平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式(下)

李輝濱

嘉義市輔仁高級中學退休教師

【(續)科學教育月刊第 422 期第 64 頁之後】

C-5. 平面凸八邊形

[C-5.a] 展示平面凸八邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式：

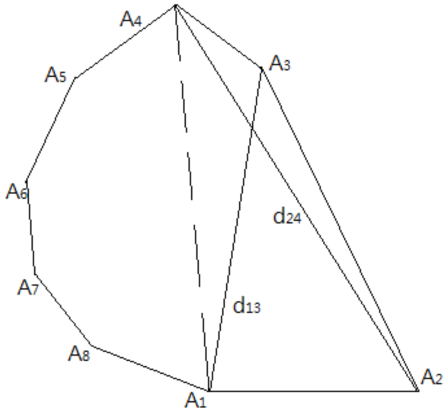

圖 8

請看上圖 8.並參照 B.的 2 個綜合定則，先列出兩組相對邊邊長集合；{ V_1，V_3} 與 { V_2，V_4，V_5，V_6，V_7，V_8}，編製出 6 項相對邊邊長乘積；V_1V_3、V_2V_4、V_2V_5、V_2V_6、V_2V_7、V_2V_8，再依操作的方針規劃，得第一部份內容組成結構為 $(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_2V_8)^2$，而第二部份內容組成結構則為 $V_1V_2V_3V_4$，$V_1V_2V_3V_5$，$V_1V_2V_3V_6$，$V_1V_2V_3V_7$，$V_1V_2V_3V_8$，$V_2^2V_4V_5$，$V_2^2V_4V_6$，$V_2^2V_4V_7$，$V_2^2V_4V_8$，$V_2^2V_5V_6$，$V_2^2V_5V_7$，$V_2^2V_5V_8$，$V_2^2V_6V_7$，$V_2^2V_6V_8$，$V_2^2V_7V_8$，引導的 15 個 cosine 項所形成！因此，翔實的將這 2 部份內容組成結構編排陳

列出完整的八邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式如下；

$$
\begin{aligned}
d_{13}{}^2 d_{24}{}^2 = {} & (V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_2V_8)^2 \\
& -2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5) \\
& -2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)+2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \\
& -2V_1V_2V_3V_8\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \\
& +2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right)-2V_2{}^2V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7) \\
& +2V_2{}^2V_4V_8\cos(A_5+A_6+A_7+A_8)-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right) \\
& -2V_2{}^2V_5V_8\cos\left(A_6+A_7+A_8\right)-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7+2V_2{}^2V_6V_8\cos(A_7+A_8) \\
& -2V_2^2V_7V_8\cos A_8 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

[C-5.b] 方程式(8)的驗證證明：請參看下圖 9.開始的幾何作圖解說與證明；

(1) 連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成對角線長 $\overline{A_1A_4}=d$ ，並依循[C-1.b].指引的思考方向先將此八邊形最前緣四個頂點所形成的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為基底作出一個如範例所述的輔助三角形 ΔTA_1A_3 ，如下圖 9.，此處 $\Delta A_1A_4T \approx \Delta A_2A_4A_3$ (互為相似形)。

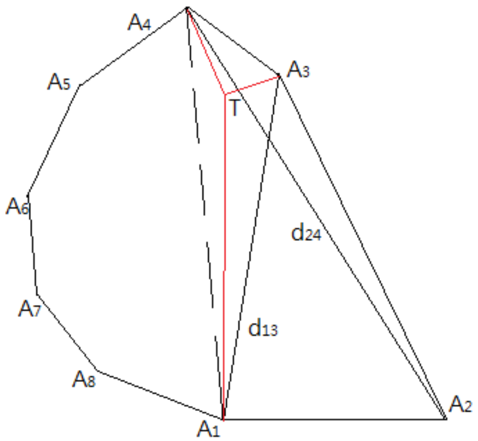

圖 9

仿效[C-1.b].的推理，可求得 $\overline{A_1T}=(V_2d)/d_{24}$ (8-1)

及 $\overline{A_3T}=(V_1V_3)/d_{24}$ (8-2)

以及在頂點 T 處四周圍角度關係可得 $\angle A_1TA_3 = A_2(\text{頂角})+\angle A_3A_4A_1$ (8-3)

(2) 接著要將八邊形(圖 9.)中另外部份六邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7A_8$ 以相似形結構黏附在 ΔTA_1A_3 的邊長 TA_1 上；此需藉由下列幾合作圖法來完成輔助相似形的製作；

(i) 連接對角線 A_4A_8 、 A_4A_7 及 A_4A_6 ，將六邊形分割成四個三角形如下圖 9-a.

