14}\,d_{15}{}^2+V_4\,d_{13}\,d_{14}\,d_{15}]$ 。[第三組合模式]裡由 V_1V_5 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=2 個項式組合，此組合為 $V_1V_5\,[\,V_4d_{14}d_{13}{}^2+V_3d_{13}d_{14}d_{15}]$ 。[第四組合模式]裡由 V_2V_5 乘積引領的單一項式為 $V_2V_5\,d_{15}\,d_{13}\,d_{14}{}^2$ 。現在，將以上搜尋到的所有項式按規範集合起來如下；

$$\frac{\cos A_1}{V_6V_1}=\frac{\cos\theta_5}{V_6d_{15}}+\frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{1}{V_6V_1(d_{13}d_{14}d_{15})^2}\{\,V_6V_1[(\,d_{13}{}^2d_{14}{}^2+d_{14}{}^2d_{15}{}^2+d_{15}{}^2d_{13}{}^2\,)+V_3V_4\,d_{13}\,d_{15}\,]+V_6V_2\times[\,V_3d_{14}\,d_{15}{}^2+V_4\,d_{13}\,d_{14}\,d_{15}]+V_1V_5[\,V_4d_{14}d_{13}{}^2+V_3d_{13}d_{14}d_{15}]+V_2V_5\,d_{15}\,d_{13}\,d_{14}{}^2\}\qquad(4)$$

方程式 (4)式為法則規範的圓內接六邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

方程式 (4)式其公式等號右側總計有 $C_2^6-2=13$ 項數目。

[3.2]. 驗證證明：略。請參考九邊形的證明。

4. 圓內接七邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

[4.1]. 展示 圓內接七邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

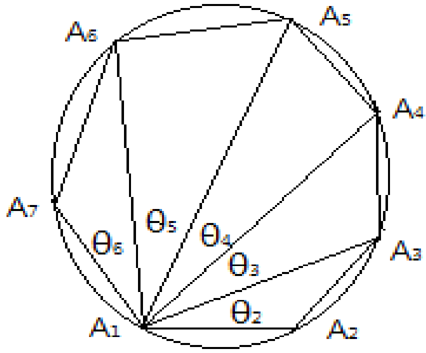

圖 19.

參考圖 19.，取 $n=7$ 並根據歸納出 3 個綜合法則的規範搜尋：由法則**[1]**得 $\dfrac{\cos A_1}{V_7V_1}$ 項，由法則**[2]**得 $\dfrac{\cos\theta_6}{V_7d_{16}}+\dfrac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\dfrac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$ ，由法則**[3]** (3-1).得分式項分母部份為 $V_7V_1d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2$，由(3-2).得分子部份的 4 個組合模式；[第一組合模式]裡由 V_7V_1 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=7-4=3 種情況組合，就是包括：case 1.下的($n-3$)=7-3=4 項組合，相加的 4 項組合式為 $V_7V_1[(d_{13}d_{14}d_{15})^2+(d_{14}d_{15}d_{16})^2+(d_{15}d_{16}d_{13})^2+(d_{16}d_{13}d_{14})^2]$ 。 case 2.的($n-5$)=7-5=2 乘積項式為 $V_7V_1\,V_3V_4\,d_{13}\,d_{15}d_{16}{}^2+V_7V_1\,V_3V_5\,d_{13}\,d_{14}d_{15}d_{16}$ 。 case 3.的($n-6$)=7-6=1 乘積項式為 $V_7V_1\,V_4V_5\,d_{14}\,d_{16}\,d_{13}{}^2$ 。此 [第一組合模式] 裡總計有 7 項式。

[第二組合模式]裡由 V_7V_2 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=3 個項式組合，此組合為

$V_7V_2[V_3d_{14}(d_{15}d_{16})^2+V_4d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}{}^2+V_5d_{15}d_{16}d_{13}d_{14}{}^2]$ 。[第三組合模式]裡由 V_1V_6 乘積領軍，下有($n-4$)=3 個項式組合，此組合為 $V_1V_6[V_5d_{15}(d_{13}d_{14})^2+V_4d_{13}{}^2d_{14}d_{15}d_{16}+V_3d_{16}d_{13}d_{14}d_{15}{}^2]$ 。[第四組合模式]裡由 V_2V_6 乘積引領的單一項式為 $V_2V_6d_{16}d_{13}(d_{14}d_{15})^2$ 。將以上搜尋到的所有項式按規範集合起來如下；

$$\frac{\cos A_1}{V_7V_1}=\frac{\cos\theta_6}{V_7d_{16}}+\frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{1}{V_7V_1(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})^2}\{V_7V_1[(d_{13}d_{14}d_{15})^2+(d_{14}d_{15}d_{16})^2+(d_{15}d_{16}d_{13})^2+(d_{16}d_{13}d_{14})^2+(V_3V_4d_{13}d_{15}d_{16}{}^2+V_3V_5d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})+V_4V_5d_{14}d_{16}d_{13}{}^2]+V_7V_2[V_3d_{14}(d_{15}d_{16})^2+V_4d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}{}^2+V_5d_{15}d_{16}d_{13}d_{14}{}^2]+V_1V_6[V_5d_{15}(d_{13}d_{14})^2+V_4d_{13}{}^2d_{14}d_{15}d_{16}+V_3d_{16}d_{13}d_{14}d_{15}{}^2]+V_2V_6d_{16}d_{13}(d_{14}d_{15})^2\} \tag{5}$$

方程式 (5)式為法則規範的圓內接七邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

方程式 (5)式其公式等號右側總計有 $C_2^7-2=19$ 項數目。

[4.2]. 驗證證明：略。請參考九邊形的證明。

5. 圓內接八邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

[5.1]. 展示 圓內接八邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

同理，參考圖 20.，取 $n=8$ 並根據歸納出 3 個綜合法則的規範搜尋，得下式；

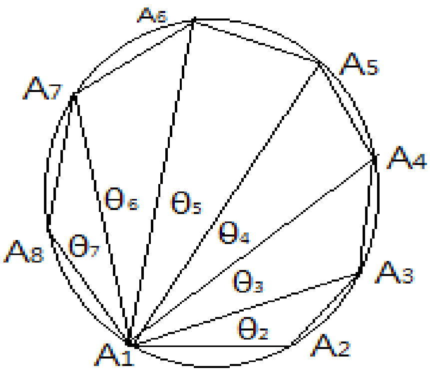

圖 20

$$\frac{\cos A_1}{V_8V_1} = \frac{\cos\theta_7}{V_8d_{17}} + \frac{\cos\theta_6}{d_{17}d_{16}} + \frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}} + \frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \frac{1}{V_8V_1(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17})^2}$$

$$\{V_8V_1[(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})^2 + (d_{14}d_{15}d_{16}d_{17})^2 + (d_{15}d_{16}d_{17}d_{13})^2 + (d_{16}d_{17}d_{13}d_{14})^2 +$$

$$(d_{17}d_{13}d_{14}d_{15})^2 + V_3V_4\, d_{13}\, d_{15}(d_{16}d_{17})^2 + V_3V_5\, d_{13}\, d_{14}d_{15}d_{16}{d_{17}}^2 + V_3V_6\, d_{13}\, d_{14}d_{16}d_{17}{d_{15}}^2 +$$

$$V_4V_5\, d_{14}\, d_{16}\,(d_{13}d_{17})^2 + V_4V_6\, d_{14}\, d_{15}d_{16}d_{17}{d_{13}}^2 + V_5V_6\, d_{15}d_{17}(d_{13}d_{14})^2] +$$

$$V_8V_2[V_3d_{14}\,(d_{15}d_{16}d_{17})^2 + V_4\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15}(d_{16}d_{17})^2 + V_5\, d_{13}\, d_{15}\, d_{16}(d_{14}d_{17})^2 +$$

$$V_6\, d_{13}\, d_{16}\, d_{17}(d_{14}d_{15})^2] + V_1V_7[V_6d_{16}(d_{13}d_{14}d_{15})^2 + V_5d_{15}d_{16}d_{17}(d_{13}d_{14})^2 +$$

$$V_6\, d_{13}\, d_{16}\, d_{17}(d_{14}d_{15})^2] + V_1V_7[V_6d_{16}(d_{13}d_{14}d_{16})^2 + V_5d_{15}d_{16}d_{17}(d_{13}d_{14})^2 +$$

$$V_4d_{14}d_{15}d_{17}(d_{13}d_{16})^2 + V_3d_{17}d_{13}d_{14}(d_{15}d_{16})^2] + V_2V_7\, d_{17}\, d_{13}\,(d_{14}d_{15}d_{16})^2\} \tag{6}$$

方程式 (6)式為法則規範的圓內接八邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

方程式 (6)式其公式等號右側總計有 $C_2^8 - 2 = 26$ 項數目。

[5.2]. 驗證證明：略。請參考九邊形的證明。

6. 圓內接九邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

[6.1]. 展示 圓內接九邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

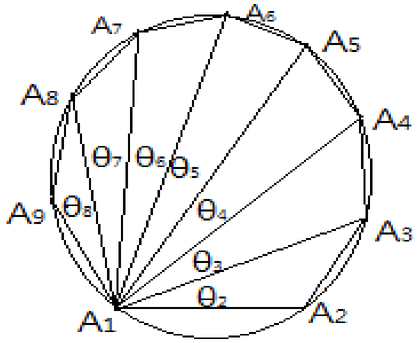

圖 21.

參考圖 21.，取 $n=9$ 並根據 3 個綜合法則的規範搜尋：由**法則[1]**得 $\frac{\cos A_1}{V_9V_1}$ 項，由**法則[2]**得 $\frac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}} + \frac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}} + \frac{\cos\theta_6}{d_{17}d_{16}} + \frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}} + \frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$，由**法則[3]**

(3-1).得分式項分母部份為 $V_9V_1{d_{13}}^2{d_{14}}^2{d_{15}}^2{d_{16}}^2{d_{17}}^2{d_{18}}^2$，由(3-2).得分子部份的 4 個組合模式；[第一組合模式]裡由 V_9V_1 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=9-4=5 種情況組合，

就是包括：case 1.下的($n-3$)=9-3=6 項組合，相加的 6 項組合式為

$V_9V_1\times$ ($d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2 + d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2d_{13}{}^2 +$

$d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2d_{13}{}^2d_{14}{}^2 + d_{17}{}^2d_{18}{}^2d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2 + d_{18}{}^2d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2$)。

case 2.的($n-5$)=9-5=4 乘積項式相加為 $V_9V_1\times(V_3V_4\, d_{13}\, d_{15}\cdot d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + V_3V_5\, d_{13}$

$d_{14}\, d_{15}\, d_{16}d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + V_3V_6\, d_{13}\, d_{14}\, d_{16}d_{17}\cdot d_{18}{}^2d_{15}{}^2 + V_3V_7\, d_{13}\, d_{14}\, d_{17}d_{18}d_{15}{}^2d_{16}{}^2$)。

case 3.的($n-6$)=9-6=3 乘積項式相加為 $V_9V_1\times(V_4V_5\, d_{14}\, d_{16}\, d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + V_4V_6\, d_{14}\, d_{15}$
$d_{16}d_{17}d_{18}{}^2d_{13}{}^2 + V_4V_7\, d_{14}\, d_{15}\, d_{17}d_{18}d_{13}{}^2d_{16}{}^2$)。

case 4.的 ($n-7$)= 9-7= 2 乘積項式相加為 $V_9V_1\times(V_5V_6\, d_{15}\, d_{17}\, d_{18}{}^2d_{13}{}^2d_{14}{}^2 + V_5V_7\, d_{15}$

$d_{16}d_{17}d_{18}d_{13}{}^2d_{14}{}^2$)。

case 5.的單一乘積項式為 $V_9V_1\, V_6V_7\, d_{16}\, d_{18}\, d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2$ 。此 [第一組合模式] 裡總計 16 項式。

[第二組合模式]裡由 V_9V_2 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=5 個項式組合，此組合為 $V_9V_2\,[\,V_3d_{14}\, d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + V_4\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15}d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2 + V_5\, d_{13}\, d_{15}d_{16}d_{17}{}^2d_{18}{}^2d_{14}{}^2 + V_6$

$d_{13}\, d_{16}d_{17}d_{18}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2 + V_7\, d_{13}\, d_{17}d_{18}d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2\,]$ 。[第三組合模式]裡由 V_1V_8 乘積領軍，此模式下有($n-4$)=5 個項式組合，此組合為 $V_1V_8\,[\,V_7d_{17}d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2 +$

$V_6d_{16}d_{17}d_{18}d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{15}{}^2 + V_5d_{15}d_{16}d_{18}d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{17}{}^2 + V_4d_{14}d_{15}d_{18}d_{13}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2 +$

$V_3d_{13}d_{14}d_{18}d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2\,]$ 。 [第四組合模式]裡由 V_2V_8 乘積引領的單一項式為

$V_2V_8\, d_{18}\, d_{13}\, d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2$ 。將以上搜尋到的所有項式按規範集合起來如下；

$$\frac{\cos A_1}{V_9V_1}=\frac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}}+\frac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}}+\frac{\cos\theta_6}{d_{17}d_{16}}+\frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}\ -$$

$$\frac{1}{V_9V_1(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}d_{18})^2}\{V_9V_1\times[(d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2+d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2+$$

$$d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2d_{13}^2+d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2d_{13}^2d_{14}^2+d_{17}^2d_{18}^2d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2+d_{18}^2d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2)$$

$$+(V_3V_4\,d_{13}\,d_{15}\cdot d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2+V_3V_5\,d_{13}\,d_{14}\,d_{15}\,d_{16}d_{17}^2d_{18}^2+V_3V_6\,d_{13}\,d_{14}\,d_{16}d_{17}d_{18}^2d_{15}^2+$$

$$V_3V_7\,d_{13}\,d_{14}\,d_{17}d_{18}d_{15}^2d_{16}^2)+\ (V_4V_5\,d_{14}\,d_{16}\,d_{17}^2d_{18}^2+V_4V_6\,d_{14}\,d_{15}\,d_{16}d_{17}d_{18}^2d_{13}^2+$$

$$V_4V_7\,d_{14}\,d_{15}\,d_{17}d_{18}d_{13}^2d_{16}^2)+(V_5V_6\,d_{15}\,d_{17}\,d_{18}^2d_{13}^2d_{14}^2+V_5V_7\,d_{15}\,d_{16}d_{17}d_{18}d_{13}^2d_{14}^2)+$$

$$V_6V_7\,d_{16}\,d_{18}\,d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2]\quad+\quad V_9V_2\,[V_3d_{14}\,d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2+V_4\,d_{13}\,d_{14}\,d_{15}d_{16}^2d_{17}^2d_{18}^2+$$

$$V_5\,d_{13}\,d_{15}d_{16}d_{17}^2d_{18}^2d_{14}^2+V_6\,d_{13}\,d_{16}d_{17}d_{18}^2d_{14}^2d_{15}^2+V_7\,d_{13}\,d_{17}d_{18}d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2]+$$

$$V_1V_8[V_7d_{17}d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2+V_6d_{16}d_{17}d_{18}d_{13}^2d_{14}^2d_{15}^2+V_5d_{15}d_{16}d_{18}d_{13}^2d_{14}^2d_{17}^2+$$

$$V_4d_{14}d_{15}d_{18}d_{13}^2d_{16}^2d_{17}^2+V_3d_{13}d_{14}d_{18}d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2]+V_2V_8\,d_{18}\,d_{13}\,d_{14}^2d_{15}^2d_{16}^2d_{17}^2\}\qquad(7)$$

方程式 (7)式為法則規範的圓內接九邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

檢視 (7)式的每一個別項式運算量綱都是長度的負 2 次方！

方程式 (7)式其公式等號右側總計有 $C_2^9-2=34$ 項數目。

[6.2]. 驗證證明：

6.2a). 先證明：圓內接 n 邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式 (L1)式。

i. 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，有引理 1.的托勒密公式：$d_{24}d_{13}=V_2V_4+V_3V_1$，

由引理 2.知 $V_2=2R\sin\theta_2$，$V_3=2R\sin\theta_3$，$d_{24}=2R\sin A_1$，代入公式化簡

$$\Rightarrow\ d_{13}\sin A_1=V_1\sin\theta_3+V_4\sin\theta_2\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}\qquad(8)$$

方程式 (8)式就是圓內接四邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式！

方程式 (8)式比之於方程式 (2)式的餘弦值方程式更要簡潔漂亮得多！兩者的差異性很大， (2)式多出了這一項； $-\dfrac{V_4V_1+V_2V_3}{V_4V_1{d_{13}}^2}$ 。

ii. 對圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 言， 見下圖 22.與 23.，應用 (8)式可得

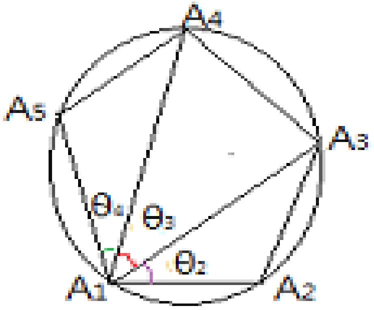

圖 22.

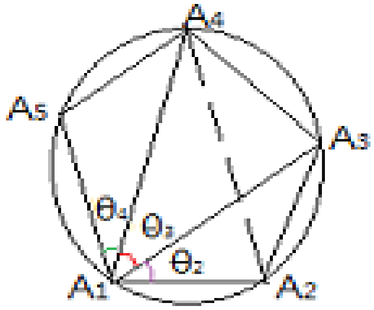

圖 23

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{9}$$

方程式 (9)式就是圓內接五邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式！

方程式 (9)式也比方程式 (3)式的餘弦值方程式更要簡潔漂亮許多！

iii. 繼續依樣推演圓內接六邊形、七邊形、八邊形、⋯ ⋯ ⋯ 直到 n 邊形；

iv. 對半徑 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 言， 見下圖 24，

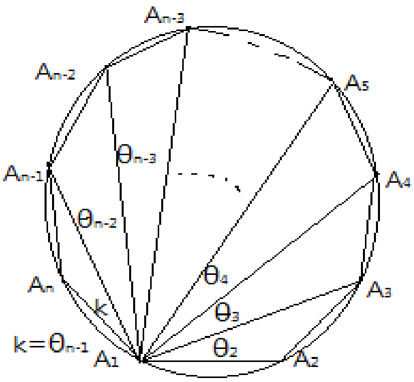

圖 24.

應用 (8)式可得 $\dfrac{\sin A_1}{V_nV_1}=\dfrac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\dfrac{\sin(\theta_{n-2}+\theta_{n-3}+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{1(n-1)}V_1}$

$$=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\frac{\sin(\theta_{n-3}+\theta_{n-4}+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{1(n-2)}V_1}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\frac{\sin\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}}+\ldots+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \quad \text{(L1)}$$

圓內接 n 邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式 (L1)式敘述證明完成。

方程式 (L1)式比之於方程式 (1)式的餘弦值方程式更要簡潔漂亮對稱！兩者的差異性非常驚人。而兩者每一個別項式的量綱都是長度的負 2 次方！

6.2b). 證明 圓內接九邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式 (7)式： 見圖 25.，

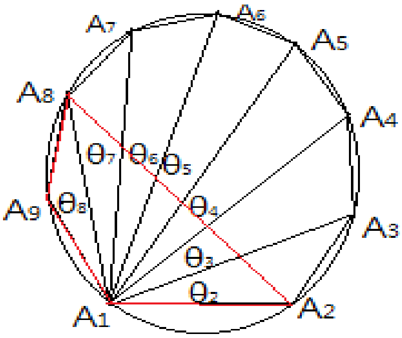

圖 25

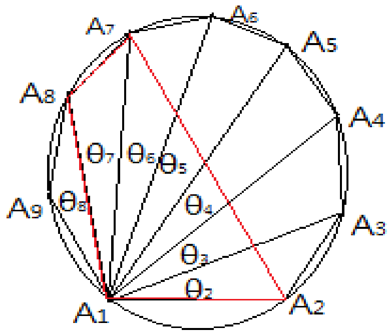

圖 26

(b.1). 選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_8A_9$，引用方程式 (2)式得餘弦值關係方程式；

$\dfrac{\cos A_1}{V_9V_1}=\dfrac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}}+\dfrac{\cos(\theta_7+\theta_6+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{18}V_1}-\dfrac{V_9V_1+d_{28}V_8}{V_9V_1d_{18}{}^2}$ ，再選取圓內接四邊形

$A_1A_2A_7A_8$，圖 26.，得 $\dfrac{\cos(\theta_7+\theta_6+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{18}V_1}=\dfrac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}}+\dfrac{\cos(\theta_6+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{17}V_1}$

$-\dfrac{d_{18}V_1+d_{27}V_7}{d_{18}V_1d_{17}{}^2}$ ，代入前式，得 $\dfrac{\cos A_1}{V_9V_1}=\dfrac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}}+\dfrac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}}+\dfrac{\cos(\theta_6+\cdots+\theta_3+\theta_2)}{d_{17}V_1}$

$$-\frac{V_9V_1+d_{28}V_8}{V_9V_1{d_{18}}^2}-\frac{d_{18}V_1+d_{27}V_7}{d_{18}V_1{d_{17}}^2}$$ 。

(b.2). 繼續這同樣的推演運算，⋯ ⋯ ⋯ ，最後得下列方程式 (7.1)式；

$$\frac{\cos A_1}{V_9V_1}=\frac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}}+\frac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}}+\frac{\cos\theta_6}{d_{17}d_{16}}+\frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{V_9V_1+d_{28}V_8}{V_9V_1{d_{18}}^2}$$

$$-\frac{d_{18}V_1+d_{27}V_7}{d_{18}V_1{d_{17}}^2}-\frac{d_{17}V_1+d_{26}V_6}{d_{17}V_1{d_{16}}^2}-\frac{d_{16}V_1+d_{25}V_5}{d_{16}V_1{d_{15}}^2}-\frac{d_{15}V_1+d_{24}V_4}{d_{15}V_1{d_{14}}^2}-\frac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1{d_{13}}^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\cos A_1}{V_9V_1}=\frac{\cos\theta_8}{V_9d_{18}}+\frac{\cos\theta_7}{d_{18}d_{17}}+\frac{\cos\theta_6}{d_{17}d_{16}}+\frac{\cos\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}\ -$$

$$\frac{1}{V_9V_1(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}d_{18})^2}\{(V_9V_1+d_{28}V_8)(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17})^2+(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})^2d_{18}V_9\times$$

$$(d_{18}V_1+d_{27}V_7)\ +\ (d_{17}V_1+d_{26}V_6)\,(d_{13}d_{14}d_{15}d_{18})^2d_{17}V_9\ +\ (d_{13}d_{14}d_{17}d_{18})^2d_{16}V_9\times$$

$$(d_{16}V_1+d_{25}V_5)+(d_{15}V_1+d_{24}V_4)\,(d_{13}d_{16}d_{17}d_{18})^2d_{15}V_9\ +\ (d_{15}d_{16}d_{17}d_{18})^2d_{14}V_9\times$$

$$(d_{14}V_1+V_2V_3)\,\}\tag{7.1}$$

(b.3). 在這 (7.1)式中請注意末項最大分式項的分子部份，令此分子部份的所有項式組合為 N；經展開運算後，得 $N=V_9V_1(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17})^2+d_{28}V_8(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17})^2+$

$V_9V_1\,(d_{18}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})^2+V_9V_7d_{27}\,(d_{13}d_{14}d_{15}d_{16})^2d_{18}+V_9V_1\,(d_{17}d_{18}d_{13}d_{14}d_{15})^2+$

$V_9V_6d_{26}\,(d_{13}d_{14}d_{15}d_{18})^2d_{17}+V_9V_1\,(d_{16}d_{17}d_{18}d_{13}d_{14})^2+V_9V_5d_{25}\,(d_{13}d_{14}d_{17}d_{18})^2d_{16}+V_9V_1$

$(d_{15}d_{16}d_{17}d_{18}d_{13})^2+V_9V_4d_{24}\,(d_{13}d_{16}d_{17}d_{18})^2d_{15}+V_9V_1\,(d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}d_{18})^2+V_9V_2V_3d_{14}$

$(d_{15}d_{16}d_{17}d_{18})^2$ 。在 N 的 12 項式中，位於第 2、第 4、第 6、第 8、第 10 項處看到 5 個特別的乘積成份；$d_{28}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}$ ，$d_{27}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}$ ，$d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}$ ，$d_{25}d_{13}d_{14}$ ，$d_{24}d_{13}$ 。因 $d_{28},d_{27},d_{26},d_{25},d_{24}$ 這 5 個長度不是給定的已知量，要被轉換成已知量，接下來的敘述導證過程就是要做轉換推演；

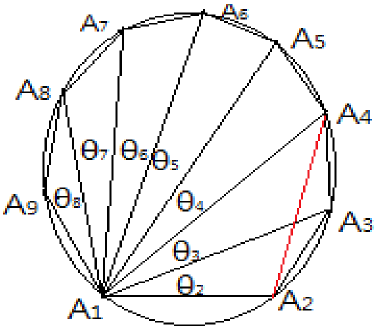

圖 27.

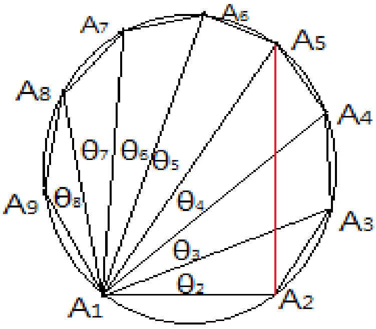

圖 28.

i. 見圖 27.，由四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 可得出； $d_{24}d_{13}=V_2d_{14}+V_3V_1$ (7.1.1)

ii. 見圖 28，取 $n=5$，由五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 及引理 3.可得出；

$$\frac{\sin\angle A_5A_1A_2}{d_{15}V_1}=\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$$

，再由引理 2.得 $\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=$

$$\frac{V_4}{\sin\theta_4}=2R=\frac{d_{25}}{\sin\angle A_5A_1A_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{d_{25}}{d_{15}V_1}=\frac{V_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{V_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{V_2}{d_{13}V_1}$$

$$\Rightarrow\quad d_{25}d_{13}d_{14}=V_4V_1d_{13}+V_3V_1d_{15}+V_2d_{14}d_{15} \qquad (7.1.2)$$

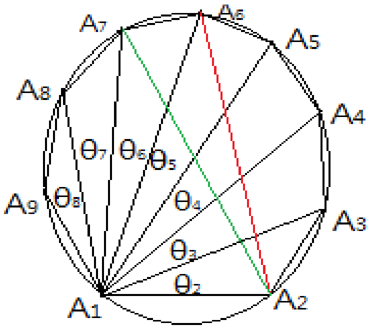

圖 29

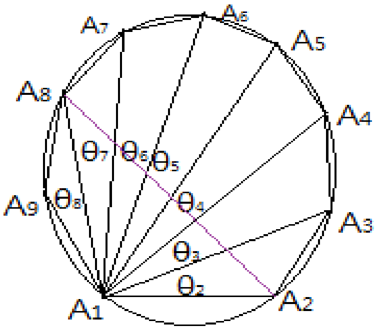

圖.30

iii. 見圖 29.，取 $n=6$，由六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 及引理 3.可得出；

$$\frac{\sin\angle A_6A_1A_2}{d_{16}V_1}=\frac{\sin\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$$

，再由引理 2.得

$$\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\frac{V_4}{\sin\theta_4}=\frac{V_5}{\sin\theta_5}=2R=\frac{d_{26}}{\sin\angle A_6A_1A_2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d_{26}}{d_{16}V_1}=\frac{V_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{V_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{V_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{V_2}{d_{13}V_1}$$

$$\Rightarrow\ d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}=V_5V_1d_{13}d_{14}+V_4V_1d_{13}d_{16}+V_3V_1d_{15}d_{16}+V_2d_{14}d_{15}d_{16} \quad (7.1.3)$$

iv. 見圖 29.，取 $n=7$，由七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 及引理 3.與引理 2.可得出；

$$\Rightarrow\ \frac{d_{27}}{d_{17}V_1}=\frac{V_6}{d_{17}d_{16}}+\frac{V_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{V_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{V_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{V_2}{d_{13}V_1}\ \Rightarrow$$

$$d_{27}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}=V_6V_1d_{13}d_{14}d_{15}+V_5V_1d_{13}d_{14}d_{17}+V_4V_1d_{13}d_{16}d_{17}+V_3V_1d_{15}d_{16}d_{17}+$$

$$V_2d_{14}d_{15}d_{16}d_{17} \quad (7.1.4)$$

v. 見圖 30.取 $n=8$，由八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 及引理 3.與引理 2.可得出；

$$\Rightarrow\ \frac{d_{28}}{d_{18}V_1}=\frac{V_7}{d_{18}d_{17}}+\frac{V_6}{d_{17}d_{16}}+\frac{V_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{V_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{V_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{V_2}{d_{13}V_1}\ \Rightarrow$$

$$d_{28}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}=V_7V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}+V_6V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{18}+V_5V_1d_{13}d_{14}d_{17}d_{18}+$$

$$V_4V_1d_{13}d_{16}d_{17}d_{18}+V_3V_1d_{15}d_{16}d_{17}d_{18}+V_2d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}d_{18} \quad (7.1.5)$$

(b.4). 轉換完成。將(7.1.5)式、(7.1.4)式、(7.1.3)式、(7.1.2)式、(7.1.1)式依序代入 N 的各對應項式中，再運算組合，移項重整，按順序排列好，再代入 (7.1)式中末項最大分式項的分子部份，再組合、整理、排列，最後即得證出 (7)式。

7. 圓內接十邊形以後($n\geq 10$)的所有多邊形都能仿效此九邊形的驗證過程被完整無瑕地證明出來，縱然公式項式極其龐大，也必整齊規則有序地被排列出來！

參、結論

1. 上述全文證明出的結果顯示正弦值與餘弦值關係方程式差異性極大無比，最鮮明差異就是餘弦值關係方程式增多出一巨大的非角度分式項；雖然多項繁複，卻也能有規律地被逐一整合、完美歸納出正確方程式來。本文也因此得到兩者的延伸推廣一般化方

程式 (L1)式與 (1)式，使得多邊形領域裡多出 2 組方程式。

2. 在推理演繹證明過程中，須注意到並掌握任一項式的運算總量綱概念；巨大分式項的分子內任何單一項的運算量綱都是長度的 $(2n-6)$次方！而分母的運算量綱是長度的 $(2n-4)$次方，組合起來的運算總量綱就成為負 2 次方！有量綱概念在演算歸納過程中始能推理搜尋到每一項式的正確表示式。\

3. 方程式 (8)式與方程式 (2)式和托勒密公式都是最基本公式，以此可適度地擴充推廣到一般化方程式 (L1)式與 (1)式。所以，(L1)式與 (1)式必涵蓋統一了(8)式與 (2)式和托勒密公式，使它們都成為特例。

4. 原本多邊形裡有遠古著名的圓內接四邊形托勒密公式，而本文推證出的一般化方程式(L1)式與 (1)式及 (8)式與 (2)式更是豐富了圓內接多邊形多樣化內涵，再為多邊形邊長與角度關係補進兩塊拼圖，在處置有關多邊形問題時，增闢了多個思考引證路線。多邊形領域裡潛藏的內涵豐盛寬廣，有待挖掘探索，本文為自我發想的創作，期盼在數學世界的發展裡能讓多邊形的星空多一點燦爛！

參考文獻

李輝濱，平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式，**科學教育月刊 417 期**，2019 年 4 月出版發行。

李輝濱，平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式，**科學教育月刊 413 期**，31-50，2018 年 10 月出版發行。

李輝濱，圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理，**數學傳播季刊，148 期**，2013 年 12 月。

李輝濱，預測與驗證平面凸多邊形面積公式，**科學教育月刊，398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

林倉億 數學歸納法專輯，**HPM 通訊第八卷第二、三期**，2005 年 3 月。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，2011，五南圖書出版公司。

項武義，**基礎分析學**，2012，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonome*try, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .