中學生通訊解題第 122 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
12201

證明：5 個連續整數的平方和一定不是完全平方數。

證明：

使用反證法。

設有 5 個連續整數 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$，它們的平方和是一個完全平方數，

$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=m^2$，其中 m 是自然數。

得

$5(n^2+2)=m^2$ (1)

則 $5\mid m^2$，又 5 是質數，所以 $5\mid m$，

令 $m=5k$，其中 k 是自然數，代入(1)式得

$n^2+2=5k^2$ (2)

由於 $5k^2$ 的末位數是 0 或 5，故由(2)可見 n^2 的末位數字是 8 或 3。另一方面，易驗證平方數的末位數字只能是 0，1，4，5，6，9。

($0^2=0$，$1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25$，$6^2=36$，$7^2=49$，$8^2=64$，$9^2=81$)

則(2)不可能成立，即由假設導致矛盾，故得證。

【解題評析】

1 本題目主要解題的方法是反證法。證明的重點有兩個：首先使用對稱式的假設法，假設出 5 個連續整數為 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$，其中 $n\ge 2$，接著利用說明，所有的整數 n, k 皆無法使 $n^2+2=5k^2$ 成立。

2. 命題是對所有的連續整數，故如果只是列出單一的 5 個連續整數來驗證不是完全方數，是不足的，如：$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$ 不是完全平方數。另外有許多同學是使用 mod 5 的方法來說明 $n^2+2=5k^2$ 不成立，也是很好的方式。

問題編號
12202

設多項式函數

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 皆為 0 或 1 或 2，則滿足 $f(2)=104$ 的 $f(x)$ 共有多少個？

簡答：18

【詳解】

$2^6<104<2^7$，則 $n=6$，

104	=	1	$\times 2^6+$	1	$\times 2^5+$	0	$\times 2^4+$	1	$\times 2^3+$	0	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	1	$\times 2^5+$	0	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	2	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	1	$\times 2^5+$	0	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	2	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	1	$\times 2^5+$	0	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	1	$\times 2^1+$	2	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	1	$\times 2^3+$	0	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	2	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	2	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	1	$\times 2^1+$	2	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	2	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	2	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	1	$\times 2^6+$	0	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	1	$\times 2^1+$	2	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	1	$\times 2^3+$	0	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	2	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	2	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	2	$\times 2^4+$	0	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	1	$\times 2^1+$	2	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	2	$\times 2^2+$	0	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	2	$\times 2^1+$	0	$\times 2^0$
	=	0	$\times 2^6+$	2	$\times 2^5+$	1	$\times 2^4+$	2	$\times 2^3+$	1	$\times 2^2+$	1	$\times 2^1+$	2	$\times 2^0$

∴共有 18 個。

【解題評析】

此題表面上屬於代數問題，實際上偏向數論與排列組合問題。一般二進位只用數碼 0 或 1 來表示，此題稍加變化，可以用數碼 0 或 1 或 2 來表示。同學只要注意到：

$2\cdot 2^n=1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}$

$\quad =1\cdot 2^n+1\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}=\cdots$

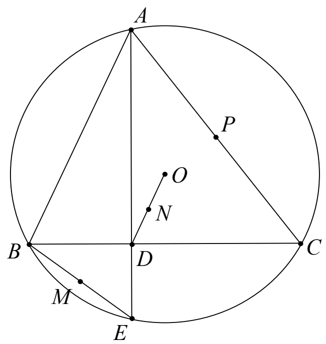
$1\cdot 2^n=0\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}$

$\quad =0\cdot 2^n+1\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}=\cdots$

大概就可以列出所有的可能性。多數同學都有細心列出 18 種可能性，獲得 7 分的滿分；有位同學只差臨門一腳，但卻想太多以致於數了 34 種，有點可惜，獲得 5 分；有些同學只把大化小的動作做一次就不再往下做，只數出 6 種可能，獲得 3 分；有位同學誤以為此題無解且寫出證明，可惜立論錯誤，獲得 1 分。

問題編號
12203

設 ΔABC 是銳角三角形滿足 $\overline{AB}<\overline{AC}$，$O$ 是 ΔABC 外接圓的圓心，$\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，延伸 $\overline{AD}$ 交外接圓於 E 點。若 $\overline{BE}$、$\overline{OD}$、$\overline{AC}$ 的中點分別是 M、N、P，試證：M、N、P 三點共線。