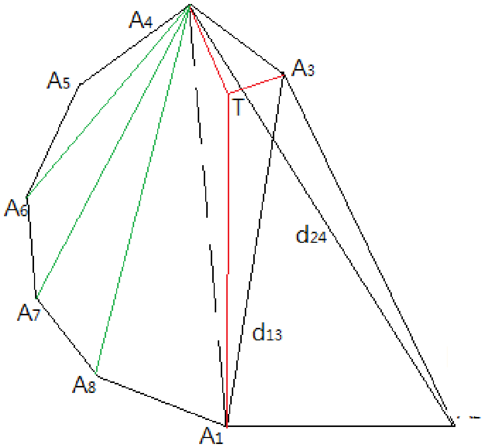

圖 9-a.

(ii) 作相似形應自三角形做起，此處先從 $\Delta A_8A_1A_4$ 開始；見圖 9-a.，對 ΔTA_1A_3 的一邊長 TA_1 自頂點 A_1 向外側作一射線 A_1B ，使 $\angle TA_1B=\angle A_4A_1A_8$，又在頂點 T 處對圖形外側作另一射線 TB，使 $\angle A_1TB=\angle A_1A_4A_8$，此兩射線交在 B 點；見圖 10.

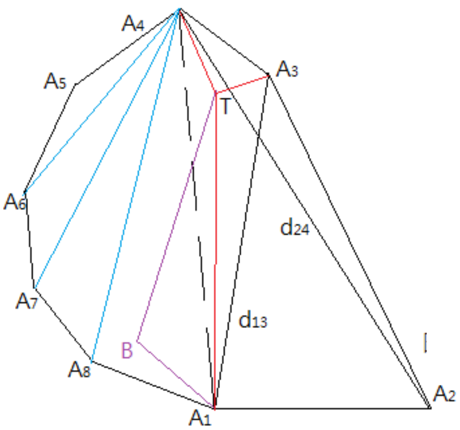

圖 10

則 $\Delta A_1BT \approx \Delta A_1A_8A_4$(互為相似形) 且 $\angle TBA_1 = \angle A_4A_8A_1$。由對應邊長成正比例關係得 $\overline{A_1B}:V_8 = \overline{A_1T}:d = \overline{BT}:\overline{A_4A_8} \Rightarrow \overline{A_1B} = (V_8 \cdot \overline{A_1T})/d$ (8-1a)

再將(8-1)式的邊長 $\overline{A_1T}$ 代入(8-1a)式，得 $\overline{A_1B} = (V_8V_2)/d_{24}$ (8-4)

(iii) 同理，在圖 10.裡自線段 TB 外側再作出第二個三角形 ΔTCB；見下圖 11.；

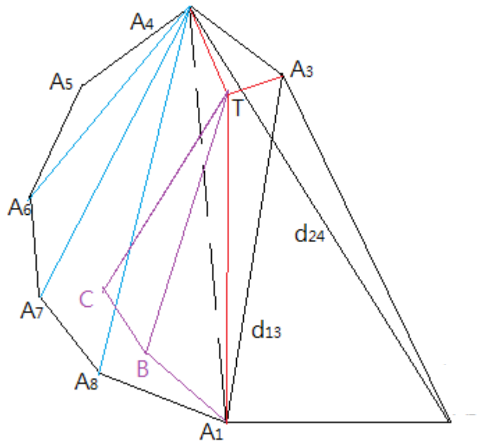

圖 11

自頂點 B 向外側作一射線 BC，使 $\angle TBC = \angle A_4A_8A_7$，又在頂點 T 處對圖形外側作另一射線 TC，使 $\angle BTC = \angle A_8A_4A_7$，此兩射線交在 C 點；則可得 ΔTCB 與 $\Delta A_4A_7A_8$ 兩者呈相似形，且 $\angle TCB = \angle A_4A_7A_8$。再由對應邊長成正比例關係得

