廣義階和數列--階和與階差的統一推廣

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在參考資料[1]與[2]，分別了討論了階和與階差數列的定義，以及它們的一般項公式，並進而應用在 Fibonacci 數列和 Padovan 數列，證明了一些恆等式。這些已知的內容置於附錄，方便讀者作比較與對照。

簡單來說，階和(差)數列的概念，是將原來數列中的相鄰項，兩兩相加(減)之後，作為第一階的階和(差)數列；再將第一階的階和(差)數列中的相鄰項，兩兩相加(減)之後，作為第二階的階和(差)數列，以此規則不斷地進行下去，即可得到第 k 階的階和(差)數列。在操作過程中，可看到「二項式係數」自然地浮現，在歸納出一般項公式之後，可用數學歸納法加以證明。

另一方面，從 Fibonacci 數列和 Padovan 數列的定義，可以看出，它們的階和(差)數列，仍然分別是 Fibonacci 數列和 Padovan 數列，只是下標出現了移動，在觀察出移動的規則之後，也可用數學歸納法加以證明。此一結構上的吻合，使得在比較對應項之後，可用來證明一些二項式係數恆等式。

以上是[1]與[2]的大致描述。在本篇文章中，將試著拓寬階和數列的定義，即把原數列的相鄰兩項，各自乘上倍數再相加之後，得到下一階的廣義階和數列。在接下來的文章，會作出正式的定義，觀察出一般項，並加以證明。最後，再將一般項公式應用於一般的二階線性遞迴數列，得到一個一般性的二項式係數恆等式。

貳、本文

一、「廣義階和數列」的定義：

1. 對於數列 $\langle a_n \rangle$：$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，令 $S^{(1)}a_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot a_{n+1}$，其中 $n = 0,1,2,\cdots$，則所得的數列 $\langle S^{(1)}a_n \rangle$：$\alpha \cdot a_0 + \beta \cdot a_1, \cdots\cdots, \alpha \cdot a_n + \beta \cdot a_{n+1}, \cdots\cdots$，稱為 $\langle a_n \rangle$ 的一階廣義階和數列。例：$S^{(1)}a_0 = \alpha \cdot a_0 + \beta \cdot a_1$。

註：$S^{(1)}a_n$ 的 S 代表廣義的和，即 a_n 與 a_{n+1} 各自乘上倍數 α 與 β 再相加。

2. 對於 $k\geq 2$，令 $S^{(k)}a_n=\alpha\cdot S^{(k-1)}a_n+\beta\cdot S^{(k-1)}a_{n+1}$，其中 $n=0,1,2,\cdots$，
   則所得的數列 $\left\langle S^{(k)}a_n\right\rangle$：
   $\alpha\cdot S^{(k-1)}a_0+\beta\cdot S^{(k-1)}a_1,\cdots\cdots,\alpha\cdot S^{(k-1)}a_n+\beta\cdot S^{(k-1)}a_{n+1},\cdots\cdots$，稱為 $\left\langle a_n\right\rangle$ 的 k 階廣義階和數列。

註：$S^{(k)}a_n$ 的 k，代表操作了 k 次的廣義階和。

註：對 $k=1$，可定義 $a_n=S^{(0)}a_n$，則有 $S^{(1)}a_n=\alpha\cdot a_n+\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\cdot S^{(0)}a_n+\beta\cdot S^{(0)}a_{n+1}$。

例：$S^{(2)}a_n=\alpha\cdot S^{(1)}a_n+\beta\cdot S^{(1)}a_{n+1}$

$$=\alpha\cdot(\alpha a_n+\beta a_{n+1})+\beta\cdot(\alpha a_{n+1}+\beta a_{n+2})=\alpha^2a_n+2\alpha\beta a_{n+1}+\beta^2a_{n+2}$$

$$S^{(3)}a_n=\alpha\cdot S^{(2)}a_n+\beta\cdot S^{(2)}a_{n+1}$$

$$=\alpha\cdot(\alpha^2a_n+2\alpha\beta a_{n+1}+\beta^2a_{n+2})+\beta\cdot(\alpha^2a_{n+1}+2\alpha\beta a_{n+2}+\beta^2a_{n+3})$$

$$=\alpha^3a_n+3\alpha^2\beta a_{n+1}+3\alpha\beta^2a_{n+2}+\beta^3a_{n+3}$$

註：此處列出廣義階和數列的兩種圖解方式，供讀者參考：

圖解 1：

$$\begin{array}{llllllllllll}
\left\langle a_n\right\rangle: & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & \cdots\ \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots\ \cdots\\
\left\langle S^{(1)}a_n\right\rangle: & & S^{(1)}a_0 & & S^{(1)}a_1 & & S^{(1)}a_2 & & \cdots\ \cdots & S^{(1)}a_n & & \\
\left\langle S^{(2)}a_n\right\rangle: & & & S^{(2)}a_0 & & S^{(2)}a_1 & & \cdots\ \cdots & & & & \\
\left\langle S^{(3)}a_n\right\rangle: & & & & S^{(3)}a_0 & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & &
\end{array}$$

圖解 2：

$\langle a_n \rangle$ ： a_0 a_1 a_2 a_3 $\cdots$ a_n a_{n+1} $\cdots$

$\langle S^{(1)}a_n \rangle$ ： $\alpha a_0+\beta a_1$ $\alpha a_1+\beta a_2$ $\alpha a_2+\beta a_3$ $\cdots$ $\alpha a_n+\beta a_{n+1}\cdots$

$\langle S^{(2)}a_n \rangle$ ： $\alpha^2 a_0+2\alpha\beta a_1+\beta^2 a_2$ $\alpha^2 a_1+2\alpha\beta a_2+\beta^2 a_3$ $\cdots\cdots$

$\langle S^{(3)}a_n \rangle$ ： $\alpha^3 a_0+3\alpha^2\beta a_1+3\alpha\beta^2 a_2+\beta^3 a_3$ $\cdots\cdots$

二、廣義階和數列的一般項公式：

由以上的例子觀察，可看到二項式係數的出現，進而歸納出以下的「廣義階和數列一般項公式」：

$$S^{(k)}a_n = C_0^k\alpha^k a_n + C_1^k\alpha^{k-1}\beta a_{n+1}+\cdots+C_i^k\alpha^{k-i}\beta^i a_{n+i}+\cdots+C_k^k\beta^k a_{n+k}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(C_i^k\cdot\alpha^{k-i}\beta^i\cdot a_{n+i})\text{ 。}$$

接著，來證明廣義階和數列的一般項公式：

命題： $S^{(k)}a_n=\sum_{i=0}^{k}(C_i^k\cdot\alpha^{k-i}\beta^i\cdot a_{n+i})$

證明：用數學歸納法！

當 $k=1$ 時， $S^{(1)}a_n=\alpha a_n+\beta a_{n+1}=\sum_{i=0}^{1}(C_i^1\cdot\alpha^{1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})$ ，命題成立。

假設當 $k=m$ 時命題成立，即 $S^{(m)}a_n=\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m-i}\beta^i\cdot a_{n+i})$ ，

則當 $k=m+1$ 時， $S^{(m+1)}a_n=\alpha\cdot S^{(m)}a_n+\beta\cdot S^{(m)}a_{n+1}$ (由定義)

$$=\alpha\cdot\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m-i}\beta^i\cdot a_{n+i})+\beta\cdot\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m-i}\beta^i\cdot a_{n+1+i})$$ (由歸納法假設)

$$=\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})+\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m-i}\beta^{i+1}\cdot a_{n+1+i})$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})+\sum_{i+1=1}^{m+1}(C_{(i+1)-1}^m\cdot\alpha^{m-(i+1)+1}\beta^{i+1}\cdot a_{n+(i+1)})\quad(\text{其中右項令 } i+1=j)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})+\sum_{j=1}^{m+1}(C_{j-1}^m\cdot\alpha^{m-j+1}\beta^j\cdot a_{n+j})\qquad(\text{其中右項再令 } j=i)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})+\sum_{i=1}^{m+1}(C_{i-1}^m\cdot\alpha^{m-i+1}\beta^i\cdot a_{n+i})$$

