# 圓內接多邊形頂角的合分角正弦與餘弦函數值關係方程式(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

## 壹、前言

在完整探討了圓內接多邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式後，就自然直覺想到是否還存在有另一組頂角的合分角餘弦函數值關係方程式？筆者旋即進行拓展那新一組相呼應的合分角餘弦值關係方程式的研發。請參閱下圖 1.，

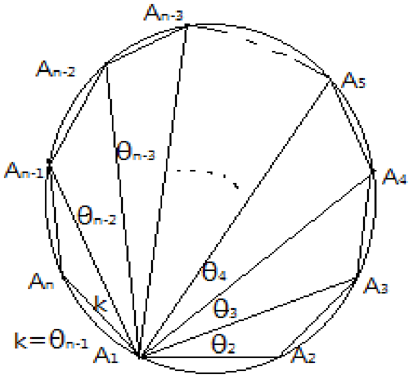


圖 1

給定一個半徑 $R$ 的圓內接 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ ，令邊長線段 $V_i=\overline{A_iA_{i+1}}$ ，$1\le i\le n$ ， $A_{n+1}=A_1$ ； $\theta_i=\angle A_iA_1A_{i+1}$ ， $2\le i\le n-1$ ；對角線長 $d_{1j}=\overline{A_1A_j}$ ，$3\le j\le n-1$ ，頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4+\ldots+\theta_{n-3}+\theta_{n-2}+\theta_{n-1}$ ，則有下列方程式；

$$\frac{\sin A_1}{V_nV_1}=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\frac{\sin\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}}+\ldots+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}\qquad\text{(L1)}$$

方程式 (L1)式稱為圓內接 $n$ 邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式。如今眾所皆知；三角形的正弦定理與餘弦定理兩者的方程式內涵是有很明顯的差異；平面凸多邊形面積的正弦式表示式與餘弦式表示式更是有極大的不同。所以，現在要透過詳盡的研究推演證明，以得證出圓內接多邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式，並施以對照比較而釐清出此兩方程式在型態結構上的區別！

在推證演繹的過程中也細膩周詳地比對圓內接四邊形、圓內接五邊形、圓內接六邊

形、…、圓內接九邊形等等圖形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式的各式內容，發現到這所有公式彼此之間都存在著共同一致規律特性;即每一公式中的各項式組合皆遵守著特定規則，而所有項式集體結合其來就形成整齊秩序排列的方程式！因此，特地再將它們彙整、歸納，進而編著成圓內接 $n$ 邊形一般化公式中各項式依序排列完整的 3 個綜合法則。遵循著這 3 法則的指引，學習者都可以精準美妙的書寫出任一個圓內接 $n$ 邊形完備特有的正確方程式！

## 貳、本文

在本文一系列敘述解說的導證過程中，將詳盡列舉、闡述出圓內接多邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式的 3 個綜合法則。當在理論驗證時必頻繁引用到方程式 (L1)式與圓內接多邊形各圓周角的正弦定理公式以及平面幾何學中慣常應用到的輔助線幾何圖形作圖法來達成推理實證的演繹工作。同時，在下列撰文推理引證的運算過程中，需應用對照到下述已知的 3 個基本數學性質；

### 一、基本數學性質—引理：

引理 1. 圓內接四邊形的托勒密公式： 圖 2. 圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，對角線

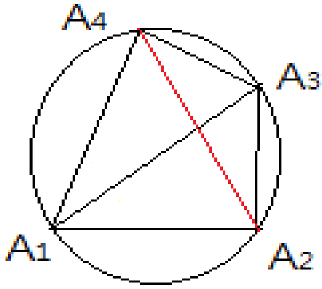


圖 2.

長 $\overline{A_1A_3} = d_{13}$ ， $\overline{A_2A_4} = d_{24}$ ，則托勒密定理為；

$$d_{24}d_{13} = V_2V_4 + V_3V_1 \quad \text{(Ptolemy theorem )} \qquad \text{(L2)}$$

證明：略。

引理 2. 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理： 圖 3.

給定半徑為 $R$ 的圓內接 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，令邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，

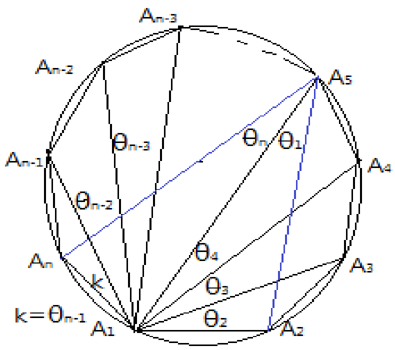


圖 3

$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，…，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，而邊長 $V_1$ 所對應的圓周角為 $\theta_1$，$V_2$ 所對應的圓周角為 $\theta_2$，$V_3$ 所對應的圓周角為 $\theta_3$，…，$V_{n-2}$ 所對應的圓周角為 $\theta_{n-2}$，$V_{n-1}$ 所對應的圓周角為 $\theta_{n-1}$，$V_n$ 所對應的圓周角為 $\theta_n$，則此多邊形各邊長所對應的圓周角的正弦定理方程式為下列 (L3)式：

$$\frac{V_1}{\sin\theta_1}=\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\cdots=\frac{V_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}=\frac{V_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R \qquad \text{(L3)}$$

證明：由等弦對應等圓周角及直角三角形的正弦值關係即可證明(略)。

引理 3. 圓內接 $n$ 邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式為前言中的 (L1)式

證明：詳見本文內文(二).之 **6**.內 6.2a).中的證明。

## 二、圓內接多邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

### (一) 歸納圓內接多邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式的綜合法則

以下就是透過比對研究歸納出的 3 個綜合法則，用來指引如何搜尋頂角的合分角餘弦值與邊長及對角線長的乘積組合，再編列出此圓內接多邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式。半徑 $R$ 的圓內接 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，請看圖 1.，承續前言所列的各邊長與對角線長度，理論上求證計算這些公式時，由圖形的一般性，直觀的選取頂點 $A_1$ 作為定點，再由此定點 $A_1$ 引出$(n-3)$段對角線長，這些對角線都集中相交在定點 $A_1$ 處而不再有其它相互的交點，定點處的頂角 $A_1$，$A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4+...+\theta_{n-3}+\theta_{n-2}+\theta_{n-1}$，故頂角 $A_1$ 是合角，而 $\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$、…、$\theta_{n-3}$、$\theta_{n-2}$、$\theta_{n-1}$ 等等各圓周角都是頂角 $A_1$ 的分角，則這被預先歸納列舉出的每一個圓內接多邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式公式的法則是；

**綜合法則[1].** 所證公式的等號左側內容是單一個分式項，由定點處的頂角 $A_1$ 合角取餘弦值形成分子，而分母則由頂角 $A_1$ 的兩側邊長長度乘積形成。所以這個單一分式項的完整內容為； $\dfrac{\cos A_1}{V_n V_1}$ 。

**綜合法則[2].** 所求公式的等號右側內容要區分成兩組相異部份；第一組內容是由$(n-2)$個不同分式項相加而成。每一個分式項都型如法則[1].的結構；是由各分角取餘弦值形成分子，而分母則由各分角的兩側邊長長度乘積形成的。然後將各分式項依序由 $\theta_{n-1}$、$\theta_{n-2}$、$\theta_{n-3}$、…、$\theta_4$、$\theta_3$、$\theta_2$ 排列相加而成，這一組的完整內容為； $\dfrac{\cos\theta_{n-1}}{V_n d_{1(n-1)}} + \dfrac{\cos\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)} d_{1(n-2)}} + \dfrac{\cos\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)} d_{1(n-3)}} + \ldots + \dfrac{\cos\theta_4}{d_{15} d_{14}} + \dfrac{\cos\theta_3}{d_{14} d_{13}} + \dfrac{\cos\theta_2}{d_{13} V_1}$。到目前為止，由觀察所述的公式內容型態是與正弦值的方程式 (L1)式相類似，但兩者最大的不同處就在於下列法則[3].的第二組法則內涵裡。

**綜合法則[3].** 所求公式的等號右側第二組內容是一非常巨大的單一個分式項；

(3-1) 請續見圖 1.，這碩大分式項的分母是由頂角 $A_1$ 的兩側邊長長度與由此定點 $A_1$ 引出的所有 $(n-3)$段對角線長其各長度的平方相乘積而得。因此，此項分母的完整內容為； $V_n V_1 {d_{13}}^2 {d_{14}}^2 {d_{15}}^2 {d_{16}}^2 \cdots {d_{1(n-4)}}^2 {d_{1(n-3)}}^2 {d_{1(n-2)}}^2 {d_{1(n-1)}}^2$ 。檢視此項分母完整乘積內容的量綱(dimension)是長度的 $(2n-4)$次方！由長度量經過冪次乘積運算而得出的因次量就稱為量綱(dimension)。再比對逐一觀察法則[1].與法則[2].的各分式項式所顯示的運算量綱是長度的負 2 次方！如此可推演出這碩大分式項分子裡的每一項其運算量綱必是長度的 $(2n-6)$次方！

(3-2) 這碩大分式項的分子部份裡其組成內容總計有下列詳盡的 4 個組合模式：

[第一組合模式]：由 $V_n V_1$ 乘積領軍，此模式下有$(n-4)$種情況組合敘述於下；

case 1.在所有 $(n-3)$段對角線長中任取 $(n-4)$段對角線長，使被選取到的每一對角線長度先各自平方後再相乘而得一乘積組合式，此情況計有 $(n-3)$項，再全部依序相加起來，得

$${d_{13}}^2 {d_{14}}^2 {d_{15}}^2 \cdots {d_{1(n-3)}}^2 {d_{1(n-2)}}^2 + {d_{14}}^2 {d_{15}}^2 {d_{16}}^2 \cdots {d_{1(n-2)}}^2 {d_{1(n-1)}}^2 +$$

$d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 + d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 + \cdots +$

$d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 +$

$d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 + \quad d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$ 。

此處，上述每一項其運算量綱都是長度的（$2n-8$)次方！

case 2.此情況由 $V_3$領軍，見圖 4.，$V_3$分別要和$V_4, V_5, V_6, \ldots, V_{n-4}, V_{n-3}, V_{n-2}$各邊

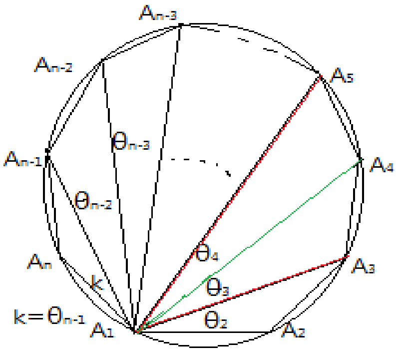


圖 4

長相乘形成$V_3V_4, V_3V_5, V_3V_6, \ldots, V_3V_{n-4}, V_3V_{n-3}, V_3V_{n-2}$的乘積，由圖 4.看到與第 1 乘積項$V_3V_4$的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是$d_{13}, d_{14}, d_{15}$，而$d_{14}$被夾在中間，$d_{14}$是屬於與$V_3, V_4$各有直接連結但重疊的對角線，此$d_{14}$必須被扣除掉，僅需保留取$d_{13}, d_{15}$的各單一值。而其餘對角線 $d_{16}, d_{17}, d_{18}, \ldots, d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}$等都和$V_3, V_4$沒有直接連結要取平方值。因此，這$V_3V_4$乘積組合的一項正確式為

$V_3V_4\, d_{13}\, d_{15} \cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2$ 。

請謹慎觀察試算這一項的運算量綱也是長度的（$2n-8$)次方！

其次要看第 2 乘積項$V_3V_5$的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是$d_{13}, d_{14}, d_{15}$, $d_{16}$，見下圖 5，這 4 段對角線完全沒有重疊都須被單獨取到，而其餘對角線$d_{17}$, $d_{18}, \ldots, d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}$等都和$V_3, V_5$沒有直接連結要取平方值。因此，這$V_3V_5$乘積組合的一項其正確式為 $V_3V_5\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{16} \cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2$ 。

再詳予觀察這一項的運算量綱也是長度的（$2n-8$)次方！

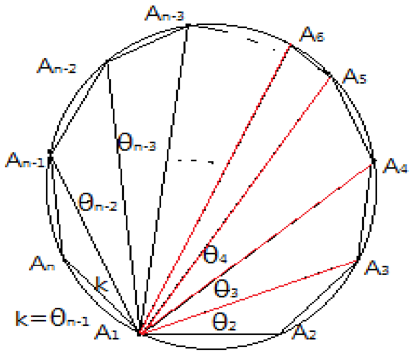


圖 5

再繼續看第 3 乘積項 $V_3V_6$ 的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是 $d_{13}, d_{14}$, $d_{16}, d_{17}$，見下圖 6，這 4 段對角線完全沒有重疊都須被單獨取到，而其餘對角線 $d_{18}, d_{19}, \ldots, d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}, d_{15}$,等都和 $V_3, V_5$ 沒有直接連結要取平方值。這 $V_3V_6$ 組合的一項其正確式為 $V_3V_6\, d_{13}\, d_{14}\, d_{16}d_{17} \cdot d_{18}{}^2 d_{19}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2$ 。

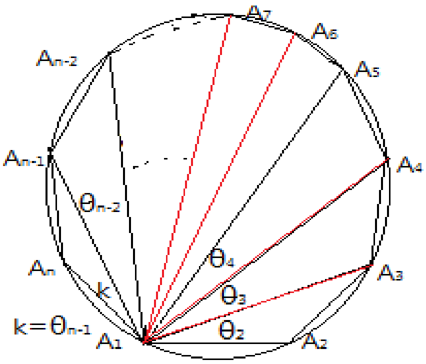


圖 6

持續仿效上述歸納思考理念，續得第 4 乘積項 $V_3V_7$ 的正確乘積組合式為
$V_3V_7\, d_{13}\, d_{14}\, d_{17}d_{18} \cdot d_{19}{}^2 d_{1(10)}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2$ 。

… … … …

延續這樣的歸納整理，直到尋獲第$(n-6)$乘積項 $V_3V_{n-3}$ 的正確乘積組合式為

$$V_3V_{n-3}\, d_{13}\, d_{14}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 \quad 。$$

鍥而不捨，最後再尋獲第$(n-5)$乘積項 $V_3V_{n-2}$ 的正確乘積組合式為

$$V_3V_{n-2}\, d_{13}\, d_{14}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \quad 。$$

此處由 $V_3$ 領軍的情況總計有$(n-5)$乘積項，再按順序將其全部相加起來，得
$V_3V_4\, d_{13}\, d_{15} \cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 +$

$V_3V_5\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15}\ d_{16}\cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2+$
$V_3V_6\ d_{13}\ d_{14}\ d_{16}d_{17}\cdot d_{18}{}^2 d_{19}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2+$
$V_3V_7\ d_{13}\ d_{14}\ d_{17}d_{18}\cdot d_{19}{}^2 d_{1(10)}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2+\cdots+$
$V_3V_{n-3}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}\cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2\cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2+$
$V_3V_{n-2}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2\cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$ 。

case 3.此情況由 $V_4$ 領軍，見圖 7.，$V_4$ 分別要和 $V_5, V_6, V_7, \ldots, V_{n-4}, V_{n-3}, V_{n-2}$ 各邊長相乘形成 $V_4V_5, V_4V_6, \ldots, V_4V_{n-4}, V_4V_{n-3}, V_4V_{n-2}$ 的乘積，由圖 7.看到與第 1 乘積項 $V_4V_5$ 的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是 $d_{14}, d_{15}, d_{16}$，而 $d_{15}$ 被夾在中間，$d_{15}$ 是屬於與 $V_4, V_5$ 各有直接連結但重疊的對角線，此 $d_{15}$ 必須被扣除掉。而其餘對角線 $d_{13}, d_{17}, d_{18}, \ldots, d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}$ 等都和 $V_4, V_5$ 沒有直接連結要取平方值。因此，這 $V_4V_5$ 乘積組合的一項正確式為 $V_4V_5\ d_{14}\ d_{16}\cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2$ 。量綱也是長度的 $(2n-8)$ 次方！

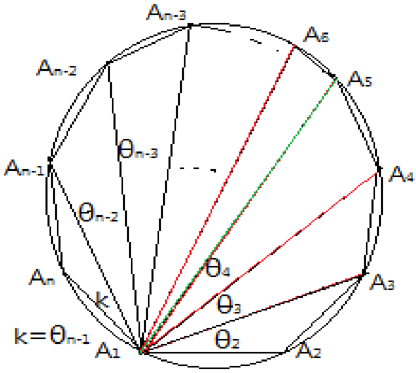


圖 7.

同理，繼續仿效 case 2.的歸納思緒做法，得 $V_4V_6$ 乘積組合的一項正確式為

$V_4V_6\ d_{14}\ d_{15}\ d_{16}d_{17}\cdot d_{18}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2$ 。量綱也是長度的 $(2n-8)$ 次方！

再得 $V_4V_7$ 乘積組合的正確式為 $V_4V_7\ d_{14}\ d_{15}\ d_{17}d_{18}\cdot d_{19}{}^2\cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2$ 。量綱也是長度的 $(2n-8)$ 次方！

… … … …

延續這樣的歸納整理，直到尋獲第 $(n-7)$ 乘積項 $V_4V_{n-3}$ 的正確乘積組合式為

$V_4V_{n-3}\ d_{14}\ d_{15}\ d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}\cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2\cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2$ 。

秉著鍥而不捨，最後再尋獲第 $(n-6)$ 乘積項 $V_4V_{n-2}$ 的正確乘積組合式為

$V_4V_{n-2}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$ 。

此處由 $V_4$ 領軍的情況總計有上述的 $(n-6)$乘積項，再依序全部相加起來，得

$$V_4V_5\, d_{14}\, d_{16}\cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 + V_4V_6\, d_{14}\, d_{15}\, d_{16}d_{17}\cdot d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 +$$
$$V_4V_7\, d_{14}\, d_{15}\, d_{17}d_{18}\cdot d_{19}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 + \cdots \cdots +$$
$$V_4V_{n-3}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}\cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 +$$
$$V_4V_{n-2}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$$

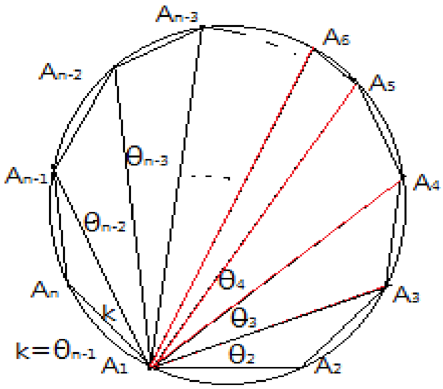


圖 8.

case 4. 此情況由 $V_5$ 領軍，$V_5$ 分別要和 $V_6, V_7, V_8, \ldots, V_{n-4}, V_{n-3}, V_{n-2}$ 各邊長相乘形成 $V_5V_6$, $V_5V_7, \ldots, V_5V_{n-4}, V_5V_{n-3}, V_5V_{n-2}$ 的乘積，仿效上述完整的歸納思路過程，再整理出由 $V_5$ 領軍的情況總計有下述的 $(n-7)$乘積項，再依順序全部相加起來，得

$$V_5V_6\, d_{15}\, d_{17}\cdot d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 +$$
$$V_5V_7\, d_{15}\, d_{16}d_{17}d_{18}\cdot d_{19}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 +$$
$$V_5V_8\, d_{15}\, d_{16}d_{18}d_{19}\cdot d_{1(10)}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{17}{}^2 + \cdots \cdots +$$
$$V_5V_{n-3}\, d_{15}\, d_{16}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}\cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 +$$
$$V_5V_{n-2}\, d_{15}\, d_{16}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$$

case 5. 由 $V_6$ 領軍的情況總計有下述的 $(n-8)$乘積項，依序全部相加起來，得

$$V_6V_7\, d_{16}\, d_{18}\cdot d_{19}{}^2 d_{1(10)}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 +$$
$$V_6V_8\, d_{16}d_{17}d_{18}d_{19}\cdot d_{1(10)}{}^2 d_{1(11)}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 +$$
$$V_6V_9\, d_{16}d_{17}d_{19}d_{1(10)}\cdot d_{1(11)}{}^2 d_{1(12)}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{18}{}^2 + \cdots \cdots +$$
$$V_6V_{n-3}\, d_{16}\, d_{17}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}\cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 +$$
$$V_6V_{n-2}\, d_{16}\, d_{17}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$$

case 6. … … … … 持續上述相同的歸納操作程序，… … … … ….

⋮

⋮

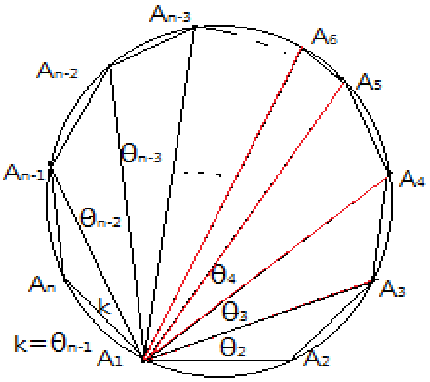


圖 9

case ($n-6$).由 $V_{n-5}$ 領軍的情況總計有下述的 3 乘積項，依序相加起來，得

$$V_{n-5}V_{n-4}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-3)} \cdot d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 +$$

$$V_{n-5}V_{n-3}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 +$$

$$V_{n-5}V_{n-2}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$$

case ($n-5$).由 $V_{n-4}$ 領軍的情況總計有下述的 2 乘積項，依序相加起來，得

$$V_{n-4}V_{n-3}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 +$$

$$V_{n-4}V_{n-2}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2$$

case ($n-4$).由 $V_{n-3}$ 領軍的情況總計只有 1 乘積項，它的正確乘積組合式為

$$V_{n-3}V_{n-2}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2$$

綜上所述就是 [第一組合模式] 下的所有($n-4$)種情況組合局部內容。這個組合模式內總計出現的項式有； 1+2+3+…+( $n-8$ )+( $n-7$ )+( $n-6$ )+( $n-5$ )+( $n-3$ ) = $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-(n-4)$ 項。所有這些項式要依序全部相加起來，然後將相加的總和再乘上此組合模式的領軍項 $V_nV_1$ 就得到[第一組合模式]中的完整項式內涵。此處，也能檢視出這組合模式裡的每一項量綱都是長度的 ($2n-6$)次方！

[第二組合模式]：由 $V_nV_2$ 乘積領軍，此模式下有$(n-4)$項式組合，敘述於下；

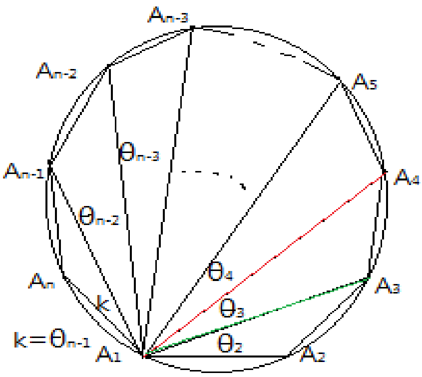


圖 10

見圖 10.，此 $V_nV_2$ 乘積分別要和 $V_3$，$V_4$，$V_5$，$V_6$，…，$V_{n-4}$，$V_{n-3}$，$V_{n-2}$ 各邊長相乘形成 $V_nV_2V_3, V_nV_2V_4, V_nV_2V_5, V_nV_2V_6$，…，$V_nV_2V_{n-4}, V_nV_2V_{n-3}, V_nV_2V_{n-2}$ 的乘積，第 1 乘積項 $V_nV_2V_3$ 裡 $V_2$ 與 $V_3$ 的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是 $d_{13}, d_{14}$，而 $d_{13}$ 是屬於與 $V_2, V_3$ 各有直接連結但重疊的對角線，此 $d_{13}$ 必須被扣除掉，僅保留取 $d_{14}$ 的單一值。而其餘對角線 $d_{15}, d_{16}, d_{17}, d_{18}, \ldots, d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}$ 等都和 $V_2, V_3$ 沒有直接連結要取平方值。

因此，歸納搜尋出這 $V_nV_2V_3$ 乘積組合的一項正確式為

$$V_nV_2V_3\ d_{14}\cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2$$ 。

仔細觀察這一項的運算量綱也是長度的 $(2n-6)$ 次方！

同理，第 2 乘積項 $V_nV_2V_4$ 仿效前述取值的歸納策略，可得出正確乘積組合式為

$$V_nV_2V_4\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15}\cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2$$ 。

同理，再得第 3 乘積項 $V_nV_2V_5$ 的正確乘積組合式為

$$V_nV_2V_5\ d_{13}\ d_{15} d_{16}\cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{14}{}^2$$ 。

… … … …

同理，再得第($n-5$)乘積項$V_nV_2V_{n-3}$的正確乘積組合式為

$$V_nV_2V_{n-3}\,d_{13}\,d_{1(n-3)}\,d_{1(n-2)}\cdot d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2\cdots d_{1(n-5)}{}^2d_{1(n-4)}{}^2d_{1(n-1)}{}^2 \quad 。$$

同理，最後再得第($n-4$)乘積項$V_nV_2V_{n-2}$的正確乘積組合式為

$$V_nV_2V_{n-2}\,d_{1(n-2)}\,d_{1(n-1)}\,d_{13}\cdot d_{14}{}^2d_{15}{}^2d_{16}{}^2d_{17}{}^2d_{18}{}^2\cdots d_{1(n-5)}{}^2d_{1(n-4)}{}^2d_{1(n-3)}{}^2 \quad 。$$

以上敘述就是 [第二組合模式] 下的所有($n-4$)個項式完整組合內容。這個組合模式內總計出現的項式有 ($n-4$)項。所有這些項式要依序全部相加起來，就得到這[第二組合模式]中的完整項式內涵。此處，也能檢視出這組合模式裡的每一項量綱都是長度的($2n-6$)次方！

[第三組合模式]：由 $V_1V_{n-1}$乘積領軍，此模式下有($n-4$)項式組合，敘述於下；

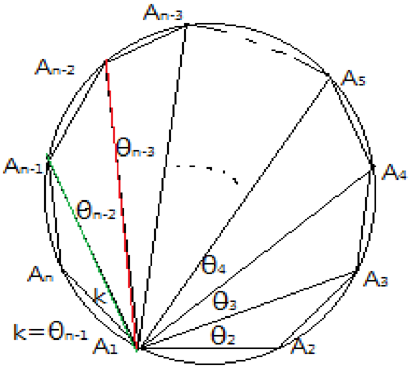


圖 11

見圖 11.，此$V_1V_{n-1}$乘積分別要和$V_{n-2}, V_{n-3}, V_{n-4}$, … ,$V_6, V_5, V_4, V_3$ 各邊長相乘形成$V_1V_{n-1}V_{n-2}, V_1V_{n-1}V_{n-3}, V_1V_{n-1}V_{n-4}$, … ,$V_1V_{n-1}V_6, V_1V_{n-1}V_5, V_1V_{n-1}V_4, V_1V_{n-1}V_3$的乘積，第 1 乘積項$V_1V_{n-1}V_{n-2}$裡$V_{n-1}$與$V_{n-2}$的兩邊長在圖形上有直接連結的對角線長是$d_{1(n-1)}, d_{1(n-2)}$，而$d_{1(n-1)}$是屬於與$V_{n-1}, V_{n-2}$各有直接連結但重疊的對角線，此$d_{1(n-1)}$必須被扣除掉，僅取$d_{1(n-2)}$的值。而其餘對角線 $d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16}, \ldots, d_{1(n-5)}, d_{1(n-4)}, d_{1(n-3)}$等都和$V_{n-1}, V_{n-2}$沒有直接連結要取平方值。因此，這$V_1V_{n-1}V_{n-2}$乘積組合的一項為

$V_1V_{n-1}V_{n-2}\ d_{1(n-2)}\cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2$ 。

仔細觀察這一項的運算量綱也是長度的 $(2n-6)$次方！

同理，第 2 乘積項 $V_1V_{n-1}V_{n-3}$ 仿效前述取值的歸納策略，可得出正確乘積組合式為

$V_1V_{n-1}V_{n-3}\ d_{1(n-3)}\ d_{1(n-2)}\ d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2$ 。

同理，再得第 3 乘積項 $V_1V_{n-1}V_{n-4}$ 的正確乘積組合式為

$V_1V_{n-1}V_{n-4}\ d_{1(n-4)}\ d_{1(n-3)}\ d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2\cdot d_{1(n-2)}{}^2$ 。

… … … …

同理，再得第$(n-5)$乘積項 $V_1V_{n-1}V_4$ 的正確乘積組合式為

$V_1V_{n-1}V_4\ d_{14}\ d_{15}\ d_{1(n-1)}\cdot d_{13}{}^2\cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2$ 。

同理，最後再得第$(n-4)$乘積項 $V_1V_{n-1}V_3$ 的正確乘積組合式為

$V_1V_{n-1}V_3\ d_{1(n-1)}\ d_{13}\ d_{14}\cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2$ 。

以上敘述就是 [第三組合模式] 下的所有$(n-4)$個項式完整組合內容。這個組合模式內總計出現的項式有 $(n-4)$項。所有這些項式要依序全部相加起來，就得到這[第三組合模式]中的完整項式內涵。此處，也能檢視出這組合模式裡的每一項量綱都是長度的$(2n-6)$次方！

[第四組合模式]：由 $V_2V_{n-1}$ 乘積引領的單一項，見圖 12.，與 $V_{n-1}, V_2$ 各有直接連結的對角

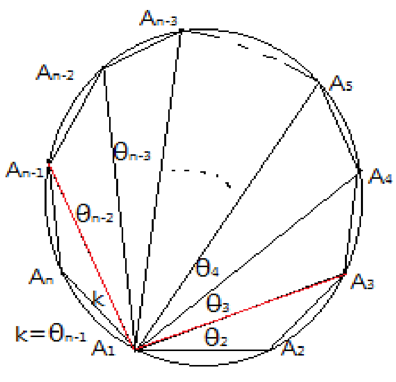


圖 12

線為 $d_{1(n-1)}$ 與 $d_{13}$，兩者都不重疊，都各取單一值。而其餘對角線 $d_{14}, d_{15}, d_{16}, \dots, d_{1(n-4)}$，$d_{1(n-3)}, d_{1(n-2)}$ 等都和 $V_{n-1}, V_2$ 沒有直接連結要取平方值。因此，這 $V_2V_{n-1}$ 乘積組合的唯一項完整正確式為

$$V_2V_{n-1}\, d_{1(n-1)}\, d_{13} \cdot d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 \quad 。$$

仔細觀察這一項的運算量綱也是長度的（$2n-6$)次方！

敘述到目前為止，4 個組合模式的所有個別項式都被歸類搜尋完成。這 4 個組合模式裡的乘積組合總項式數目為 $[\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-(n-4)]+(n-4)+(n-4)+1 = \frac{n}{2}(n-3) = \frac{n}{2}(n-1)-n = C_2^n - C_1^n$ 項，且在此處任何單一項的運算量綱都是長度的（$2n-6$)次方！

這 $C_2^n - C_1^n$ 項數的各項式要依順序排列成串，再全數相加起來才能構成巨大分式項的分子部份所擁有的完整項式。

現在，就將上述**綜合法則[1]. [2]. [3].**指示的規則下所尋獲的各項式依順序排列，編輯整合成： **法則[1]**的項 ＝ **法則[2]**的總項式 減去 **法則[3]**的巨大分式項式，如此即尋得完整精確的圓內接 $n$ 邊形頂角的合分角餘弦值關係方式 $(n \geq 5)$！

$$\frac{\cos A_1}{V_nV_1} = \frac{\cos\theta_{n-1}}{V_n d_{1(n-1)}} + \frac{\cos\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}} + \frac{\cos\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}} + \ \dots \ + \frac{\cos\theta_4}{d_{15}d_{14}} + \frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} -$$

$$[V_nV_1 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2]^{-1} \times \{ V_nV_1 \cdot [($$

$$d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 + d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 +$$

$$d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 + d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 + \cdots +$$

$$d_{1(n-3)}{}^2 d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 + d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 +$$

$$d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \ ) + (V_3V_4\, d_{13}\, d_{15} \cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 +$$

$$V_3V_5\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{16} \cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 +$$

$V_3V_6\, d_{13}\, d_{14}\, d_{16}d_{17} \cdot d_{18}{}^2 d_{19}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 +$

$V_3V_7\, d_{13}\, d_{14}\, d_{17}d_{18} \cdot d_{19}{}^2 d_{1(10)}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 + \cdots \cdots +$

$V_3V_{n-3}\, d_{13}\, d_{14}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 +$

$V_3V_{n-2}\, d_{13}\, d_{14}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \;) + ($

$V_4V_5\, d_{14}\, d_{16} \cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 + V_4V_6\, d_{14}\, d_{15}\, d_{16}d_{17} \cdot d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 +$

$V_4V_7\, d_{14}\, d_{15}\, d_{17}d_{18} \cdot d_{19}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 \; + \cdots \cdots +$

$V_4V_{n-3}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-3)}d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 \; +$

$V_4V_{n-2}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 \cdots d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \;) +$

$\cdots \cdots \cdots + (V_{n-5}V_{n-4}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-3)} \cdot d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 +$

$V_{n-5}V_{n-3}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 +$

$V_{n-5}V_{n-2}\, d_{1(n-5)}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \;) + ($

$V_{n-4}V_{n-3}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{1(n-1)}{}^2 d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 +$

$V_{n-4}V_{n-2}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 \;) + ($

$V_{n-3}V_{n-2}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-8)}{}^2 d_{1(n-7)}{}^2 d_{1(n-6)}{}^2 d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 \;)] \;\; + [$

$V_nV_2V_3\, d_{14} \cdot d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 + V_nV_2V_4\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15} \cdot d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2$

$+ V_nV_2V_5\, d_{13}\, d_{15}d_{16} \cdot d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-2)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 d_{14}{}^2 + \cdots \cdots \cdots +$

$V_nV_2V_{n-3}\, d_{13}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-1)}{}^2 +$

$V_nV_2V_{n-2}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)}\, d_{13} \cdot d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 d_{17}{}^2 d_{18}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \;] +$

$[\;\; V_1V_{n-1}V_{n-2}\, d_{1(n-2)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 d_{16}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 d_{1(n-3)}{}^2 \; +$

$V_1V_{n-1}V_{n-3}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-2)}\, d_{1(n-1)} \cdot d_{13}{}^2 d_{14}{}^2 d_{15}{}^2 \cdots d_{1(n-5)}{}^2 d_{1(n-4)}{}^2 \; +$

$$V_1V_{n-1}V_{n-4}\, d_{1(n-4)}\, d_{1(n-3)}\, d_{1(n-1)} \cdot {d_{13}}^2 {d_{14}}^2 {d_{15}}^2 \cdots {d_{1(n-5)}}^2 \cdot {d_{1(n-2)}}^2 \ + \cdots \cdots \cdots +$$

$$V_1V_{n-1}V_4\, d_{14}\, d_{15}\, d_{1(n-1)} \cdot {d_{13}}^2 \cdot {d_{16}}^2 {d_{17}}^2 {d_{18}}^2 \cdots {d_{1(n-4)}}^2 {d_{1(n-3)}}^2 {d_{1(n-2)}}^2 \ +$$

$$V_1V_{n-1}V_3\, d_{1(n-1)}\, d_{13}\, d_{14} \cdot {d_{15}}^2 {d_{16}}^2 {d_{17}}^2 {d_{18}}^2 \cdots {d_{1(n-4)}}^2 {d_{1(n-3)}}^2 {d_{1(n-2)}}^2 \ ] +$$

$$V_2V_{n-1}\, d_{1(n-1)}\, d_{13} \cdot {d_{14}}^2 {d_{15}}^2 {d_{16}}^2 {d_{17}}^2 {d_{18}}^2 \cdots {d_{1(n-4)}}^2 {d_{1(n-3)}}^2 {d_{1(n-2)}}^2 \ \} \qquad (1)$$

方程式 (1)式就是歸納出的圓內接 $n$ 邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

這頂角的合分角餘弦值方程式(1)式等號右側的總項式數目為 $(n-2)+\frac{n}{2}(n-3) = \frac{1}{2}(n^2-n-4) = \frac{n}{2}(n-1)-2 = C_2^n - 2$ 項數。此處 (1)式裡的 $n$ 需要 $n \geq 5$ 。

## (二) 展示歸納的圓內接多邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式與驗證

**1.** 首先證明：圓內接四邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

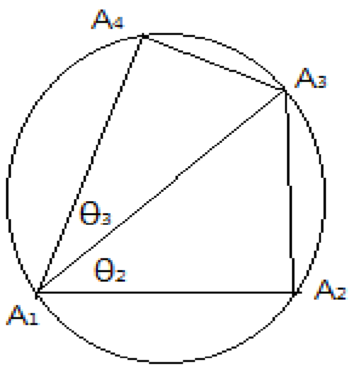


圖 13

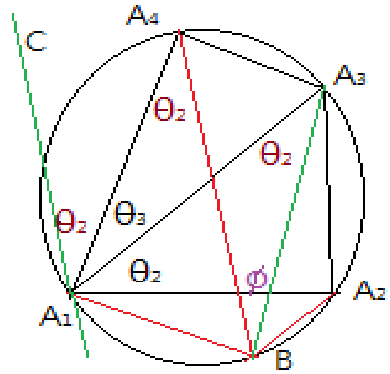


圖 14

見圖 13.，半徑為 $R$ 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，對角線 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，$\theta_3$ 是弧長 $A_3A_4$ 的圓周角，$\theta_2$ 是弧長 $A_2A_3$ 的圓周角，而 $\theta_3$ 與 $\theta_2$ 則是頂角 $A_1$ 的分角。

[1.1]. 作幾何輔助線圖：

(a) 請看圖 14. 通過頂點 $A_2$ 作一直線平行對角線 $\overline{A_1A_3}$ 且與圓周交於 B 點，

(b) 連接線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{BA_4}$、$\overline{BA_3}$，得一新構的四邊形 $A_1BA_2A_3$，檢視這圖形的幾何

意義，得知其恰為一個等腰梯形，因此又得 $\overline{A_1B}=\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_1A_2}=V_1=\overline{BA_3}$，

(c) 見圖 14.，再通過頂點 $A_1$ 作一直線 $A_1C$ 平行線段 $\overline{BA_4}$ 。再參閱下圖 15.，

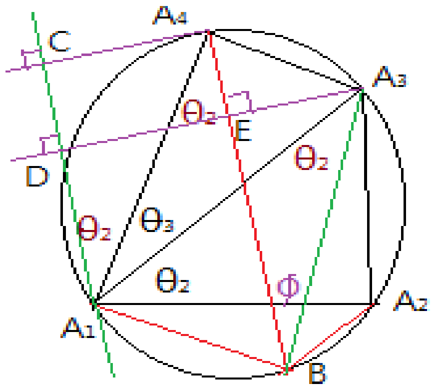


圖 15

(d) 通過頂點 $A_3$ 作一直線 $A_3D$ 垂直於直線 $A_1C$，使相交於垂直點 D，且 $A_3D$ 又與 $BA_4$ 垂直相交於 E 點。另通過頂點 $A_4$ 作一直線 $A_4C$ 垂直於直線 $A_1C$，使相交於垂直點 C，所有相對應的圓周角皆標示在圖中的正確適當位置。輔助線作圖完成。

[1.2]. 圖 15. 輔助線圖形的餘弦式幾何意義：

(a) 下圖 15.，就直角三角形 $\Delta A_1A_3D$ 言，斜邊長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，得一股線段長

$$\overline{A_1D}=\overline{A_1A_3}\cos(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\cos(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\cos A_1 \text{ 。}$$

(b) 就直角 $\Delta A_1A_4C$ 言，斜邊長 $V_4$，線段長 $\overline{A_1C}=V_4\cos\theta_2$ 。

(c) 就直角 $\Delta BA_3E$ 言，斜邊長 $\overline{BA_3}=V_1$，線段長 $\overline{BE}=V_1\cos\phi=V_1\cos\theta_3$ 。

(d) 線段長 $\overline{CD}=\overline{A_4E}=\overline{A_4B}-\overline{BE}$，由線段長 $\overline{A_1D}=\overline{A_1C}-\overline{CD}=\overline{A_1C}+\overline{BE}-\overline{A_4B}$ ，

參閱圖 15.，圓內接四邊形 $A_1BA_3A_4$ 的邊長與對角線中有引理 1.的托勒密公式：

$$\overline{BA_4}\cdot\overline{A_1A_3}=\overline{A_1B}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{BA_3}\cdot\overline{A_4A_1} \quad\Rightarrow\quad \overline{BA_4}\cdot d_{13}=V_2\cdot V_3+V_1\cdot V_4 \quad\Rightarrow$$

$\overline{BA_4} = \dfrac{V_4V_1 + V_2V_3}{d_{13}}$　，將此 $\overline{BA_4}$ 長度代入線段長 $\overline{A_1D}$ 的線段關係式中， $\Rightarrow$

由 $\overline{A_1D} = \overline{A_1C} + \overline{BE} - \overline{A_4B} \;\Rightarrow\; d_{13}\cos A_1 = V_1\cos\theta_3 + V_4\cos\theta_2 - \dfrac{V_4V_1 + V_2V_3}{d_{13}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos A_1}{V_4V_1} = \frac{\cos\theta_3}{V_4d_{13}} + \frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1} - \frac{V_4V_1 + V_2V_3}{V_4V_1{d_{13}}^2} \qquad (2)$$

方程式 (2)式就是被證明出的圓內接四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

而 (2)式的特別處是各餘弦項的分母皆為該角度兩側的邊長乘積，整體各項內容裡的角度、邊長、對角線長都是有規則性分佈的！

【待續】