$\overline{BC}:V_7 = \overline{BT}:\overline{A_8A_4} = \overline{CT}:\overline{A_7A_4}$，又因為 $\overline{BT}:\overline{A_8A_4} = \overline{A_1T}:d$，故聯立得出；

$$\overline{BC}:V_7 = \overline{BT}:\overline{A_8A_4} = \overline{CT}:\overline{A_7A_4} = \overline{A_1T}:d \quad (8\text{-}1b)$$

對(8-1b)作運算得出 $\Rightarrow \overline{BC} = (V_7 \cdot \overline{A_1T})/d$ (8-1c)

再將(8-1)式的邊長 TA_1 代入(8-1c)式，即得出； $\overline{BC} = (V_7V_2)/d_{24}$ (8-5)

(iv) 繼續仿效(iii).的作圖分析過程，在圖 11.裡自線段 TC 外側再作出第三個三角形 ΔTCD；見下圖 12.；自頂點 C 向外側作一射線 CD，使 $\angle TCD = \angle A_4A_7A_6$，又在頂點 T 處對圖形外側作另一射線 TD，使 $\angle CTD = \angle A_7A_4A_6$，而此兩射線相交在 D 點；則得 $\Delta TCD \approx \Delta A_4A_7A_6$(互為相似形)。且 $\angle TDC = \angle A_4A_6A_7$。

再由對應邊長成正比例關係得　$\overline{CD}:V_6=\overline{DT}:\overline{A_6A_4}=\overline{CT}:\overline{A_7A_4}$　，又由(8-1b)式，

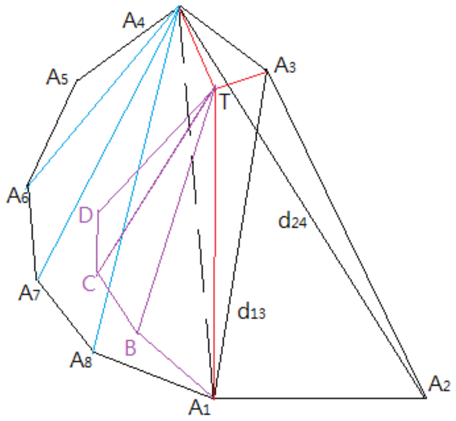

圖 12

得　$$\overline{CD}:V_6=\overline{DT}:\overline{A_6A_4}=\overline{CT}:\overline{A_7A_4}=\overline{A_1T}:d \qquad (8\text{-}1d)$$

，故演算後得出；邊長 $\overline{CD}$ 的長度值為；　$$\overline{CD}=(V_6\cdot\overline{A_1T})/d \qquad (8\text{-}1e)$$

再將(8-1)式的邊長 TA_1 代入(8-1e)式，即得出；　$$\overline{CD}=(V_6V_2)/d_{24} \qquad (8\text{-}6)$$

(v) 繼續仿效(iv).的作圖，在圖 12.裡自線段 TD 外側再作出第四個三角形 ΔTDE；見下圖 13.；使得　$\Delta TDE\approx\Delta A_4A_6A_5$ (互為相似形)。且　$\angle TED=A_5$ (頂角)。

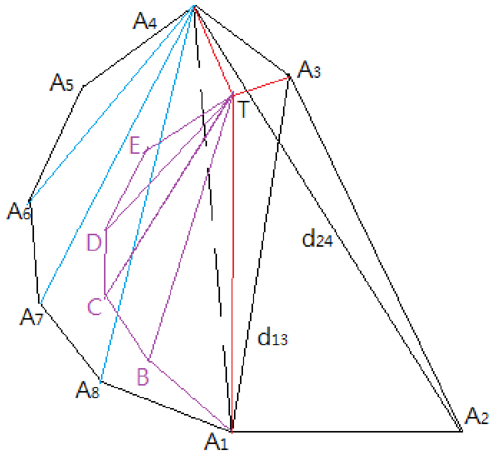

圖 13

再由對應邊長成正比例關係得 $\overline{DE}:V_5=\overline{ET}:V_4=\overline{DT}:\overline{A_6A_4}$ ，又由(8-1d)式，

得 $\overline{DE}:V_5=\overline{ET}:V_4=\overline{DT}:\overline{A_6A_4}=\overline{CT}:\overline{A_7A_4}=\overline{A_1T}:d$ ，故演算後分別得出；

邊長 $\overline{DE}$ 的長度值為； $\overline{DE}=(V_5\cdot\overline{A_1T})/d$ (8-1f)

邊長 $\overline{ET}$ 的長度值為； $\overline{ET}=(V_4\cdot\overline{A_1T})/d$ (8-1g)

再將(8-1)式的邊長 TA_1 代入(8-1f)式，即得出； $\overline{DE}=(V_5V_2)/d_{24}$ (8-7)

又將(8-1)式的邊長 TA_1 代入(8-1g)式，即得出； $\overline{ET}=(V_4V_2)/d_{24}$ (8-8)

在此步驟(2).過程所得四組相似三角形的對應角關係中，再得到依此四組相似三角形分別組合成的平面凸六邊形 $A_4A_1A_8A_7A_6A_5$ 與平面凸六邊形 TA_1BCDE 兩者間具有下列的相等角度關係； $\angle A_1TE=\angle A_1TB+\angle BTC+\angle CTD+\angle DTE=$ $\angle A_1A_4A_8+\angle A_8A_4A_7+\angle A_7A_4A_6+\angle A_6A_4A_5=\angle A_1A_4A_5$， 頂角 A_5=頂角 E，

頂角 $A_6=\angle A_4A_6A_5+\angle A_4A_6A_7=\angle TDE+\angle TDC$=頂角 D，

頂角 $A_7=\angle A_4A_7A_6+\angle A_4A_7A_8=\angle TCD+\angle TCB$=頂角 C，

頂角 $A_8=\angle A_4A_8A_7+\angle A_4A_8A_1=\angle TBC+\angle TBA_1$=頂角 B， $\angle TA_1B=\angle A_4A_1A_8$。

(3) 由步驟(2).推導出的所有比例關係式可聯結成下列各對應邊長成正比例式；

$\overline{A_1B}:V_8=\overline{A_1T}:d=\overline{BC}:V_7=\overline{CD}:V_6=\overline{DE}:V_5=\overline{ET}:V_4$ ，又因為圖 13.中平面凸六邊形 TA_1BCDE 與平面凸六邊形 $A_4A_1A_8A_7A_6A_5$ 的各對應頂角相等，則此兩個凸六邊形必呈相似形關係，見圖 13. 。 輔助作圖到此為止，可看到這凸六邊形 TA_1BCDE 相似形結構確實黏附在 ΔTA_1A_3 的邊長 TA_1 外側上。

此刻，這相似六邊形 TA_1BCDE 的五個邊長 $\overline{A_1B}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{ET}$ 都逐一尋獲了。它們的數值確實分別由原凸八邊形的邊長以比例式關係構成！

(4) 經由以上幾何作圖推證，已成功地將原凸八邊形的八個邊長以比例式關係縮減成圖 13.中的平面凸七邊形 A_1A_3TEDCB 裡六個邊長的新構圖！
這新構的七邊形有一個頂角 $\angle A_3TE$ 其角度未明，由圖 13.知這頂角的值為；頂角

$\angle A_3TE = \angle A_3TA_1 + \angle A_1TE$，而(8-3)式； $\angle A_1TA_3 = A_2$(頂角)+ $\angle A_3A_4A_1$，再由六邊形 TA_1BCDE 與 $A_4A_1A_8A_7A_6A_5$ 的相似形關係，得 $\angle A_1TE = \angle A_1A_4A_5$，故頂角 $\angle A_3TE = A_2$(頂角)+ $\angle A_3A_4A_1 + \angle A_1A_4A_5 = A_2$(頂角)+ A_4(頂角)。

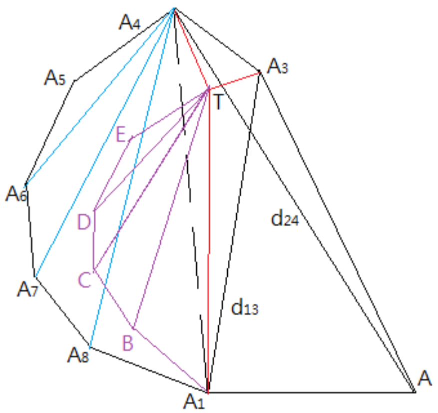

圖 13

(5) 另外由六邊形相似形性質知；兩個六邊形的各對應角必完全相等，所以有； 頂角 A_5=頂角 E，頂角 A_6=頂角 D，頂角 A_7=頂角 C，頂角 A_8=頂角 B，

(6) 再參考新構的圖 14. 如下；新構的凸七邊形 A_1A_3TEDCB 裡，各邊長與所需的各

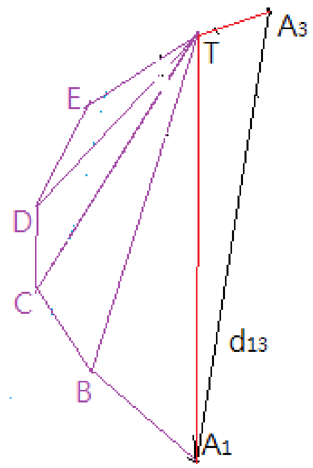

圖 14

頂角都推求到了，應用引理 5.平面凸七邊形的餘弦定理方程式(3)，可完整敘述

出新構的平面凸七邊形 A_1A_3TEDCB 所屬的餘弦定理公式，得

$$\overline{A_1A_3}^2 = \overline{TA_3}^2 + \overline{TE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{BA_1}^2 - 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{TE}\cos(\angle A_3TE)$$

$$-2\,\overline{TE}\cdot\overline{ED}\cos E - 2\,\overline{ED}\cdot\overline{DC}\cos D - 2\,\overline{DC}\cdot\overline{CB}\cos C - 2\,\overline{CB}\cdot\overline{BA_1}\cos B$$

$$+2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{ED}\,\cos(\angle A_3TE+E) + 2\,\overline{TE}\cdot\overline{DC}\,\cos(E+D) + 2\,\overline{ED}\cdot\overline{CB}\,\cos(D+C)$$

$$+2\,\overline{DC}\cdot\overline{BA_1}\,\cos(C+B) - 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{DC}\cos(\angle A_3TE+E+D)$$

$$-2\,\overline{TE}\cdot\overline{CB}\cos(E+D+C) - 2\,\overline{ED}\cdot\overline{BA_1}\cos(D+C+B)$$

$$+2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{CB}\cos(\angle A_3TD+E+D+C) + 2\,\overline{TE}\cdot\overline{BA_1}\cos(E+D+C+B)$$

$$-2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{BA_1}\cos(\angle A_3TE+E+D+C+B) \tag{3-2}$$

現在將凸七邊形各邊長的比例數值及各角角度值代入方程式(3-2)，得下式；

$$d_{13}{}^2 = [(V_1V_3)/d_{24}]^2 + [(V_4V_2)/d_{24}]^2 + [(V_5V_2)/d_{24}]^2 + [(V_6V_2)/d_{24}]^2 + [(V_7V_2)/d_{24}]^2$$

$$+[(V_8V_2)/d_{24}]^2 - 2[(V_1V_3)/d_{24}][(V_4V_2)/d_{24}]\cos(A_2+A_4)$$

$$-2[(V_4V_2)/d_{24}][(V_5V_2)/d_{24}]\cos A_5 - 2[(V_5V_2)/d_{24}][(V_6V_2)/d_{24}]\cos A_6$$
$$-2[(V_6V_2)/d_{24}][(V_7V_2)/d_{24}]\cos A_7 - 2[(V_7V_2)/d_{24}][(V_8V_2)/d_{24}]\cos A_8$$

$$+2[(V_1V_3)/d_{24}][(V_5V_2)/d_{24}]\cos(A_2+A_4+A_5) + 2[(V_4V_6V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_5+A_6)$$

$$+2[(V_5V_7V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_6+A_7) + 2[(V_6V_8V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_7+A_8)$$

$$-2[(V_1V_2V_3V_6)/d_{24}{}^2]\cos(A_2+A_4+A_5+A_6) - 2[(V_4V_7V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_5+A_6+A_7)$$

$$-2[(V_5V_8V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_6+A_7+A_8)$$

$$+2[(V_1V_2V_3V_7)/d_{24}{}^2]\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)$$

$$+2\,[(V_4V_8V_2{}^2)/d_{24}{}^2]\cos(A_5+A_6+A_7+A_8)$$

$$-2\,[(V_1V_2V_3V_8)/d_{24}{}^2]\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8) \qquad (3\text{-}3)$$

將(3-3)式的等號兩側同乘以 $d_{24}{}^2$ 後，再重組運算，化簡整裡，最後得 (8)式。平面凸八邊形的方程式 (8)式等號右邊共有項式 $C_2^{8-1}=C_2^7=21$ 項。證明完成。方程式 (8)式即為得證出的平面凸八邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。此方程式真的由應用平面七邊形的餘弦公式推證而來。

[C-5.c] 檢驗方程式(8)；

方程式(8)的結構型態中每一項式內涵裡表徵的邊長與頂角排列型式都呈現出秩序、規律、條理。縱然如此，仍須透過下列詳盡的檢驗以強化其正確性。

(1) 若令 $V_8=0$，使頂點 A_8 趨近於頂點 A_1，頂角 $A_8=0$，則平面凸八邊形退化成平面凸七邊形，方程式(8)隨即縮減退化成下式；

$$d_{13}{}^2d_{24}{}^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)-2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)$$

$$+2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5+2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7)-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)$$

$$-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7 \qquad (7^*)$$

比對方程式(7*)與方程式(7)完全相同。

(2) 若令 $V_8=V_7=0$，使頂點 A_8 與 A_7 接趨近於頂點 A_1，頂角 $A_8=A_7=0$，則平面凸八邊形退化成平面凸六邊形，方程式(8)隨即縮減退化成下式；

$$d_{13}{}^2d_{24}{}^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2^{\,2}V_4V_5\cos A_5-2V_2^{\,2}V_5V_6\cos A_6+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)$$

$$+2V_2^{\,2}V_4V_6\cos(A_5+A_6)-2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6) \qquad (6^*)$$

比對方程式(6*)與方程式(6)，再應用引理 2.將 $A_2+A_4+A_5+A_6=4\pi-A_1-A_3$ 轉換運算後，兩方程式完全相同。

(3) 若令 $V_8=V_7=V_6=0$，使得頂角 $A_8=A_7=A_6=0$，則平面凸八邊形退化成平面凸五邊形，方程式(8)立即縮減退化成下式；

$$d_{13}^{\,2}d_{24}^{\,2}=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2^{\,2}V_4V_5\cos A_5+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5) \qquad (5^*)$$

比對方程式(5*)與方程式(5)，兩者為相同的等價方程式。

(4) 若令 $V_8=V_7=V_6=V_5=0$，使得頂角 $A_8=A_7=A_6=A_5=0$，則平面凸八邊形退化成平面凸四邊形，方程式(8)立即縮減退化成下式；

$$d_{13}^{\,2}d_{24}^{\,2}=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \qquad (4)$$

(5) 若再令此平面凸四邊形內接於一圓，由兩頂角 A_2 與 A_4 互補性質，得

$$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \qquad (9)$$

方程式(9)就是托勒密定理(Ptolemy theorem)。

(6) 探究圓內接八邊形的情況：圖 15. 的圓內接八邊形；對角線長 $\overline{A_1A_4}=d$，

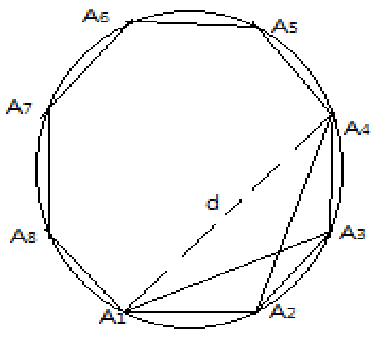

圖 15

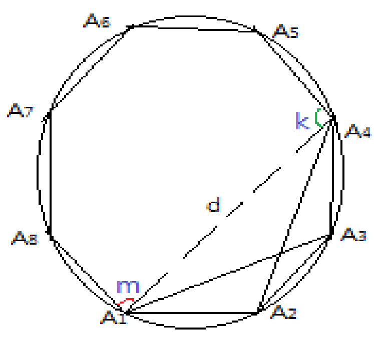

圖 16

(a) 對圖 15.中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有托勒密定理關係式如下；

$d_{13}d_{24} = V_1V_3 + V_2d$ ，現在將其完全平方，得下式；

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2d)^2 + 2V_1V_2V_3d \quad (10)$$