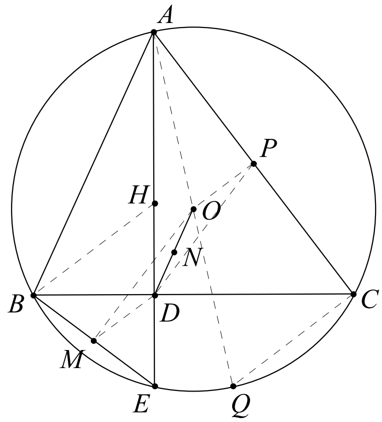
證明：

解法一：

設 H 是 ΔABC 的垂心，延伸 $\overline{AO}$ 交外接圓於 Q 點。所以

$\angle HBD = 90° - \angle ACB = 90° - \angle AEB = \angle DBE$，

因此 $\Delta HDB \cong \Delta EDB$，得 $\overline{HD} = \overline{DE}$，所以 $\overline{MD} // \overline{BH}$ 且 $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{BH}$。另因 O、P 分別為 $\overline{AQ}$、$\overline{AC}$ 的中點，得 $\overline{OP} // \overline{QC}$ 且 $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{QC}$。而 $\overline{BH}$、$\overline{QC}$ 均垂直 $\overline{AC}$，$\overline{QB}$、$\overline{CH}$ 均垂直 $\overline{AB}$，所以 $HBQC$ 是平行四邊形，所以 $\overline{BH} = \overline{QC}$，因此 $\overline{MD} // \overline{OP}$ 且 $\overline{MD} = \overline{OP}$，得 $MDPO$ 是平行四邊形。因 N 是 $\overline{OD}$ 的中點，所以 N 也是 $\overline{MP}$ 的中點，故得證。



解法二：(台北市懷生國中姚同學提供)

將圖形平移至座標平面，使 O 為原點、$\overline{BC}$ 平行 x 軸，因此假設 $O(0,0)$、$C(x_1, y_1)$、$A(x_2, y_2)$，由外心的對稱性知 $B(-x_1, y_1)$、$E(x_2, -y_2)$，所以 $D(x_2, y_1)$

且 $M(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2})$、$N(\frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2})$、$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$。因此可知 N 為 $\overline{MP}$ 的中點。

【解題評析】

此次徵答同學的解法分成兩類，以類似解法一的有 7 位，均以證明 $MDPO$ 是平行四邊形為主，僅一位同學對於證明平行四邊形的條件(「兩雙對邊平行」或「一雙對邊平行且相等」)有所疏忽，其餘均答對；類似解法二的有 3 位，解析方法須計算正確才能算全對，而此次 3 位同學均表現良好，得到全對的 7 分。

問題編號
12204

假設平面上有 m 條直線、n 個交點，其中任意三條直線都不共點。已知平面上可畫出 m 條直線、n 個交點(其中任意三條直線都不共點)的圖形不只一種，但不論圖形如何，平面被分割成的區域個數都是固定的(亦即區域個數與圖形的畫法無關)。設 $f(m,n)$ 表示平面被分割成的區域個數，試回答下列問題：

(1) 證明：$n \le \dfrac{m(m-1)}{2}$。

(2) 求 $f(5,10)$ 之值並說明理由。

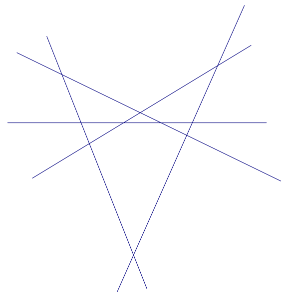
(3) 求 $f(6,11)$ 之值並說明理由。

簡答：(2) $f(5,10)=16$　(3) $f(6,11)=18$。

詳解：

(1) 平面上任兩條相異的直線至多只有一個交點，因此固定某一條直線，其餘的 $m-1$ 條直線和這條固定的直線，至多有 $m-1$ 個交點，加上每條直線都可以當那條固定的直線及每個交點都恰被計算到兩次，因此平面上任 m 條相異的直線，交點數至多為 $\dfrac{m(m-1)}{2}$，即 $n \le \dfrac{m(m-1)}{2}$。

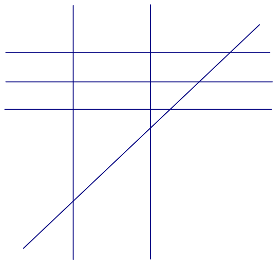
(2) 當 $m=5, n=10$ 時，(1)中的等號恰好成立，從(1)的推導過程知這 5 條直線中任兩條都恰交於一點，如圖，直接計算可得 $f(5,10)=16$。



(3) 當 $m=6, n=11$ 時，(1)中的等號不會成立，從(1)的推導過程知這 6 條直線中有些是平行線，才會造成交點數減少，將所有可能的情形逐一列出，得下表

平行線分組	6	5,1	4,2	4,1,1	3,3	3,2,1	3,1,1,1	2,2,2	2,2,1,1	2,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1
交點數	0	5	8	9	9	11	12	12	13	14	15

依題意知：平行線分組為 $(3,2,1)$，如圖，直接計算可得 $f(6,11)=18$。



註：一般的結果為 $f(m,n)=m+n+1$。說明如下：每條直線多一個點會多一段邊，但是一個點會有兩條直線通過，所以 m 條直線與 n 個交點會形成 $m+2n$ 段邊。由平面圖的 Euler 公式可知：點數−邊數+面數=1，

因此， $n-(m+2n)+f(m,n)=1$，

即 $f(m,n)=m+n+1$。

【解題評析】

有些同學因為一些細節或是理由不夠充足的原因，被扣了一些分數，但也都得到一半以上的分數。此外有兩位同學歸納出 $f(m,n)=m+n=1$ 的通式，進而得到(2)和(3)的答案，非常難得！

問題編號
12205

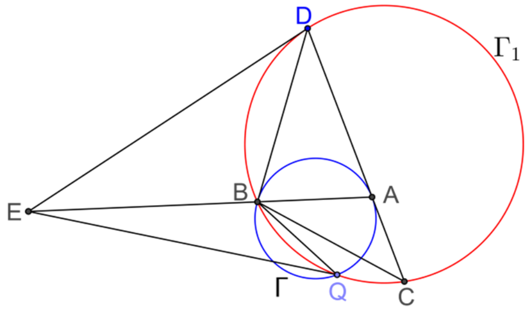
已知△ABC 與圓 Γ 滿足下列條件；

(1) 圓 Γ 過點 A、B，且與 $\overleftrightarrow{AC}$ 相切；

(2) 圓 Γ 在點 B 處的切線與 $\overline{AC}$ 交於點 D(與點 C 不重合)；

(3) △BDC 的外接圓圓 Γ_1 與圓 Γ 交於點 Q(與點 B 不重合)；

(4) 圓 Γ_1 在點 D 處的切線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於點 E。



證明：△BQE 的外接圓與 $\overleftrightarrow{DE}$ 相切。

【證明】

因為 $\angle EDB+\angle DEB=\angle DBA$

$=\angle BQA=\angle BQD+\angle AQD$，

又 $\angle EDB=\angle DQB$，得 $\angle DEB=\angle DQA$，

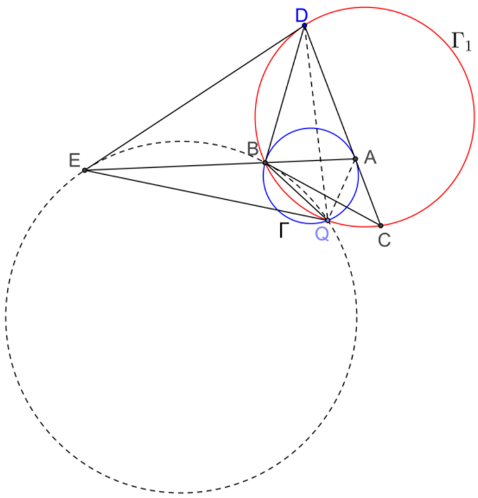
因此 D、E、Q、A 共圓。

則 $\angle EQB+\angle DQB=\angle DQE=\angle DAE$

$=\angle DBA=\angle BDE+\angle BED$，

又 $\angle DQB=\angle BDE$，得 $\angle BED=\angle EQB$，

故△BQE 的外接圓與 $\overleftrightarrow{DE}$ 相切。



【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

(1) 三角形的外角等於不相鄰的兩內角和。

(2))切線段等長。

(3) 等腰三角形 ⇔ 底角相等。

(4) 弦切角等於對同弧的圓周角。

(5) 四點共圓的充要條件。

(6) 對同弧的圓周角相等。

利用過圓上定點的切線唯一以及弦切角等於對同弧的圓周角的數學性質，此題也就是等價於證明"$\angle BED = \angle EQB$"，適當作補助線以及上述數學性質加以證明。

2. 本題參與徵答者有 1 人：

其作答過程了解並應用上述數學性質，尚須證明 $\overline{MB} = \overline{ME}$ ，證明即完整。