$$=C_0^m\cdot\alpha^{m+1}\beta^0\cdot a_n+\sum_{i=1}^{m}(C_i^m\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})$$

$$+\sum_{i=1}^{m}(C_{i-1}^m\cdot\alpha^{m-i+1}\beta^i\cdot a_{n+i})+C_{m+1-1}^m\cdot\alpha^{m-(m+1)+1}\beta^{m+1}\cdot a_{n+m+1}$$

$$=C_0^{m+1}\cdot\alpha^{m+1}\cdot a_n+\sum_{i=1}^{m}(C_i^m+C_{i-1}^m)\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i}+C_{m+1}^{m+1}\cdot\beta^{m+1}\cdot a_{n+m+1}$$

$$=C_0^{m+1}\cdot\alpha^{m+1}\cdot a_n+\sum_{i=1}^{m}C_i^{m+1}\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i}+C_{m+1}^{m+1}\cdot\beta^{m+1}\cdot a_{n+m+1}\quad(\text{因為 } C_i^m+C_{i-1}^m=C_i^{m+1})$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}(C_i^{m+1}\cdot\alpha^{m+1-i}\beta^i\cdot a_{n+i})$$，命題亦成立。

故由數學歸納法，所欲證之命題成立。

三、與階和、階差數列的關係：

可以看出，在 $S^{(k)}a_n=\alpha\cdot S^{(k-1)}a_n+\beta\cdot S^{(k-1)}a_{n+1}$ 中取 $\alpha=\beta=1$，且令 $S^{(0)}a_n=a_n$，可得 $S^{(k)}a_n=S^{(k-1)}a_n+S^{(k-1)}a_{n+1}$，此即為[1]中所定義的階和數列。

而在 $S^{(k)}a_n=\alpha\cdot S^{(k-1)}a_n+\beta\cdot S^{(k-1)}a_{n+1}$ 中，取 $\alpha=-1$ 與 $\beta=1$，且令 $S^{(0)}a_n=a_n$，可得 $S^{(k)}a_n=-S^{(k-1)}a_n+S^{(k-1)}a_{n+1}$，即得[2]中所定義的階差數列。

由以上討論，可說「廣義階和數列」，是階和數列與階差數列的統一推廣。

四、應用於一般的二階線性遞迴數列：

對於一般的二階線性遞迴數列 $\langle H_n \rangle$：$\begin{cases} H_0 = c, H_1 = d \\ H_{n+2} = aH_{n+1} + bH_n \end{cases}$ (參考資料[3])，

相對應的廣義階和數列，可取 $\alpha = b$ 與 $\beta = a$，與 $S^{(0)}H_n = H_n$，即有

$S^{(k)}H_n = b \cdot S^{(k-1)}H_n + a \cdot S^{(k-1)}H_{n+1}$，所得的廣義階和數列，可圖示如下：

$$
\begin{array}{llllllllll}
\langle H_n \rangle: & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & \cdots\ \cdots & H_n & H_{n+1} & \cdots \\
\langle S^{(1)}H_n \rangle: & & H_2 & H_3 & H_4 & \cdots\ \cdots & H_{n+2} & & \\
\langle S^{(2)}H_n \rangle: & & & H_4 & H_5 & \cdots\ \cdots & & & \\
\langle S^{(3)}H_n \rangle: & & & & H_6 & \cdots\ \cdots & & & \\
& & & & \ddots & & & &
\end{array}
$$

觀察： 以 $\langle H_n \rangle$ 為第 0 列，$\langle S^{(1)}H_n \rangle$ 為第 1 列。

第 k 列的最左方的項 $S^{(k)}H_0$ 恰為 H_{2k}，而向右方的各項，下標從 $2k$ 開始，逐項增加 1，因此可歸納出第 k 列第 n 項的 $S^{(k)}H_n$ 應為 H_{2k+n}。

例如：第 2 列第 0 項的 $S^{(2)}H_0$ 為 $H_4 = H_{2\times2+0}$，而第 2 列第 1 項的 $S^{(2)}H_1$ 為 $H_5 = H_{2\times2+1}$。

命題：

一般的二階線性遞迴數列 $\langle H_n \rangle$ 的各階廣義階和數列之中，第 k 列第 n 項的 $S^{(k)}H_n$ 為 H_{2k+n}，其中 $k \geq 1$，且 $n \geq 0$。

證明：對 k 用數學歸納法！

當 $k=1$ 時，第 1 列第 n 項的

$S^{(1)}H_n = b\cdot S^{(0)}H_n + a\cdot S^{(0)}H_{n+1} = b\cdot H_n + a\cdot H_{n+1} = H_{n+2} = H_{2\times 1+n}$，命題成立。

假設當 $k=m$ 時命題成立，即第 m 列第 n 項的 $S^{(m)}H_n = H_{2m+n}$，

則當 $k=m+1$ 時，$S^{(m+1)}H_n = b\cdot S^{(m)}H_n + a\cdot S^{(m)}H_{n+1}$ (由廣義階和數列的定義)

$= b\cdot H_{2m+n} + a\cdot H_{2m+n+1}$ (由歸納法假設)

$= H_{2m+n+2}$ (由遞迴數列的定義)

$= H_{2(m+1)+n}$，命題亦成立。

故由數學歸納法，可知欲證之命題成立。

接著，一方面，由廣義階和數列的一般項公式，有 $S^{(k)}H_n = \sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot b^{k-i}a^i \cdot H_{n+i})$

另一方面，由所證之命題，有 $S^{(k)}H_n = H_{2k+n}$，

所以可得 $\sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot a^i b^{k-i} \cdot H_{n+i}) = S^{(k)}H_n = H_{2k+n}$，這是一般的二階線性遞迴數列的一種二項式係數恆等式。

特別地，取 $n=0$，即得 $\sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot a^i b^{k-i} \cdot H_i) = H_{2k}$。

例：Pell 數列 $\langle p_n \rangle : \begin{cases} p_0 = 0, p_1 = 1 \\ p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n \end{cases}$ (參考資料[4])。

數列的前幾項為 0，1，2，5，12，29，70，169，408，……。

對於 Pell 數列，相對應的廣義階和數列，可取 $\alpha = b = 1$ 與 $\beta = a = 2$，得

$S^{(0)}p_n = p_n$，與 $S^{(k)}p_n = 1\cdot S^{(k-1)}p_n + 2\cdot S^{(k-1)}p_{n+1}$。

由上述的討論，可得 $p_{2k+n} = \sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot 2^i \cdot p_{n+i})$ 與 $p_{2k} = \sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot 2^i \cdot p_i)$。

參、結語：

本文的寫作契機，來自於與和平高中江前佑老師的一次討論，是否能將 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k F_{n+i}$ $= F_{2k+n}$ 這樣的恆等式，推廣到費氏數列以外的，其他的遞迴數列呢？特以此文呈現出筆者對此問題的看法。

「減 1」，可以看成「加上負 1」，從此一簡單的觀念出發，將階和與階差作了統一的推廣，得到所謂的「廣義階和數列」: $S^{(k)}a_n = \alpha \cdot S^{(k-1)}a_n + \beta \cdot S^{(k-1)}a_{n+1}$，此一結構恰呼應了一般的二階線性遞迴數列的遞迴關係式： $H_{n+2} = aH_{n+1} + bH_n$ ，由此，最後得到了恆等式： $\sum_{i=0}^{k}(C_i^k \cdot a^i b^{k-i} \cdot H_{n+i}) = H_{2k+n}$。至於三階以上的情形，或者其他的設定方式，就留待有興趣的讀者繼續探索。

對筆者而言，所謂的「推廣」，並非為推廣而推廣，而是在尋求表面上不同的事物的內在共通性之後，找出一個代表的形式，使得對各種情形可以作一致性的理解與處理。

參考資料

1. 陳建燁，費氏數列與 Padovan 數列的二項式係數恆等式:用「階和數列」的觀點，**科學教育月刊第 409 期**(2018)。
2. 陳建燁，階差數列：一般項公式與二項式係數恆等式，**高中數學學科中心電子報第 140 期**(2018)。
3. 陳建燁，一般的二階線性遞迴數列(起)，**高中數學學科中心電子報第 118 期**(2017)
4. 翁翠微，Chebyshev 和 Morgan-Voyce 多項式、Fibonacci 數、Pell 數、Lucas 數等的關係探討，**數學傳播 34 卷 4 期**(2010)，p37。

附錄：

一、階和數列

（一）定義：

1. 對於數列$\left\langle a_n \right\rangle$：$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，令$s^{(1)}a_n=a_n+a_{n+1}$，其中$n=0,1,2,\cdots$，則所得的

   數列$\left\langle s^{(1)}a_n \right\rangle$：$a_0+a_1,a_1+a_2,\cdots\cdots,a_n+a_{n+1},\cdots\cdots$，稱為$\left\langle a_n \right\rangle$的一階階和數列。

   例：$s^{(1)}a_0=a_0+a_1$

2. 對於$\left\langle s^{(k-1)}a_n \right\rangle$，令$s^{(k)}a_n=s^{(k-1)}a_n+s^{(k-1)}a_{n+1}$，其中$n=0,1,2,\cdots$，

   則所得的數列$\left\langle s^{(k)}a_n \right\rangle$：$s^{(k-1)}a_0+s^{(k-1)}a_1,\cdots\cdots,s^{(k-1)}a_n+s^{(k-1)}a_{n+1},\cdots\cdots$，

   稱為$\left\langle a_n \right\rangle$的$k$階階和數列。

（二）階和數列的一般項公式：

$$s^{(k)}a_n=\sum_{i=0}^{k}C_i^k a_{n+i}\text{ 。}$$

（三）和費氏數列有關的二項式係數恆等式：

$$\sum_{i=0}^{k}C_i^k F_{n+i}=s^{(k)}F_n=F_{2k+n}\text{ 。}$$

二、階差數列

（一）定義：

1. 對於數列$\left\langle a_n \right\rangle$：$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，令$\Delta^{(1)}a_n=a_{n+1}-a_n$，其中$n=0,1,2,\cdots$，則所得的

   數列$\left\langle \Delta^{(1)}a_n \right\rangle$：$a_1-a_0$，$a_2-a_1,\cdots\cdots,a_{n+1}-a_n,\cdots\cdots$，稱為$\left\langle a_n \right\rangle$的一階階差數列。

   例：$\Delta^{(1)}a_0=a_1-a_0$，$\Delta^{(1)}a_1=a_2-a_1$。

2. 對於$\left\langle \Delta^{(k-1)} a_n \right\rangle$，令$\Delta^{(k)} a_n = \Delta^{(k-1)} a_{n+1} - \Delta^{(k-1)} a_n$，其中$n = 0,1,2,\cdots$，

則所得的數列$\left\langle \Delta^{(k)} a_n \right\rangle$：$\Delta^{(k-1)} a_1 - \Delta^{(k-1)} a_0, \cdots\cdots, \Delta^{(k-1)} a_{n+1} - \Delta^{(k-1)} a_n, \cdots\cdots$，

稱為$\left\langle a_n \right\rangle$的$k$階階差數列。

(二)階差數列的一般項公式：

$$\Delta^{(k)} a_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k a_{n+k-i} \text{。}$$

(三)和費氏數列有關的二項式係數恆等式：

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k F_{n+k-i} = \Delta^{(k)} F_n = F_{n-k} \text{。}$$