(b) 仿效引理 5.可得六邊形餘弦公式，對圖 15.中的六邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7A_8$ 可得下列餘弦定理關係式；

$$d^2 = V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 + V_7^2 + V_8^2 - 2V_4V_5\cos A_5 - 2V_5V_6\cos A_6 - 2V_6V_7\cos A_7$$
$$-2V_7V_8\cos A_8 + 2V_4V_6\cos(A_5 + A_6) + 2V_5V_7\cos(A_6 + A_7) + 2V_6V_8\cos(A_7 + A_8)$$
$$-2V_4V_7\cos(A_5 + A_6 + A_7) - 2V_5V_8\cos(A_6 + A_7 + A_8)$$
$$+2V_4V_8\cos(A_5 + A_6 + A_7 + A_8) \quad (11)$$

(c) 另外六邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7A_8$ 也有邊長與頂角角度關係式如下；見上圖 16.，

令角度 $m = \angle A_8A_1A_4$，角度 $k = \angle A_1A_4A_5$，對六邊形言，由引理 1.可得；

$$d = V_4\cos k + V_5\cos[k - (\pi - A_5)] + V_6\cos[k - (\pi - A_5) - (\pi - A_6)]$$
$$+V_7\cos[k - (\pi - A_5) - (\pi - A_6) - (\pi - A_7)] + V_8\cos m$$
$$= V_4\cos k - V_5\cos(k + A_5) + V_6\cos(k + A_5 + A_6)$$
$$-V_7\cos(k + A_5 + A_6 + A_7) + V_8\cos m$$

由圖 16. 知，

角度 $m = \angle A_8A_1A_4 = A_1 - \angle A_2A_1A_4 = A_1 - (\pi - A_3) = A_1 + A_3 - \pi$ ，

同理，角度 $k = \angle A_1A_4A_5 = A_2 + A_4 - \pi$，現將此兩角度代入 d 的等式中，得；

$$d = -V_4\cos(A_2 + A_4) + V_5\cos(A_2 + A_4 + A_5) - V_6\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6)$$
$$+V_7\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7) - V_8\cos(A_1 + A_3) \quad (12)$$

(d) 將(11)式的 d^2 及 (12)式的 d 一起同步代入 (10)式中，運算並移項整理成；

$$\begin{aligned}
{d_{13}}^2{d_{24}}^2 &= (V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_2V_8)^2 \\
&-2{V_2}^2V_4V_5\cos A_5-2{V_2}^2V_5V_6\cos A_6-2{V_2}^2V_6V_7\cos A_7 \\
&+2{V_2}^2V_4V_6\cos(A_5+A_6)-2{V_2}^2V_7V_8\cos A_8+2{V_2}^2V_6V_8\cos(A_7+A_8) \\
&-2{V_2}^2V_5V_8\cos(A_6+A_7+A_8)+2{V_2}^2V_5V_7\cos(A_6+A_7) \\
&-2{V_2}^2V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7)+2{V_2}^2V_4V_8\cos(A_5+A_6+A_7+A_8) \\
&-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5) \\
&-2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)+2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \\
&-2V_1V_2V_3V_8\cos(A_1+A_3) \qquad (13)
\end{aligned}$$

方程式(13)式的最末一項 $-2V_1V_2V_3V_8\cos(A_1+A_3)$，其頂角組合 A_1+A_3 轉換成 $6\pi-(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8)$ 代入 (13)式中，經運算，再化簡，整理排序，最後就得到方程式 (8)式。

得證出的方程式(8)式即是圓內接八邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。(8)式內的各項角度組合若再應用引理 3.的性質還可將它的內容再轉化成最精簡型態。因此，無論是圓內接八邊形或平面凸八邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式都是上述的 (8)式與 (13)式的等價形式。至此，檢驗過程同時也實際採納各不同面向考量來察驗出這些公式的真實正確性，並再次強化了本文各節次內容裡這所有公式獲得證明的嚴謹、充裕、完整、堅實不朽的理論基礎！

C-6. 平面凸九邊形、凸十邊形、…、凸 n 邊形

平面凸九邊形、凸十邊形、…、凸 n 邊形等各類圖形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式都能依循上述的 2 個綜合定則明細寫出各個獨自完整無瑕的精確公式，也都能一一仿效平面凸八邊形的證明模式加以證明以及持續相關的檢驗驗證。諸多證明與驗證過程於此就不再撰文贅述。

參、 結論

1. 最後，由全文敘述推理引證過程中明顯地察覺到；自圓內接八邊形的情況作研析而導證出的臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式是比較容易的，以此觀點推廣到圓內接 n 邊形的情況必然是一樣的！是故，先快速依圖形推求出圓內接 n 邊形的公式型態，而此公式正是一般凸 n 邊形所屬的正確型態，再比對這方程式的各項結構與 $(n-1)$ 邊形餘弦定理公式兩者間的各項相對應位置關係，並配合基底四邊形幾何相似形作圖法，混成思考，步步演繹試算才彙整歸納出本文研發創意的嶄新方針，進而尋獲規範方程式的 2 個綜合定則。
2. 在圖 14.中縮減的新構七邊形是凸七邊形，若要求作出一新構的凹七邊形也可達成；只須將圖 8. 的八邊形變身一下，變身成下圖 17.，即可仿效前述中的

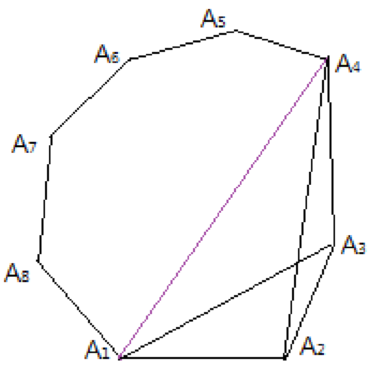

圖 17

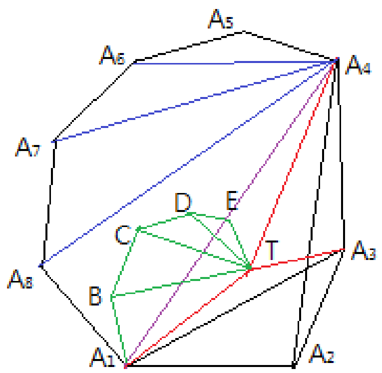

圖 18

幾何相似形作圖法製作出圖 18.的新構平面凹七邊形 A_1A_3TEDCB 。再根據正文內的推理敘述過程，仿效其導證步驟要領，即可將此平面凹七邊形 A_1A_3TEDCB 依循它的餘弦定理公式再加以推演運算就能獲得完全相同的方程式 (8)式。不論是圖 8. 的八邊形抑或是圖 17. 的八邊形其結構形狀都不失為作圖的一般性，而兩圖形的順勢發展也都能嚴謹推理導證出完全相同的方程式 (8)式。

3. 輔助相似形幾何作圖法的效應與多邊形餘弦定理的功能在平面幾何學上的直接或間接應用都非常廣泛、強大！將一個 n 邊形以相似形幾何作圖法縮減成一個小的新構 $(n-1)$ 邊形使其落在原 n 邊形內部，且共享兩頂點 A_1 與 A_3 。新構建的 $(n-1)$ 邊形內的 $n-2$ 個邊長恰好為原本 n 邊形內 n 個邊長以適當有序的美妙比例關係式構成。如是無比精準的完善搭配，值得推廣應用到其他思維領域上。
4. 檢驗終了時，可以完全意識到這平面凸八邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式 (8)式與 (13)、(14)式已經完美統一了平面凸七邊形、平面凸六邊

形、平面凸五邊形、平面凸四邊形與托勒密定理等同質性的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式！使這些公式都成為平面凸八邊形方程式的特例！更有甚者，直接推廣到所有自平面凸($n-1$)邊形以下的同質性的方程式都必成為平面凸 n 邊形方程式的特例！

5. 最值得賞析且提示的是；將一個平面凸 n 邊形圖形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式針對其所有項式的個別內涵成份如實比對，參照各邊長與頂角的圖形相關位置而精緻地彙整、歸納、條理出完美方程式的 2 個綜合定則。依循這 2 定則的程序操作所排列出的各樣圖形方程式，都能讓方程式原本凌亂不堪的眾多項繁複情境被逐一統整並展現出各方程式彼此之間連貫的一致共同規律秩序特質！

參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形內兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 407 期**，第 24 頁，2018 年 4 月出版發行。

李輝濱，平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 410 期**，第 10 頁，2018 年 7 月出版發行。

李輝濱，平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 413 期**，第 31~50 頁，2018 年 10 月出版發行。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，五南圖書出版公司。

項武義，**基礎分析學**，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .