數學系學生無窮小概念研究

詹勳國 [1*] 顏翠琳 [2]

[1] 國立屏東大學 應用數學系

[2] 私立及人小學

摘 要

本研究參考 2010 年的一篇論文〈大學生非標準無窮概念，譯自 Nonstandard Student Conceptions About infinitesimals〉，修改該研究的問卷題目作為研究工具，測驗了某大學數學系一、二年級學生，收集 79 份有效問卷，並選取 6 位進行半結構訪談。訪談後依個案問卷表現、訪談內容、以及研究札記進行分析。研究發現：雖然已經學過微積分的無窮小觀念，但是大部分學生仍然以類似萊布尼茲對無窮小的想法填答，無窮小迷思普遍存在，仍然使用直觀想法說明無窮小概念，靠直觀學習可能是助力也可能是阻力。雖然學生高中時都學過 $0.\overline{9}=1$，但是大部分學生都認為它們不相同，仍然使用直觀回答問題。體會「認知衝突」並有動機澄清它是學習抽象概念的重要過程。學生的迷思有：「存在無窮大與無窮小數字」、「存在二個無窮接近的數字」、「無窮小平方後便更小」、「無窮大與無窮小可以被計算」。學生可以分類成「自明」、「衝突自清」、「衝突它清」、「衝突未清」、「未明未清」五類。最後，建議大學數學系老師能反思這個結果，教學中適當的讓學生產生認知衝突，再利用學生「自清」與「它清」，增加成功學習機會。

關鍵詞：大學數學系學生、無窮小、非標準無窮小

壹、緒論

國內外大學理工學院學生都要修習微積分，數學系微積分課程內容分成「概念性知識」與「程序性知識」，比較非數學系微積分課程，數學系課程特別強調「概念性知識」。學習遇到第一個困難概念是無窮小概念，微分就建構在無窮小比率的的極限（ε-δ），這跟過去學生學習的教材全然不同。然而什麼是「無窮小」，從牛頓與萊布尼茲開始使用微積分做為工具後，數學家仍花了數百年才全然了解。因此，探索與討論數學系大學生對於「無窮小」（infinitesimal）相關概念與發展有其意義與重要性。

美國《數學教育研究期刊，譯自 Journal for Research in Mathematics

* 為本文通訊作者

Education》是國際有關數學教育最有影響力的期刊之一，2010 年刊載一篇研究〈大學生非標準無窮概念，譯自 Nonstandard Student Conceptions About infinitesimals，縮寫 NSCI〉，內容深刻探討美國修習微積分課程大學生對於「無窮小」相關概念的研究，Ely（2010）教授使用個案研究法，先以問卷測驗 233 位修習過微積分的大學生，從中選取 6 名學生進行深度訪談，收集大學生的想法，主要問題環繞數線上無窮小、無窮量與距離的相關概念，再和萊布尼茲、與羅賓森（Robinson）的非標準無窮小概念做比較。

該研究發現受訪學生普遍上存在「無窮小」迷思概念，「幾乎」可以自行一格的解釋數線的「無窮小」，並努力以直觀思維符合數學邏輯的產生無窮小概念，最後探討學生思維和早期數學家的思維間的關係。巧合的是，早期數學家也有類似目前被研究大學生的非標準無窮小概念的掙扎。研究發現大學生的無窮小概念和正確的概念差距頗大，若是僅僅將它視為迷思概念或錯誤的概念，而想盡辦法補救修改，那麼就會失去一個重要的反思機會，學校老師應當重新審視「大學生如何學習」，並進而進而精進教學。

「如何學抽象概念？」，依照「皮亞傑」的理論（張春興、1991），達到認知歷程平衡的兒童接收的訊息與其既有的基模不協調，會導致認知衝突「失衡」，接著會自發驅策自己藉由同化來重建平衡，進而調適賦予個體具有更高的適應性（抽象概念），研究者相信自我澄清「認知衝突」是學習抽象概念的重要方式。數學資優或天才有許多特徵與分辨的方法，研究者從 Cox（1926）的個案中，整理一個由自發的三階段內在程序來判斷，分別是「自問」、「自解」、「自明」，個體不假他人影響可以獨立思考完成這個過程被視為數學資優。透過「認知衝突」與「自明」這二個面向，本研究嘗試除了了解大學生無窮小概念研究，還進一步分類抽象學習五個群組：

「自明」族：學到這段就能思考正確的意義。

「衝突自清」族：認知到觀念錯誤，然後藉由自己釐清到可以思考正確意義。

「衝突它清」族：認知到觀念錯誤，然後藉由任何『教學』方式到可以思考正確意義。

「衝突未清」族：認知到觀念錯誤，無法釐清正確意義。

「未明未清」族：一直保有不正確直觀，未認知與未有動機思考到觀念錯誤。

了解無窮小概念與大學生數學思維這個議題的重要性，與受到 NSCI 此篇論文的啟發，我們選擇收集與分析數學系一、二年級學生無窮小相關概念，先對數學系學生進行普測，得到基本架構與數據，再從中選取重要個案進行訪談，分析相關概念的前因後果，再以迷思概念理論分析建立理論。研究目的如下：

一、探討數學系學生對於數學「無窮概念」為何。

二、比較數學系學生與萊布尼茲對於「無

窮」直觀的差異。

三、探討數學系學生對於「無窮多」、「實數的性質」、「無窮小數」及「無窮處理的性質」的數學直覺。

四、數學系學生抽象學習「自明」、「衝突自清」、「衝突它清」、「衝突未清」、「未明未清」五群組的分類。

貳、文獻探討

人類從許多具體的例子中，將「共通性」抽象出來，經過命名得到「一階概念」，例如，從眾多可以「坐」的實物中，抽象出「椅子」概念。接著，從許多「一階概念」中，將「共通性」抽象出來，經過命名得到「二階概念」，例如，從桌子、椅子…等概念中形成「家具」概念（陳澤民，1997）。數學概念的形成也是如此，從許多【&&&】、【***】…的集合經驗中，將共通的「量」概念抽象出，再符號化與命名「3」代表集合之中隱藏的數字概念，依此類推形成自然數概念，接著類似過程發展整數概念與有理數概念，再經過一階階抽象的程序，進而形成複雜且困難的數學概念。

將共通性抽象出來的一個機制之一是「直觀」，通過「直觀」的引導，可以察覺到某種一致性或相關性的關聯，進而構成數學上新的概念。國民中小學九年一貫課程綱要之數學學習領域的基本理念（教育部，2008）指出：「學習數學時，一般重視的是觀念和演算，但學生的數學經驗（或數學感覺）的培養卻是同等重要的，利用學生的前置經驗（或感覺），這種數學的經驗（或感覺）就是數學的直覺或直觀」。

但是直觀可能伴隨「迷思概念」，意指模糊的、不完全的、重複的錯誤的理解某件事所產生的概念，陳玉玲(2000)綜合許多學者看法，將迷思概念的形成因素歸納為：「認知發展層次、學校教學、個人直觀及日常用語、社會情境」，學生在認知發展的迷思概念，可能受到學校教師、長輩、同儕影響、個人直觀，或甚至是教科書及參考書等影響。如此一來，迷思概念主要是由學習者本身與教育及環境相互影響造成而產生。鍾聖校（1994）歸納迷思概念具有的以下特質：過程性、不完備性、非正統性、思考性、個別性、普遍性、不穩定性、頑固性。許多研究發現學生抽象概念學得不好，通常是因為學生自己建構出來的迷思概念難以改變所導致（邱美虹，1993；Carey, 1985；Hewson, 1981）。有些學生學習前就已經擁有許多先入為主的觀念，甚至抗拒新的或正確的概念。

無論國內外，讓學生擁有正確的「數線」概念都是數學教育追求的目標之一，從 12 國教課程設計與各式各樣的教科書也可以得到充分的佐證，實數的集合剛好與數線上所有的點對應，有各式各樣的分類，例如：自然數、全數、整數、分數、小數、無理數...等，這些數都可以在數線上找到對應的位置。但是「無窮小」呢？

一、「標準無窮小概念」：

數線上「無窮小」與「無窮大」並不是一個實數，而是一個概念，因此不能進

行一般的四則運算。但是導數（微分）是「無窮小比率的的極限」,數學的發展逼迫數學家要找出「無窮小」的正確定義，使得可以進行合理合法的運算，數學基本要求「嚴謹」與「一致性」。因此,「無窮小」就是「你要多小，我都可以安排多小」，進而至「比任何一個正實數都小」，例如：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

意義是對於任何正實數 ε「要多小」,都可以安排對應實數 M ，使得對所有 $x>M$，$|\frac{1}{x}|<\varepsilon$「有多小」,因此極限為 0°

「無窮大」就是「你要多大，我都可以安排多大」,進而至「比任何一個自然數都大」。0....1 中的第 1 個點是小數點，接著「...」符號容易誤導思考，它代表依此類推，無窮無盡延伸，它讓人產生不正確的直覺，進而有不適當的演算。高中所有學生都學過 $1=0.\overline{9}$ 證明,然而當下學生是否進行有意義的學習（making sense）？之後留存的概念是如何？本研究的問卷問題與訪談問題將圍繞這個概念出發。

二、「非標準無窮小概念」

（一）為了使用「導數」,萊布尼茲於 1684 年發展一套計算無窮小的代數法則，他認為有無窮多個無窮小，有無窮多個無窮大，無窮多個無窮小對應到無窮大倒數的實數倍（Ely，2010），當時有一些數學家提出質疑，但萊布尼茲無法回答，類似雖然不懂自行車原理,但是仍有效率的騎乘它。萊布尼茲定義詳細的計算規則，例如:無窮小乘有限數字等於無窮小，有限數字除以無窮大等於無窮小，有限數字加無窮小等於有限數字，（有限數字 1+無窮小）除以（有限數字 2+無窮小）大約等於（有限數字 1〕/除〔有限數字 2）。

布尼茲認為無窮理論將會引入一個理想的數或是可以用來解釋說明的數，其中包含無窮大和無窮小數，但之後並沒能有系統、合理的發展「理想數」。萊布尼茲引入無窮小量來做思考及計算工具，知道無窮小有雙重性格，既是可以小到為 0，但又不是 0，無法明確定義出這概念（Ely，2010）。一百多年後數學家才正確的釐清概念，無窮大與無窮小是概念不是實數，無法像一般數字運算，必須透過極限與收斂概念運作（Kline，2004）。

（二）1960 年 Robinson 為了解釋萊布尼茲的「無窮小」而發展新理論，這個系統稱為「非標準分析學」(Non-Standard Analysis),稱作「非標準」因為「不是數學系統認可的」、「不真實存在實數線上」、「是理想元素或虛構物」、…無論如何不切實際，但卻符合一般人直觀，足以解釋萊布尼茲對於「無窮小」觀點。更重要的是提供一個「幾乎」符合數學邏輯一致性的完備分析系統，可以

操作、公式化、論證、與特徵化致微分一階後都正確的分析論證。

Robinson 創立一個新名詞「超實數」（Hyper Real Number），包含一般實數和「無窮小」，而「無窮小」的定義基本上和萊布尼茲一樣，正是無窮小比任何實數都小的數，但比 0 大；同理，負無窮小是比所有負實數都大的數，但比 0 小。「Robinson 運用無窮小概念，足以說明兩超實數無窮接近的意思，亦即兩者的差是無窮小，超實數可以計算，就像普通實數一樣」，目的是為了建立一套嚴謹滿足數學規範使用無窮小分析理論。趙學信與翁秉仁於 2004 年翻譯的〈數學：確定性的失落，譯自 Mathematics: the loss of certainty〉的第 9 章、第 353 頁與 357 頁有詳細的說明。

非標準分析學不是主流的數學，只有少數的數學家加入，可以直接的應用是提供一個接近一般人直覺的系統，使得容易說明部分的微積分理論（Henle& Kleinberg, 1979; Keisler, 1986, 2007），以及在機率論得到新的理論（Albeverio, Fenstad, Hoegh-Krohn, & Lindstrom, 1986）。然而，大部分「菁英」數學家帶著奇異的眼光，看待這個非標準無窮小概念，甚至冷嘲熱諷它，提出一個自由心證的「問題」：「為何讓學生學一個符合他們直觀但錯誤的觀念？」，「有正確、標準、有系統的可以學，為何要遷就「直覺」而學非標準的概念」，因此「教育理念」存在著極大的爭議。雖然如此，因為非常高比例的學生都使用「非標準」概念回答，所以深入探討學生的思考歷程與產品有教學與教育的重要意義。

Ely（2010）提供有利的證據，顯示學生自然生成的迷思概念和萊布尼茲一開始對「無窮小」發展思考非常相似，即使經過學習，學生仍帶著非標準無窮小概念回答問題，若是僅僅視學生想法「不正確」就太可惜，應該更深入了解人類是如何學習，如何形成概念，若是輕忽這部分，高等教育不會持續進步。結果建議教學時可以介紹萊布尼茲對於無窮小概念非標準的思考，讓學生理解重要的數學家有有類似的掙扎，學生或許可以從中學習到更多。

參、研究設計與方法

本研究目的是了解數學系學生無窮小相關概念並建立理論。研究順序先量後質，以無窮概念問卷普測，接著選取訪談對象，再進行個案訪談資料蒐集，最後以紮根理論做為基礎聚焦結論，屬於質性研究方法，在明確目標下，著重資料分析與建立理論。Strauss（1987）與 Strauss & Corbin（1990）完備此理論，補充了質性研究過去只偏重經驗的傳授與技巧的訓練，並提供了一套明確有系統的策略。紮根理論被認為是質化方法中最科學的一種之一，遵循科學原則、假設驗證、比較原則及理論建立（Hammersley，1989）。因此，研究者將蒐集的資料統計、整理且綜合分析，藉由明確、有系統及具有科學嚴謹的程序技術，藉由晤談瞭解想法。換言之，先讓研究對象回答設計好的問卷，開始思考受訪者無

窮小概念是什麼，再根據研究對象在問卷的表現加以進行後續晤談分析。藉由資料蒐集並從中發展理論概念引導成為理論化（theorizing），理論化的工作，所涵蓋的不只是構想（conceiving）或直覺的（intuiting）想法，同時更將概念型塑成（formulating）邏輯的、系統性的、和解釋性的架構（Strauss & Corbin，2001）。

本研究對某大學數學系一、二年級，進行無窮概念問卷測驗。測驗時間於上學期期末，一年級學生微積分進度已經學完微分，二年級學生正在修習高等微積分。分析整理問卷後選取學生接受訪談。晤談內容、題目、難度與問卷相似，採用半結構晤談方式，每次晤談時間約 20 到 30 分鐘。

參考 NSCI 論文內容製作「數學無窮概念問卷作為研究工具，問題如下：

一、請在（ ）內填寫◯或 X。

（ ）實數線上，是否可以找到彼此碰觸的不同兩點？

（ ）實數線上，是否可以找到無限接近的不同兩點？

（ ）$0.\overline{9}$ 是否等於 1？

（ ）是否在 $0.\overline{9}$ 與 1 之間存在任何有理數？

（ ）是否 $0.\overline{3}$ 等於 $\frac{1}{3}$？

二、請用敘述方式寫下你的答案或想法。

（一）是否可以比較 0.000…1 與 0.000…01 大小？（其中…表示有無窮多個 0）

（二）$\dfrac{1}{0.000\cdots1}$ 將會得到什麼？（其中…表示為無窮多個 0）

（三）如果妳把 0.000…1 平方將會得到什麼？（其中…表示為無窮多個 0）

（四）是否能提供一個例子，兩個不同點是無限接近彼此但不接觸？

本研究以微積分成績將學生分為高中低三個部分，每一組取 2 位晤談 1 位女生與 5 位男生。晤談結束後將錄音所獲得的資料轉譯成逐字稿再對資料分析的編碼工作，每份晤談個案的逐字稿將依序註明：標題（研究對象的標號）、晤談時間等。

從訪談者身上所得到的資料，不見得是全然正確，本研究建構信度的原則使用三角檢正、參與者檢核、同儕審視、敦實敘寫、與外部查核五種（潘慧玲，2003），去檢視每一筆所蒐集到的資料，不會讓資料的真偽影響到真正判讀的結果，然後透過邏輯性的辯證，去找尋背後的真相，而不至於產生錯誤的結果。效度方面採用效度即語言／文本、與效度即標準（潘慧玲，2003）來要求自己，不要被自己所預設的立場所限制，接納與合理分析每一個得到的回答。

本研究晤談者同時是微積分數學解題助教，每周二個晚上 7-9 點接受學生詢問，學生可以在微積分自修室做作業，有問題隨時向助教求助，學生熟悉晤談者，因此

本研究可以清楚掌握學生思考精準聚焦研究內容。

肆、結果分析與討論

一、基本資料與是非題分析

本研究回收有效「數學無窮」概念問卷 79 份，包括男生 60 名與女生 19 名，以及一年級 41 位與二年級 38 位，透過基本的統計分析可知男生與女生、一二年級、微積分成績高中低與數學無窮概念沒有顯著差異。有關是非題的結果如表 1。

有三位受測者全部答對，他們學這內容時，是有意義的學習，屬於「自明」族群。其他學生最好在某個時機告訴他們的無窮概念存在迷思，需要再釐清，一個方法是產生「認知衝突」，讓學生重新思考。第一題答對率 82%，第二題 87%答錯，造成第一題的答對率高與第二題的迷思可能來自二個直觀，小學一開始學生學習「0 至 9」，接下來發展正整數，這帶來數字「離散」的概念與直觀。之後，加上分數與小數概念發展，二數相加除二，任何 2 點都存在中間點，直觀上可以取無窮多次的中間點，最後就得到無限接近的不同兩點，而這就是非標準想法，之後晤談與紙筆收集資料都有呼應。美國的受測者也有 83%的學生有類似的非標準想法，這和萊布尼茲的想法一致，雖然兩邊受測學生都學過微積分，但是多數學生對於數學無窮概念仍然是模糊不清，靠直觀學習可能是助力也可能是阻力。透過紮根理論分析聚焦這向度理論，同時再根據研究對象問卷的表現，加以進行後續晤談分析，藉由資料蒐集並從中發展理論概念，加入鍾聖校（1994）討論迷思概念特質分析，引導成為理論。

是非題 3-5 題檢驗的數學概念是相似的，學生回答結果呈現一致，大約一半的學生答對，雖然高中都學過 $0.\overline{9}=1$ 代數證明，但是一半的學生直觀上卻認為 0.999... 差「非常小一點點」到 1，因此永遠不會「收斂」到 1，因此不會相等，而這之間存在許多數字。

另外一個「衝突」是他們理解 $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$，等式二邊乘 3 就是 $0.\overline{9}=1$，即使知道這事實，部分受測者仍認為這之間存在許多有理數。其實，晤談時有一位學生提到這個關係。

表 1、是非題答題統計

	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題
正確答案	非	非	是	非	是
答對率	75/79=82%	10/79=13%	33/79=42%	39/79=49%	45/79=57%

二、簡答題

（一）是否可以比較 0.000…1 與 0.000…01 大小？採開放式回答，學生有多元的想法：

表 2、比較 0.000...1 與 0.000...01 大小回答表

答一	實數線上永遠可以找到一個比自己小或大的數
答二	或許可以比，或許不可以
答三	如果符號「…」是相同多，那就是 0.000…01 較大
答四	0.000…01 小於 0.000…1，因為多了一個 0
答五	若相差一個位數則為數較多者較小
答六	0.000…01 =（0.000…1）$\times\frac{1}{10}$
答七	前者比後者大 10 倍，因此可以做比較
答八	$10^{-n}>10^{-(n+1)}$，且 $n\in N$
答九	和比較 ∞ 與 $\infty+1$ 似乎同義，所以可以比較這兩數的大小

這題答案是無法比較，符號 0.000…01 並不是正確數學符號，依照直觀使用數學表達組合成的符號，類似是非題的題幹敘述，而所有填答者與受訪者一眼就認定 0.000…01 是什麼，無人質疑此符號。甚至答六紙筆寫下 0.000…01 =（0.000…1）$\times\frac{1}{10}$。答一與答二不明確，沒有切入問題，屬發散性思考，答三至答八使用有限數字運算原則，嘗試在自己有意義的微域範圍回答，類似萊布尼茲的思考，印證鍾聖校（1994）歸納的過程性、不完備性與非正統性特質，答九進一步以無窮與有限結合角度，回答部分論述正確但是歸納結論有誤。換句話說學生歸納過程中模擬兩可，似是而非，有時部分使用正式數學語言符號，又不完全完整論述，穿插著直觀的概念，屬於典型的迷思概念思考。

（二）是否能提供一個例子，兩個不同點是無限接近彼此但不接觸？學生有多元的想法：

表 3、無限接近問題回答表

答一	$\lim_{x\to 0^-} x$ 與 $\lim_{x\to 0^+} x$ 是無限接近 0，但彼此不接觸
答二	10^{-n} 與 10^{-n+1}，且 $n\to\infty$
答三	0.999999...與 1
答四	n 與 $n-\lim_{x\to\infty}(0.1)^n$
答五	一直線上任意兩點 a、b，使兩點無限接近
答六	$\lim_{x\to 1} 1-x$ 與 0

答七	任意找到兩點無限接近的點 a 、b ，兩點距離為 ε （ $\varepsilon \to 0$ ），則 a 、 b 之間必定存在一點 c ，使得 $c = \dfrac{a+b}{2}$
答八	a 與 $a \pm 10^{-n}$，$a \in R$，且 $n \to \infty$
答九	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ，且-1< x <1
答十	漸近線上的點

所有答案都使用略微高階與正式的數學符號或語言，可以看到數學教科書與教學的影響，部分符合邏輯精神，部分為非形式推理與論證，嘗試像正是數學般的回答，所有的內容都圍繞著「極限」觀念。從這二題多元的解題表現來看，學生自主的連結他們「內在」有意義的學習內容，嘗試「同化」「調適」一套對他們有意義的微小知識領域，並帶有一點點片段邏輯意義，我們聚焦學生會形成一個可以控制的知識微域，在其中他們會進行模仿數學書本般的嚴謹意義邏輯解釋，類似邱美虹（1993）等學者所提自己建構迷思概念，有時會堅持自己想法抗拒正確的概念。

三、訪談資料討論

6 位學生，其中為 1 位女生和 5 位男生接受訪談，為了適合閱讀，先整理部分結果成表 4，最後再聚焦分析統整所有的學生表現。

表 4、晤談紀錄統整表

	志雄	怡君	冠廷	建華	柏翰	家豪
微積分成績	高	高	中	中	低	低
相信 $0.\overline{9} \neq 1$	○	X	○	○	○	X
存在無窮大與無窮小數字	○	○	○	○	○	○
存在二個無窮接近的數字	○	○	○	○	○	○
無窮小平方後便更小	○	○	○	○	○	○
無窮大與無窮小可以被計算	○	○	○	○	○	○

以下列出重要研究札記與訪談紀錄：

大二的志雄已經修習過微積分及高等微積分，志雄描述這兩個數字（0.999999…與 1）是否等於時，表現出不大確定的疑惑，並且說明這只是他自己的想法。

晤談者：你能舉一個例子說明兩不同點是無限接近彼此，但不接觸嗎？

志　雄：兩個不同的點…嗯…[在紙上畫出一數線，點出兩點 n 、$n+\varepsilon$，且 $\varepsilon \to 0$]。

晤談者：所以你認為這兩點是無限接近，但不接觸的？

志　雄：嗯…對呀，當 $\varepsilon \to 0$ 的時候。

晤談者：那麼你能解釋「兩點無窮接近彼此」的意思嗎？

志　雄：意思嗎⋯？就是將這兩個點相減，是一個非常小的距離，所以並不會彼此碰觸。

晤談者：好的。你認為這不同兩點並不接觸，那麼這兩點之間是否能再找到其他的數？

志　雄：可以，而且會有許多有理數⋯。

晤談者：所以你能容易找到另一個點，是比原本更接近這兩點的嗎？

志　雄：可以呀，⋯一定能在這兩點之間找到一個平均值。

晤談者：可以把它寫下來嗎？嗯⋯你會如何表示？

志　雄：[在兩點之間畫出距離，並寫下 $n+\dfrac{\varepsilon}{2}$]。

晤談者：那你會如何解釋這個[在紙上指 $n+\dfrac{\varepsilon}{2}$]，若當 $n=1$、2、3、4、5⋯？

志　雄：嗯？⋯就像是在這兩點間距離存在許多無限小的數。

晤談者：許多無限小的數？

志　雄：嗯。

晤談者：$0.\overline{9}$ 是否等於 1？

志　雄：不會⋯，因為 0.999999⋯只是非常接近 1，但並不會等於 1。

志　雄：嗯⋯作比較大小嗎？⋯當然是 1 呀，1 會大於 0.999999⋯。

志　雄：[在紙上寫下 0.000000⋯1]，重覆無限個 0，就是一個無限小的數。

志　雄：嗯，或者用這樣表示⋯[寫下 $\lim\limits_{n\to\infty}(0.1)^n$]。

志　雄：因為我不知道兩數存在幾個無窮多的「⋯」，但如果「⋯」相同的話，我想是可以作計算的。

志雄視「⋯」為某種數學符號，嘗試深究它的定義，企圖操作它，並未成功說服自己。

怡君是二年級學生，紙筆問卷怡君認為 $0.\overline{9}\neq 1$，她在問卷上的空白處寫下說明：「0.000⋯1 與 0.000⋯2 是極接近的兩點，但中間依然會有其它點，所以不接觸」。

晤談者：妳能舉出一個例子說明兩不同點是無限接近彼此，但不接觸嗎？

怡　君：嗯⋯[拿起一本書]，就像是兩頁距離的空間，雖然看起來是無限接近，但是其實並不會接觸。

晤談者：妳的意思是指這兩頁之間還會存在有「空間」嗎？

怡　君：對，一定會有。在這空間裡會有很多無限個點。

晤談者：就妳說的這空間而言，妳是可以容易再找到一點，能比原本這兩點更接近彼此的嗎？

怡　君：那個⋯我想一下。⋯可以取兩點間的一半。

晤談者：所以妳認為是可以找到更接近的點的？

怡　君：對，…不過這兩個點已經很小了，所以再往下找可能不是很容易，這空間的距離會變得很小很小。

怡　君：因為如同我剛剛提到的 $\frac{1}{3}$ 會等於 0.333…，所以如果現在左邊有 3 個 $\frac{1}{3}$，那右邊就會呈現 0.999999…，所以 0.999999…會等於 1。

晤談時怡君認為 $0.\overline{9}=1$，並證明這兩數相等，她說：「高中時老師好像就有說明過這是相同的，但是還是不確定。填完問卷後，回去翻課本，發現 $0.\overline{9}=1$」，研究者認為經過認知衝突，怡君自己修正了回答問卷的迷思概念，屬於「衝突自清」族群。

晤談中，一年級學生冠廷為了說明將直尺精準分成三段時，他寫下一個以十進制延伸擴展的符號：0.333333…，而不寫 $\frac{1}{3}$。

晤談者：你能舉一個例子說明兩不同點是無限接近，但不接觸嗎？

冠　廷：[在紙上寫下 0.000000…1 與 0.000000…2]。

晤談者：所以你認為這兩數會無限接近嗎？

冠　廷：嗯[點頭]。

晤談者：那你可以在這兩數之間找到比原本更加接近的數嗎？

冠　廷：可以，因為在這兩數之間[指 0.000000…1、0.000000…2]還會有很多更小的數…。

晤談者：你的意思是這兩數之間還會存在許多更小的數嗎？

冠　廷：嗯，對。

晤談者：好的。那麼你認為 0.1 與 0.2 這兩個數是否為無限接近？

冠　廷：不是。

晤談者：你覺得怎樣才算是無限接近？

冠　廷：…你是說怎麼表示嗎？

冠　廷：就像這兩個[在紙上指出 0.000000…1 與 0.000000…2]數字…。

冠　廷：$0.\overline{9}$ 與 1 之間的差，會是一個很小的數。

冠　廷：嗯，1 會比 $0.\overline{9}$ 大。

晤談者：現在請你對這個數[在紙上指出 0.000000…1]平方，將會得到什麼？

冠　廷：[在紙上寫下 0.000000000000…1]，變成這個更小的數。

晤談者：會等於 0 嗎？

冠　廷：不會[搖頭]。

晤談者：那也可以將相同這個數[指 0.000000…1]作倒數嗎？

冠　廷：那就會變成很大的數…，就是 1 的後面有很多個 0。

明顯的感受冠廷擔心他的答案並不正確，信心不足。

0.000000…1 作倒數將會得到什麼？

一年級建華的紙筆測驗問卷回答：「當 0.1 作倒數時，可以得到 10；當 0.01 作倒數時，可以得到 100；當 0.001 作倒數時，可以得到數字 1000；…如此類推下去，因此 0.000000…1 作倒數時，則可以得到一個無窮大的數，是無限接近∞ 」。

晤談者：你能舉一個例子說明兩不同點是無限接近，但不接觸嗎？

建　華：嗯…無限接近嗎？像是生物上有一個「莫耳（mole）」的單位 6×10^{-23}[誤]，已經是相當的小了。假如有 1 莫耳、2 莫耳，就變成 6×10^{-23} 跟 1.2×10^{-22}，這兩個點就非常接近了，但也只能用數字來表示…，像是直尺無法表現出比單位「毫」以下更小的數字…。

晤談者：所以你覺得你說的這個「1 莫耳與 2 莫耳」之間會是非常接近，但不接觸的嗎？

建　華：嗯，對。而且這之間還會有更小的數字存在。

晤談者：那你覺得可以在這之間找到比原本更加接近的兩點嗎？

建　華：就…將它相加除以 2 取中間點，一直往下找到更小的均值數。

晤談者：可以一直往下找嗎？

建　華：嗯，會變成很小很小的數。

晤談者：你是說會有許多個很小的數？

建　華：對。

晤談者：你認為 0.1 與 0.2 是否為無限接近？

建　華：不算無限接近吧，就只是相差 0.1 的距離。

晤談者：你覺得怎樣才會是無限接近？

建　華：看單位吧，像是 0.1 公分和 0.2 公分之間就差 0.1 公分；或是 0.1 毫米和 0.2 毫米之間距離只差 0.1 毫米。

晤談者：你的意思是，這兩個數若單位越小，則之間的距離就會「無限接近」嗎？

建　華：嗯，對。

建　華：$0.\overline{9}$ 會很接近 1，但並不會等於。

建　華：兩數會相差 0.000000…1。

建　華：可以，1 會比較大。

建　華：$0.\overline{9}$ 與 1 之間會有許多數。因為兩數之間會有一個很小的距離。

晤談者：好。那麼你認為這兩數 0.999999…循環與兩數差 0.000000…1 可以做加減計算嗎？

建　華：可以…，可以。

晤談者：就像普通數一樣計數嗎？

建　華：嗯…循環小數的好像沒辦法…。

晤談者：你是怎麼想的？

建　華：嗯…不知道…我不太確定了，呵。

晤談者：現在請你將這個數[在紙上寫下 0.000000…1]平方，會得到什麼？

建　華：就是如果像在 $(0.1)^2$ 等於 0.01；$(0.01)^2$ 等於 0.0001…。所以這個數應該會非常的接近 0。

晤談者：非常接近 0，而不等於 0 嗎？

建　華：對，比 0 這個數還要大一些些。

晤談者：那也可以將這個數[指 0.000000⋯1]作倒數嗎？

建　華：倒數⋯[在紙上寫下 $\frac{1}{0.000000\cdots1}$，及 $10^{-\frac{n}{2}}$，且 $n \to \infty$]。

晤談者：那將會變成什麼？

建　華：就是無窮小數反過來變成無窮大的數字了。

晤談者：好。[在紙上寫下 0.000000⋯1 與 0.000000⋯01]，其中「⋯」為無窮多個 0，你能比較出這兩個數的大小嗎？

建　華：可以。我覺得這個比較大[指 0.000000⋯01]。

晤談者：為什麼？

建　華：如果這個「⋯」為相同無窮多個，0.000000 ⋯ 01 這個數會比 0.000000⋯1 多一個數字，也會比較大一些。但是如果「⋯」代表無窮意思，也就是說，不知道其中會有幾個 0，那應該就不行做比較。

晤談者：你的意思是說，在有明確說出「⋯」的個數時，就能夠做比較？

建　華：對，因為⋯不知道有幾個 0，就無法做比較。

建華的思緒活潑聯想到莫耳非常小量的表示法，連結 $10^{-\frac{n}{2}}$，$n \to \infty$ 微積分的符號，以及探討「⋯」真實的意義，越來越接近合理且正確的方向。

一年級學生柏翰在紙筆測驗問卷中填寫，是使用十進制的延伸數字 0.000⋯1 與 0.000⋯01 來說明兩個無限接近彼此的數：

晤談者：你認為無窮是什麼？

柏　翰：無窮⋯就是⋯沒有辦法用一個數字表達出來。

柏　翰：嗯⋯如果是在每一段都是一樣大小切成三段的話，那每一段就會是 $\frac{1}{3}$。

晤談者：那就如同你說的無法精準分成三段的話，那又應該如何表示？

S：就可能每段會是 0.333333⋯。

晤談者：你能舉出一個例子說明兩不同點是無限接近，但不接觸嗎？

柏　翰：嗯⋯，就 0.000⋯1 和 0.000⋯2。

柏　翰：我覺得既然⋯因為是無窮，那無窮不是應該就是可以一直延伸、一直往下寫，所以可能會有很多組這樣數字，但都只差一個位數或更小的差距，⋯就是無限接近。

晤談者：OK。那麼就像你舉的這個例子來說，可以在找到比原本兩點更加接近的數嗎？

柏　翰：嗯，可以。介於這兩個數之間應

該還會有非常多個數吧。

晤談者：那現在這個例子 0.001 與 0.002 算不算是無限接近？

柏　翰：我覺得不算。

晤談者：那應該如何表示才算是無限接近？

柏　翰：我想一下喔…。我不知道該怎麼表達無限接近的數…，覺得如果可以直接表達出來的任意兩個數，好像都並不會是無限接近。

柏　翰：因為印象中，在高中好像是說 $0.\overline{9}$ 會等於 1…。

晤談者：那就你自己的直觀也是這樣認同嗎？

柏　翰：呵，還是會認為有一個很小的差距。感覺我說的好矛盾…。

晤談者：不會的，因為主要是想探討存在你的數學直觀，但也希望藉由這次晤談，你可以從中學習關於無窮，得到更多知識。

晤談者：那你認為兩個無窮小數可以做計算加減或比較大小嗎？

柏　翰：可以吧，可以比較大小但很難計算就是了。

晤談者：現在請你對這個數[在紙上寫出 0.000000…1]平方，將會得到什麼？

柏　翰：如果這小數點後面有 10 位數的話，那麼這數平方就變成小數點後面有一百位數。

晤談者：所以在這個數[指出 0.000000…1]，也是相同可以做平方處理嗎？

柏　翰：嗯，就變成一個很小的數…無窮小那樣吧。

晤談者：那相同的你也能將這個數作倒數嗎？

柏　翰：可以，就變成無窮大的數。

柏翰回答中顯示出部份正確的概念，例如「無窮…就是…沒有辦法用一個數字表達出來」,「可以直接表達出來的任意兩個數，好像都並不會是無限接近」，卻又無法歸納出正確的結論，柏翰建構出自己的迷思概念，雖然遇到認知衝突，卻無法釐清概念，仍然持有迷思，這符合邱美虹（1993）等學者所提的理論，也印證鍾聖校（1994）歸納的迷思個別性與頑固性。

正在修習微積分的一年級學生家豪在問卷中寫下：「0.000…1 與 $(0.000\cdots1)^2$ 是可以無限接近卻不接觸兩個數」。

晤談者：那現在有一支沒有刻度的直尺，你能說明或表示一支直尺精準被分為三段嗎？

家　豪：不行。呵。

晤談者：為什麼？

家　豪：因為每一段被分成 $\frac{1}{3}$，就會等於 0.333333…無窮多個 3 循環下去，但無法精準的切分為三段。嗯…，應該吧？

晤談者：你能提供一個例子說明兩不同點是無限接近，但不接觸嗎？

家　豪：不行…。

晤談者：嗯…。不過你在紙筆測驗問卷中，是認為可以找到這樣的例子的？

家　豪：嗯，對。後來有去搜尋答案。所以我覺得…應該是不行。

家豪晤談過後額外補充:「紙筆測驗問卷填寫後，有去找微積分教授問其正解為何」。家豪晤談中回答與問卷並不一致，因為經過與老師討論後修正自己的概念，雖然理解 $0.\overline{9}=1$，屬於「衝突它清」族群。

大多數學生都使用十進制延伸回答問題，例如：世雄、怡君、家豪、冠廷及柏翰認為一支直尺被分為精準三段時，會產生 0.333333…無窮循環 3 的問題，並不以分數三分之一說明。6 位學生的紙筆測驗問卷，皆認為可以提供兩個數彼此不碰觸而無限接近例子，以上二個觀察反應鍾聖校（1994）歸納的迷思概念思考性與普遍性，例如：世雄在數線上點出兩點 n、$n+\varepsilon$，且 $\varepsilon \to 0$、怡君使用書本兩頁的距離空間、建華用 6×10^{-23} 跟 1.2×10^{-22} 來說明無限接近的存在、冠廷及柏翰則是使用兩個十進制延伸數 0.000000…1 與 0.000000…2 表示。

無窮是一個概念，而不是一個數，討論兩個無窮小量的計算時，世雄與建華相同表示應考慮中間數字省略（0.000000…1，其中的「…」）的為數是否相同，若為相同則能做計算處理，這具有迷思概念過程性、不完備性與非正統性，而柏翰認為可以計算但卻較難處理，並不直接面對問題。

無窮倒數及平方的問題，學生們都認為可以計算無窮小數的平方或倒數，例如：將 0.000000…1 平方，世雄認為可以得到一個非常接近 0 的數，但並不為 0。冠廷說明結果將會變成一個很小的數，以及柏翰指出應該是一個很小的差距。相反的，如果將 0.000000…1 倒數，世雄、建華、冠廷及柏翰都說明將會產生很大的數，即是無窮大。這些學生的觀念都非常類似萊布尼茲一開始提出的概念，符合邱美虹（1993）等學者所提出的學習者會因為要說服自己而產生個別有意義的解釋，進一步結合所學略成熟與僵固的建構成迷思概念，研究結果支持迷思概念主要是由學習者本身與教育及環境相互影響造成而產生，同時呼應 Ely（2010）的研究結果，「直觀」扮演基模的功能，既是學習助力，也是造成「迷思」的主因。

伍、結論與建議

所有學生高中時都學習過 $0.\overline{9}=1$ 的證明，但是學過不代表學會，甚至會在不瞭解意義下背誦，這是沒有意義的學習，固然能「記憶」證明，然而之後仍靠直觀主導思維，幾乎一半的的大學數學系學生仍然認為 $0.\overline{9}\neq1$。明顯的「直觀」扮演基模的功能，既是學習助力，同時也會造成迷思成為阻力。

大部分大學數學系學生修習過微積分後，仍然認為存在無窮小的數字，學過三分之一（或二分之一）的 n 次方當 n 趨近

無窮大時為零，卻又認為「一段長度，可以把它剪一半，一半再一半，仍然永遠留有一小段」。認為存在兩個不同無限接近對方的實數。他們的迷思有：「存在無窮大與無窮小數字」、「存在二個無窮接近的數字」、「無窮小平方後便更小」、「無窮大與無窮小可以被計算」，非標準無窮概念能協助超過一半學生解釋關於數學的的固定信念，連結過去學過有限數學概念，不至於會產生明顯的衝突。

「直觀」仍然控制大部分學生的的思考反應，學生會自我發展一套對他有意義的微域，在其中儘可能滿足一致性，與略有一點道理，大部分修習微積分的數學系學生和萊布尼茲的數學無窮概念非常相似，對於無窮概念是模糊與不一致，無法「自圓其說」。小部分學生說法不一致（認知衝突）時，他們可能會設法去找尋正確答案，主動實踐「有意義的學習」。學生遇到和自己先備知識不一致，會有不自覺堅持自己想法，將衝突敷衍的擺一邊，以記憶背誦的方式得到比較好成績，時間一久會全然忘記又回到原先的想法。學生和萊布尼茲的差異在於萊布尼茲認知到衝突後，非常努力系統化與合理化。

本研究設計與理念大致參照 Ely（2010）的研究，結果類似，Ely 認為認知是一個自我調節重要的系統，研究結果顯示大部分具有「認知衝突」學生並沒有展現強烈動機去澄清，仍以「直觀」回答問題。他認為研究與提供「非標準無窮小概念」，在教學上與學生學習上都有重要的貢獻。本研究認為國內學生普遍存在類似萊布尼茲無窮小迷思概念，為了澄清迷思而使用「非標準無窮小概念」仍值得更深入研究與評估。

所有受測學生都可以被歸類到抽象學習五群組「自明」、「衝突自清」、「衝突它清」、「衝突未清」、「未明未清」的某一群組，而這五群組也可以分類所有的學生，「自明」族有 3 名，大部分學生屬於「衝突它清」族，約略看出成常態分配。最後，建議教學的某個階段，應該明白說明「數線上不存在無窮小與無窮大數字，無窮小與無窮大是抽象的概念」。讓學生產生認知衝突，利用自清、教學（它清）等方式增加成功學習的機會。當然更理想的狀況是從高中時代就讓學生建立良好的數線概念，例如：數線與實數一對一的對應關係、不同二實數實際表示不同二點、以及數線上的點只有位置沒有長度與厚度等，這些都非常助益學生的實數概念學習。

參考文獻

邱美虹（1993）：科學教科書與概念改變。**科學教育月刊**，**163**，2-8。

陳玉玲（2000）：**概念改變教學策略對地球運動概念之教學效果─以國小六年級學生為例**（未出版之博士論文）。國立政治大學教育學系。台北市。

張春興（1991）：**現代心理學**。台北市：臺灣東華。

教育部（2008）：**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北市：教育部。

鍾聖校（1994）：對科學教育錯誤概念研究之省思。**科學研究資訊**，**2**（3），89-110。

潘慧玲（2003）：社會科學研究典範的流變。**教育研究資訊，11**(1)，115-143。

Albeverio, S., & Fenstad, J. E., & Høegh-Krohn, R., & Lindstrøm, T. (1986). *Nonstandard methods in Stochastic analysis and mathematical physics*. Orlando, FL: Academic Press.

Carey, S.(1985). *Conceptual Change in children*. Cambridge, MA: MIT Press.

Cox, C. M. (1926). *Genetic studies of genius. II. The early mental traits of three hundred geniuses*. Stanford University Press.

Ely, R. (2010）. Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*. 41（2）, 117－146.

Hammersley, M. (1989）. *The Dilemma of qualitative method：Herbert Blumer and the Chicago Tradition.* London and New York：Routledge.

Henle, J. M., & Klienberg, E. M. (1979). *Infinitesimal calculus.* Cambridge MA: MIT Press.

Hewson, P.W. (1981).A conceptual change approach to learning science. *European Journal of Science Education*, 3(4), 383-396.

Keisler, H. J. (1986). *Elementary calculus: an infinitesimal approach*. Boston, MA: Prindle, Weber & Schmidt.

Kline, M. (2004)。數學：確定性的失落(趙學信、翁秉仁譯)。台北市：台灣商務。(原著出版於 1980)

Strauss, A. (1987）. *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge：Cambridge University Press.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basic of qualitation research：Grounded theory procedures and techniques.* CA：Sage.

Strauss, A. & Corbin, J. (2001)。質性研究入門：紮根理論研究方法(吳芝儀、廖梅花譯)。嘉義市：濤石文化事業。(原著出版於 1990)

投稿日期：108 年 03 月 01 日

接受日期：108 年 07 月 23 日

A Study on Conceptions about Infinitesimals of College Mathematics Majored Students

Hsungrow Chan[1]* and Cuei-Ling Yan[2]

[1]Department of Applied Mathematics, National Pingtung University

[2] CHI JEN Primary School

Abstract

Based on a 2010 article "Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals", this study modifies the questionnaire of the study as a research tool to test the freshman and sophomore of math majored college students. There are 79 valid questionnaires collected, and six students for semi-structured interviews. We analyze the performance of the questionnaire, the content of the interview and the research notes to reach theorems. The study found that although the concept of infinitesimal calculus has been studied, most students still use intuition to fill in the infinitesimal concept and still respond to ideas like Leibniz's thinking. Learning by intuition may be helpful or resistance. Although students have learned $0.\overline{9} = 1$ in high school, most students believe that they are not the same and still intuitively answer the questions. Understanding "cognitive conflict" and motivation to clarify it is an important process of learning abstract concepts. The myth of students is that "existence of infinity and infinitesimal numbers", "existence of two infinity closed numbers", "smaller after squaring an infinitesimal numbers", and "calculatability of infinity and infinitesimal numbers". Students can be classified into five categories: "self-evident", "self-evident in conflict", "others-evident in conflict", "non-evident in conflict" and "unspecified". Finally, it is suggested that university mathematics teachers should reflect on this result and improve their teaching.:

Keywords: math majored college student, infinitesimals, nonstandard infinitesimals

* corresponding author