以微積分的方法證明
任意三角形外角和為 360°

連威翔

適園有限公司

壹、前言

在數學傳播 27 卷 4 期的《以微積分的方法求四邊形面積公式》一文當中，作者透過微積分的手法，重新證明了可表示出四邊形面積的 Bretschneider 公式，其證明過程請參考[1]。根據作者在[1]中所言，其證明的想法是來自微積分基本定理，而作者計算微分時所用的參數，是四邊形的其中一個角度。

或許是受到[1]文的影響，筆者也找出了一種透過微積分手法來證明任意三角形的外角和為$360°$(從而可知任意三角形的內角和為$180°$)。不過，與[1]文不同的地方是，筆者將引入坐標與向量來進行證明，且計算微分時所用的參數是長度。底下第二節中，筆者將會介紹自己的證明過程。

貳、筆者的證明

對於任意的三角形，我們先以逆時針方向沿著三角形邊界繞一圈，繞圈的同時也為三角形的三個頂點命名為A, B, C。為三點命名後的結果，下圖的兩個三角形，顯示出其中兩種可能：

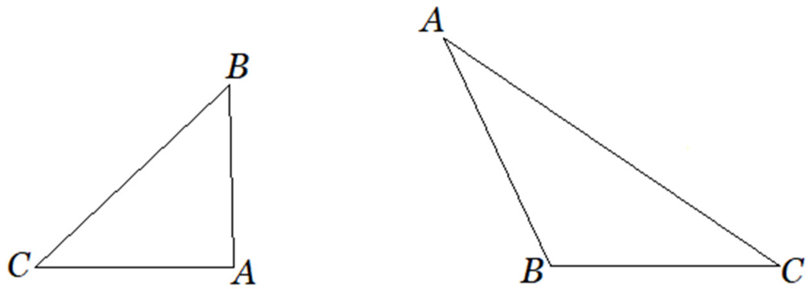

圖 1

我們以上圖中左邊的ΔABC為例，設$\angle ACB = \theta$，$\overline{AC} = a$。接著，我們以C為原點、射線 CA 的方向為x軸正向，在ΔABC所在的平面建立坐標系，則如下圖：

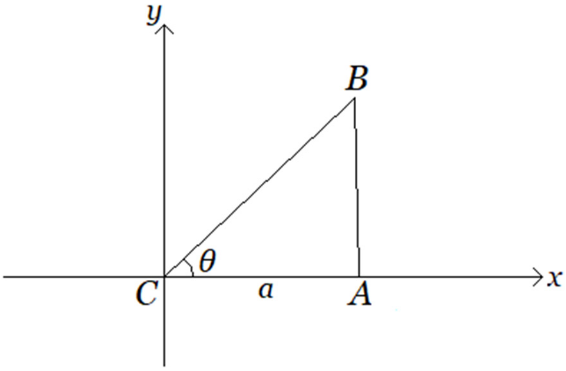

圖 2

注意點B將在x軸上方。為了研究上圖中ΔABC的外角，我們在上圖中畫出射線CB，並在該射線上取一動點P。接著，連接另一個射線PA後，則如下圖：

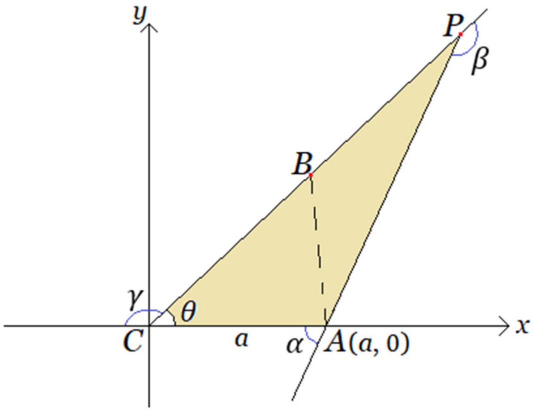

圖 3

上圖中，我們也假設了ΔAPC的三個外角為α, β, γ。

在圖 3 中，筆者想證明無論動點P的位置為何，都將滿足ΔAPC之外角和為$360°$，即證明圖 3 中有

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi \qquad \dots(1)$$

的結果。證明(1)式之後，只要取動點P的位置為圖 3 中的B點，這樣就證明了ΔABC的外角和為$360°$，從而也證出ΔABC的內角和為$180°$。

所以，接下來準備介紹的證明中，最重要的第一步將放在如何證明(1)式。筆者的證明如下：

證明：圖 3 中，假設$\overline{CP}=t$，則P點坐標可表為

$$P(t\cos\theta\,,t\sin\theta)$$

因為有$A(a,0)$，可知

$$\overrightarrow{CP}=(t\cos\theta\,,t\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{PA}=(a-t\cos\theta\,,-t\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-a,0)$$

圖 3 中，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}$ 兩向量的夾角α，我們可透過內積的定義計算$\cos\alpha$之值如下：

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-a+t\cos\theta}{\sqrt{a^2+t^2-2at\cos\theta}}\quad\ldots(2)$$

至於$\cos\beta$的計算，同理也有

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\left|\overrightarrow{PA}\right|}=\frac{a\cos\theta-t}{\sqrt{a^2+t^2-2at\cos\theta}}\quad\ldots(3)$$

因為$0<\alpha\leq\pi$，可知$\sin\alpha$非負，因此利用(2)式計算後可得

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{t\sin\theta}{\sqrt{a^2+t^2-2at\cos\theta}}\quad\ldots(4)$$

接著，因為$0<\beta<\pi$，可知$\sin\beta$為正，因此利用(3)式計算後可得

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+t^2-2at\cos\theta}}\quad\ldots(5)$$

為了底下計算的方便，我們先分別利用(2), (3)兩式求出

$$\frac{d\cos\alpha}{dt}=\frac{at\sin^2\theta}{(a^2+t^2-2at\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\quad\ldots(6)$$

$$\frac{d\cos\beta}{dt}=\frac{-a^2\sin^2\theta}{(a^2+t^2-2at\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\quad\ldots(7)$$

此時，若將(2)式的等號左端的$\cos\alpha$對t微分，利用微分連鎖規則可得

$$\frac{d\cos\alpha}{dt}=\frac{d\cos\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}=-\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

因此有

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{d\cos\alpha}{dt} \qquad \dots(8)$$

將(4), (6)兩式代入上式，可知

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-a\sin\theta}{a^2+t^2-2at\cos\theta} \qquad \dots(9)$$

另一方面，仿照(8)式的求法，將(3)式的等號左端的$\cos\beta$對t微分，利用連鎖規則處理後再移項得

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{d\cos\beta}{dt} \qquad \dots(10)$$

將(5), (7)兩式代入上式，可知

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{a\sin\theta}{a^2+t^2-2at\cos\theta} \qquad \dots(11)$$

至此，將(9), (11)兩式相加，可得

$$\frac{d(\alpha+\beta)}{dt} = 0$$

因此可知圖 3 中的$\alpha+\beta$ 之值與$\overline{CP}$ 的長度t無關，即與P的位置無關。可假設

$$\alpha+\beta = K \qquad \dots(12)$$

其中K為與t無關的待定常數。

圖 3 中，取$\overline{CP} = t = 0$時，C, P兩點重合，此時由圖 3 可知有

$$\alpha = \pi$$

$$\beta = \theta = \pi - \gamma$$

將上述α, β之值代入(12)式後，可得

$$K = \alpha+\beta = 2\pi - \gamma$$

而在將上式中的γ移項之後，即得

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$$

至此我們就證得(1)式，即圖 3 中無論P的位置為何，ΔAPC的外角和恆為$360°$。

最後，若取動點P為圖 3 中的B點的位置，即可證明了圖 3 中ΔABC的外角和為$360°$，也因此可推論出ΔABC的內角和為$180°$

參、證明之後的反思

在一個證明之中，通常會在某些假設之下進行一些推論。在第二節的證明中，讀者是否有看出筆者用上了哪些重要的假設呢？

在數學傳播 27 卷 2 期的《三角形內角和等於180°與畢氏定理》一文當中，作者在畢氏定理成立的條件下，證明了任意三角形內角和等於180°，其證明過程請參考[2]。

然而在本文第二節的最後，我們也證明了任意三角形內角和等於180°。請注意本文第二節中，當我們計算(4), (5)兩式時，用上了三角恆等式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \dots (13)$$

其中θ是廣義角，因為$0 < \theta < \pi$。關於廣義角三角函數的定義，請參考下圖：

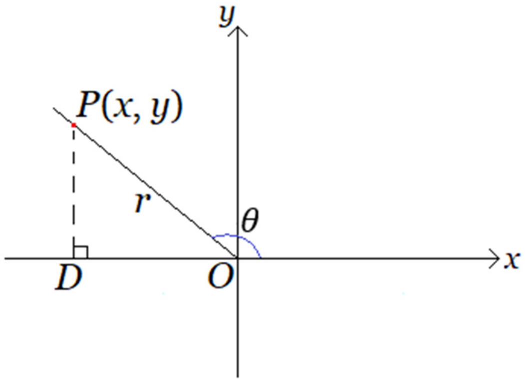

圖 4

其中設$\overline{OP} = r$。透過上圖，我們可定義底下的廣義角正、餘弦函數值：

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

圖 4 中，設D在x軸上且$\overline{PD} \perp \overline{OD}$。在畢氏定理成立的條件下，將有$\overline{PD}^2 + \overline{OD}^2 = r^2$，又因為$\overline{OD} = |x|, \overline{PD} = |y|$，因此可知

$$x^2 + y^2 = r^2$$

上式同除r^2後，即得(13)式。因此，(13)式是在畢氏定理成立之下才有的結果。

至此，若回顧第二節的證明過程，可發現當我們以廣義角三角函數中的恆等式(13)算出(4), (5)兩式的結果時，其實就已經悄悄假設畢氏定理成立。因此，就「假設畢氏定理成立」這點而言，本文第二節的證明與[2]文的證明是一樣的，即使兩個證明看起來是如此不同。

肆、結語

從參考資料[1]的有趣內容，到本文第二節所介紹的探討過程，我們可發現高等數學的基礎科目之一的微積分，也有著許多的初等應用。仍在高中階段就讀的同學們，若能好好學習微積分，相信對於日後的應用也會有許多助益。

最後，要藉此機會謝謝台大數學系王藹農退休教授與莊武諺教授熱心提供意見供筆者參考。

參考資料

張海潮(2003)：以微積分的方法求四邊形面積公式。**數學傳播季刊，27**(4)，59-63。
張海潮、王彩蓮(2003)：三角形內角和等於180°與畢氏定理。**數學傳播季刊，27**(2)，44-46。