平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式(上)

李輝濱

嘉義市輔仁高級中學退休教師

壹、前言

從著手進行全面觀察比對圓內接四邊形托勒密定理(Ptolemy theorem)、平面凸四邊形、平面凸五邊形、平面凸六邊形及平面凸七邊形等五種圖形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的公式型態內容架構後，再經由深刻思索的自我發想，覺察意識到可以應用同類歸納推理法則來將這些已獲得的五樣同類公式推廣延伸到任何邊數平面凸多邊形的同性質情況上，隨即直觀地開始對各多邊形實際依圖索驥，分析探討各項邊長組合、角度組合、邊長與角度的各樣適切組合，再將這些多項組合式編製成各多邊形方程式，並且仔細逐項比較而整理出所得方程式間的共同連貫性質，而獲致一套統整的公式綜合法則；即預先歸納且詳細條列出一般多邊形的常態規則化方程式，再按順序逐一加以嚴謹翔實的理論推演驗證，以完整建立這所有公式存在的恆常完美、規律秩序及廣泛普遍的真實正確性！

以下將詳盡的敘述出憑藉著同類歸納推理法完成的統整綜合規則，用以表明一般化方程式內涵結構。當在理論驗證時必頻繁引用到最普遍的多邊形餘弦定理公式及平面幾何學中慣常應用的輔助圖形作圖法來達成推理實證的演繹工作。

貳、本文

接著在本文敘述的導證過程中，將詳盡列舉闡述出平面凸多邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的綜合定則，並逐步解說各種不同公式推證時，在規則下見證出他們相互之間的一致共同規律秩序關係！而在下列撰文推理演繹的運算過程中，須應用或對照到下述已知的數個基本數學性質；

A. 數學基本性質---引理：

引理 1. 平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的向量為 $\vec{V_1}$，$\overline{A_2A_3}=V_2$ 的向量為 $\vec{V_2}$，⋯，$\overline{A_nA_1}=V_n$ 的向量為 $\vec{V_n}$，則此平面凸 n 邊形即為此 n 個向量按順序箭頭接箭尾 相加而成的封閉凸 n 邊形。

依向量加法性質知；$\sum_{m=1}^{n}\vec{V_m}=0=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}=0$

此處 θ_m 為 V_m 在直角座標平面上的方位角。$\vec{i}$ 為正 X 軸方向的單位向量，$\vec{j}$ 為正 Y 軸方向的單位向量，再由平面正交座標系性質知；

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \text{ 且 } \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

現在將頂點 A_1 置於直角座標平面上的原點 O，如下圖 (1)，使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \qquad (1)$$

且

$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \qquad (2)$$

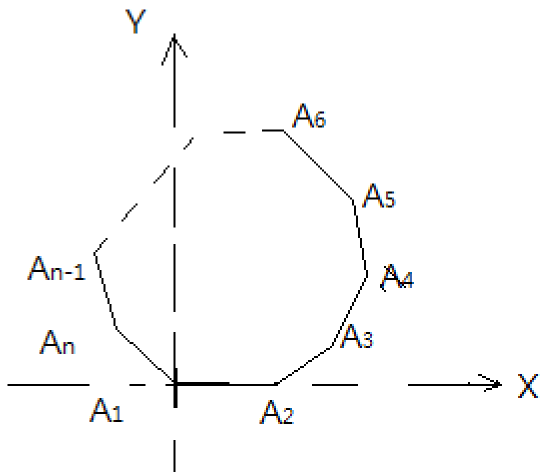

圖 1、凸 n 邊形

證明：由圖 1. 知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，而 V_1 的方位角 θ_1 為零，V_2 的方位角 θ_2 為 $\pi - A_2$，V_3 的方位角 θ_3 為 $(\pi - A_2)(\pi - A_3)$，V_4 的方位角 θ_4 為 $(\pi - A_2)+(\pi - A_3)+(\pi - A_4)$，…………，$V_n$ 的方位角 θ_n 為 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\cdots+A_n)$。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中：

$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$　且　$\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$　，則

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$$

$$=V_1+V_2\cos(\pi-A_2)+V_3\cos(2\pi-A_2-A_3)+\cdots+V_n\cos\left[(n-1)\pi-\sum_{k=2}^{n}A_k\right]=0$$

將上列等式改寫成下式；

得　$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0 \tag{1}$$

同理，　再得　$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0 \tag{2}$$

引理的各邊長與各頂角關係證明完成。

引理 1.的一組方程式(1)與(2)是因以線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 為底，疊置在 X 軸所求得的結果，若換成以 $\overline{A_2A_3}=V_2$ 為底，將求得類似的另一組方程式。以此類推，總共會得出 n 組。這 n 組方程式是非常好應用的，尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的關係式時至為有效！

引理 2. 在平面上給定一個凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$，則此凸多邊形所有內角總和為

$$A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$$

證明：略。

引理 3. 任給一圓內接偶數邊 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$，$n$=2k+2，k 為自然數，則此多邊形的頂角組合

$$A_1+A_3+A_5+A_7+\ldots+A_{n-3}+A_{n-1}$$

$$=A_2+A_4+A_6+A_8\ldots+A_{n-2}+A_n=\frac{1}{2}(n-2)\pi$$

證明：略。

引理 4. 三角函數角度的和差轉換公式

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

引理 5. 在平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令線段長 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_5} = V_4$，$\overline{A_5A_6} = V_5$，$\overline{A_6A_7} = V_6$，$\overline{A_7A_1} = V_7$，如圖 2.

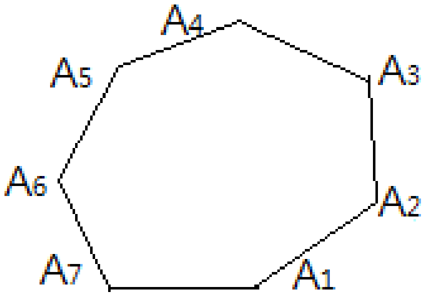

圖 2

則此凸七邊形各邊長與頂角關係的餘弦定理公式為下列方程式(3)；

$$\begin{aligned}
V_7^2 = {} & V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4 \\
& - 2V_4V_5\cos A_5 - 2V_5V_6\cos A_6 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3 + A_4) \\
& + 2V_3V_5\cos(A_4 + A_5) + 2V_4V_6\cos(A_5 + A_6) - 2V_1V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4) \\
& - 2V_2V_5\cos(A_3 + A_4 + A_5) - 2V_3V_6\cos(A_4 + A_5 + A_6) \\
& + 2V_1V_5\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) + 2V_2V_6\cos(A_3 + A_4 + A_5 + A_6) \\
& - 2V_1V_6\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)
\end{aligned} \tag{3}$$

證明：應用引理 1. 取 $n=7$ 代入一組方程式(1)與(2)，並應用引理 2.再化簡可得

$$\begin{aligned}
V_1 = {} & V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2 + A_3) + V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4) + V_5\cos(A_6 + A_7 + A_1) \\
& - V_6\cos(A_7 + A_1) + V_7\cos A_1
\end{aligned} \tag{1-1}$$

$$\begin{aligned}
& V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2 + A_3) + V_4\sin(A_2 + A_3 + A_4) - V_5\sin(A_6 + A_7 + A_1) \\
& + V_6\sin(A_7 + A_1) - V_7\sin A_1 = 0
\end{aligned} \tag{2-1}$$

仿效這組方程式，令將方程式(1-1)及(2-1)換成以 V_7 為底，可得下列兩式；

$$V_7 = V_1\cos A_1 - V_2\cos(A_1+A_2) + V_3\cos(A_1+A_2+A_3) + V_4\cos(A_5+A_6+A_7) - V_5\cos(A_6+A_7) + V_6\cos A_7 \tag{1-5}$$

$$V_1\sin A_1 - V_2\sin(A_1+A_2) + V_3\sin(A_1+A_2+A_3) - V_4\sin(A_5+A_6+A_7) + V_5\sin(A_6+A_7) - V_6\sin A_7 = 0 \tag{2-5}$$

將方程式(1-5)及方程式(2-5)等號兩側各自完全平方，得

$$\begin{aligned}
V_7^2 = {} & V_1^{\,2}\cos^2 A_1 + V_2^{\,2}\cos^2(A_1+A_2) + V_3^{\,2}\cos^2(A_1+A_2+A_3) + V_4^{\,2}\cos^2(A_5+A_6+A_7) \\
& + V_5^{\,2}\cos^2(A_6+A_7) + V_6^{\,2}\cos^2 A_7 - 2V_1V_2\cos A_1\cos(A_1+A_2) \\
& + 2V_1V_3\cos A_1\cos(A_1+A_2+A_3) + 2V_1V_4\cos A_1\cos(A_5+A_6+A_7) \\
& - 2V_1V_5\cos A_1\cos(A_6+A_7) + 2V_1V_6\cos A_1\cos A_7 - 2V_2V_3\cos(A_1+A_2) \\
& - 2V_2V_4\cos(A_1+A_2)\cos(A_5+A_6+A_7) + 2V_2V_5\cos(A_1+A_2)\cos(A_6+A_7) \\
& - 2V_2V_6\cos(A_1+A_2)\cos A_7 + 2V_3V_4\cos(A_1+A_2+A_3)\cos(A_5+A_6+A_7) \\
& - 2V_3V_5\cos(A_1+A_2+A_3)\cos(A_6+A_7) + 2V_3V_6\cos(A_1+A_2+A_3)\cos A_7 \\
& - 2V_4V_5\cos(A_5+A_6+A_7)\cos(A_6+A_7) + 2V_4V_6\cos(A_5+A_6+A_7)\cos A_7 \\
& - 2V_5V_6\cos(A_6+A_7)\cos A_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = {} & V_1^{\,2}\sin^2 A_1 + V_2^{\,2}\sin^2(A_1+A_2) + V_3^{\,2}\sin^2(A_1+A_2+A_3) + V_4^{\,2}\sin^2(A_5+A_6+A_7) \\
& + V_5^{\,2}\sin^2(A_6+A_7) + V_6^{\,2}\sin^2 A_7 - 2V_1V_2\sin A_1\sin(A_1+A_2) \\
& + 2V_1V_3\sin A_1\sin(A_1+A_2+A_3) - 2V_1V_4\sin A_1\sin(A_5+A_6+A_7) \\
& + 2V_1V_5\sin A_1\sin(A_6+A_7) - 2V_1V_6\sin A_1\sin A_7 - 2V_2V_3\sin(A_1+A_2)\sin(A_1+A_2+A_3) \\
& + 2V_2V_4\sin(A_1+A_2)\sin(A_5+A_6+A_7) - 2V_2V_5\sin(A_1+A_2)\sin(A_6+A_7) \\
& + 2V_2V_6\sin(A_1+A_2)\sin A_7 - 2V_3V_4\sin(A_1+A_2+A_3)\sin(A_5+A_6+A_7) \\
& + 2V_3V_5\sin(A_1+A_2+A_3)\sin(A_6+A_7) - 2V_3V_6\sin(A_1+A_2+A_3)\sin A_7 \\
& - 2V_4V_5\sin(A_5+A_6+A_7)\sin(A_6+A_7) + 2V_4V_6\sin(A_5+A_6+A_7)\sin A_7 \\
& - 2V_5V_6\sin(A_6+A_7)\sin A_7
\end{aligned}$$

再將這兩個完全平方式相加，繼續應用引理 4.及引理 2.的公式，代入運算再詳盡化簡，最後就得證出總計有 21 項式的方程式(3) 。

方程式(3)不僅僅適用於平面凸七邊形，也適用於各種形狀的平面凹七邊形。

B. 歸納平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式的綜合定則

計算兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式時，發現得到的公式顯示出兩對角線長度乘積的平方式等於若干個兩邊長乘積的平方項的和再加上許多個由四個邊長乘積並乘以無量綱的 cosine 函數項式共同組合而形成。因此，公式中的各項式在數學運算上的量綱都是邊長的四次方。

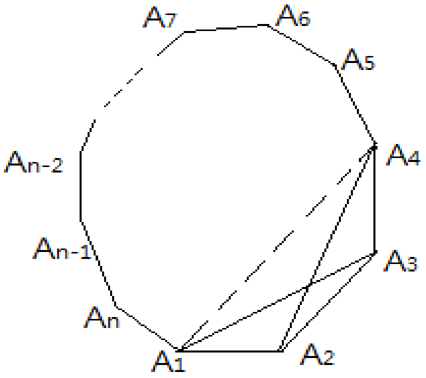

圖 3、平面凸 n 邊形

理論上計算這些公式時，由圖形的一般性，請參考上圖 3.，選擇直觀的採取此多邊形最前緣的四個頂點所形成的兩交叉對角線，而此四頂點 A_1、A_2、A_3、A_4則將多邊形的 n 個邊長區分成四份；第一份為邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，第二份是邊長 $\overline{A_2A_3}=V_2$，第三份邊長 $\overline{A_3A_4}=V_3$，第四份最多邊長有 $n-3$ 個邊為 $\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_8}=V_7$，…，$\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$ 。再由這四份的邊長分別來進行圖形相對邊乘積結合，而歸納統整出完整的一系列方程式，且比對這所有公式的內涵型態都能見到它們之間一一展現出最精實相似又彼此輝映的一貫性共同規律秩序特質！

以下就是透過比對研究歸納出的 2 個綜合定則，用來明列出平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式，這些被預先列舉出的每一個凸多邊形公式的等號

右側內容恰好共分成二部份，再看下圖 3.的一般形平面凸 n 邊形；

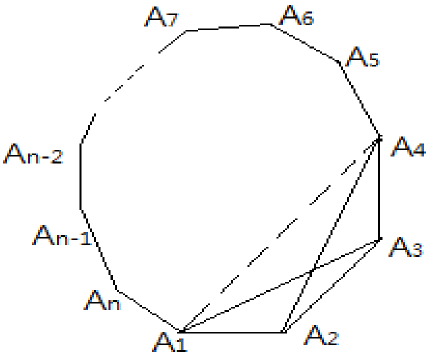

圖 3

任給一平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8\cdots A_{n-4}A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}A_n$ ，令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_8}=V_7$，…，$\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，$4\le n$，$n$ 為正整數，現在直覺選取連接 A_1 和 A_3 兩頂點及其相鄰的 A_2 和 A_4 兩頂點使之形成臨近周邊兩對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$ 及 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$，此四頂點 A_1、A_2、A_3、A_4 將這凸 n 邊形的所有邊長分隔編列成兩組相異集合；第一組相對邊邊長集合只有兩元素是 {V_1，V_3}，而第二組相對邊的邊長集合內共計有 $n-2$ 個元素，其集合內的元素是 {V_2，V_4，V_5，V_6，V_7，V_8，…，V_{n-4}，V_{n-3}，V_{n-2}，V_{n-1}，V_n}，這兩組集合皆為此四頂點所構成的圖形中各以相對邊的邊長來形成集合。

綜合定則[1]. 公式中等號右側內容的第一部份組成結構：

(1a)　將第一組邊長集合內兩元素相乘並使此乘積再完全平方，得 $(V_1V_3)^2$，

(1b)　二組邊長集合的第一個元素是 V_2，其在 n 邊形圖形中的對面共有 $n-3$ 個相對邊，分別為 V_4，V_5，V_6，V_7，V_8，…，V_{n-4}，V_{n-3}，V_{n-2}，V_{n-1}，V_n；現在取 V_2 分別與每一個相對邊邊長相乘，之後使每一乘積再各自完全平方，然後將此 $n-3$ 個平方式相加，得 $(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_2V_8)^2+\ldots+(V_2V_{n-3})^2+(V_2V_{n-2})^2+(V_2V_{n-1})^2+(V_2V_n)^2$， (1c) 後再將(1a).與(1b).的所有兩組的平方項相加，這樣就構成了被預先表列出的公式中第一部份內容結構的平方項的總和。此部份內容共有 $n-2$ 項，這完整歸納得來的第一部份組成結構內容應記為下列型式；

$$(V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 + (V_2V_7)^2 + (V_2V_8)^2 + \ \dots\ + (V_2V_{n-3})^2 +$$

$$(V_2V_{n-2})^2 + (V_2V_{n-1})^2 + (V_2V_n)^2 \quad ,$$

綜合定則[2]. 公式中等號右側內容的第二部份內項數的組成結構：

公式中第二部分內涵裡的每一項是由係數 2 乘以此多邊形的 4 個邊長乘積再乘上 cosine 函數所構成的，而邊長可重複。此係數 2 是運算出的必然常數。

(2a) 每一項的 4 個邊長乘積內容必須按下述步驟依序組合：

由前述綜合定則[1].所獲得的共有 $n-2$ 個兩邊長乘積項依序排列如下；

V_1V_3、V_2V_4、V_2V_5、V_2V_6、V_2V_7、V_2V_8、…、V_2V_{n-3}、V_2V_{n-2}、V_2V_{n-1}、V_2V_n。

現在將這 $n-2$ 乘積項任取 2 個來相乘，總共就有 C_2^{n-2} 個 4 邊長乘積項，其組合的各項式形式結構依順序表列於下；$V_1V_2V_3V_4$，$V_1V_2V_3V_5$，$V_1V_2V_3V_6$，$V_1V_2V_3V_7$，$V_1V_2V_3V_8$，⋯，$V_1V_2V_3V_{n-3}$，$V_1V_2V_3V_{n-2}$，$V_1V_2V_3V_{n-1}$，$V_1V_2V_3V_n$，共有 $n-3$ 個。

$V_2^2V_4V_5$，$V_2^2V_4V_6$，$V_2^2V_4V_7$，⋯，$V_2^2V_4V_{n-2}$，$V_2^2V_4V_{n-1}$，$V_2^2V_4V_n$，共有 $n-4$ 個。

$V_2^2V_5V_6$，$V_2^2V_5V_7$，$V_2^2V_5V_8$，⋯，$V_2^2V_5V_{n-2}$，$V_2^2V_5V_{n-1}$，$V_2^2V_5V_n$，共有 $n-5$ 個。

$V_2^2V_6V_7$，$V_2^2V_6V_8$，⋯，$V_2^2V_6V_{n-2}$，$V_2^2V_6V_{n-1}$，$V_2^2V_6V_n$，共有 $n-6$ 個。

⋮

$V_2^2V_{n-4}V_{n-3}$，$V_2^2V_{n-4}V_{n-2}$，$V_2^2V_{n-4}V_{n-1}$，$V_2^2V_{n-4}V_n$，共有 4 個。

$V_2^2V_{n-3}V_{n-2}$，$V_2^2V_{n-3}V_{n-1}$，$V_2^2V_{n-3}V_n$，共有 3 個。

$V_2^2V_{n-2}V_{n-1}$，$V_2^2V_{n-2}V_n$，共有 2 個。

$V_2^2V_{n-1}V_n$，僅有 1 個。

因此，得總項數為 1+2+3+4+⋯+($n-5$)+($n-4$)+($n-3$)= $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}=C_2^{n-2}$ 。

(2b)　每一項的 cosine 函數裡呈現的角度組合則以下述之內角排列法則來規範：

(i)　內角排列法則是根據每一個 cosine 項前的 4 個邊長係數右下標數字來決定，請看第一個 cosine 項的邊長積係數為 $V_1V_2V_3V_4$，將其分成前後兩對；前一對是 V_1V_2，這 V_1 與 V_2 的兩個邊長在多邊形圖形上所夾的內角角度是 A_2。後一對 V_3 與 V_4 在此多邊形圖形上所夾的角度是 A_4。這 A_2+A_4 就是出現於第一個 cosine 項( )內的角度排列，組合起來就成為 $V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$ ！

(ii)　然而在(2a).的敘述中出現了眾多的 $V_2^2V_iV_j$ 項，$i\neq j$，這類型項式的前一對 V_2^2，其兩邊長 V_2 在多邊形圖形上所夾的內角角度是零，而後一對 V_i 與 V_j 的兩個邊長在多邊形圖形上所夾的內角角度則仿照(i).的規範。

例 1：$V_2^2V_4V_5$ 這一項就配備著內角 $0+A_5=A_5$，組合後就成為 $V_2^2V_4V_5\cos A_5$ ！

例 2：$V_2^2V_5V_8$ 這一項就配備著內角排列 $0+A_6+A_7+A_8$，組合起來就成為

$V_2^2V_5V_8\ \cos(A_6+A_7+A_8)$ ！

公式中任一 cosine 項( )裡的角度組合都以上述之內角排列法則來思考操作。

(2c)　第二部份內的各 cosine 項前自然出現的正負符號則按下列規律形成：

詳盡比對所有 cosine 項各對映位置內容，發現任一 cosine 項的( )內所出現角度組合之內角個數與其本身的正負符號之間存在著特定的關聯性！這個被歸納出的相關性特徵如下；

(i) 令任給一 cosine 項的四個邊長係數為 $V_aV_xV_bV_y$，現在將此四個邊長係數拆分成前後兩對，前一對是 V_aV_x，這兩個邊長 V_a 與 V_x 依順序由 a 至 x 在多邊形上所夾的內角數目有 k_1 個。而後一對是 V_bV_y，這兩個邊長 V_b 與 V_y 依順序由 b 至 y 在多邊形上所夾的內角數目有 k_2 個。 令 $k_1+k_2=k$，k 即為 cosine 項( ) 內的角度總數目，而這被歸納出的正負符號關係式為 $(-1)^{k+1}$，意即由 cosine 項( )內的角度總數目來決定正負符號。當 cosine 項( )內的角度總數目為奇數時，此 cosine 項係數為正。當 cosine 項( )內的角度總數目為偶數時，此 cosine 項的

係數為負。

(ii) 對四個邊長乘積為 $V_a^2 V_b V_y$ 類型的項式而言，V_a^2 的內角數目 $k_1 = 0$，因 V_a^2 的邊長在多邊形圖形上所夾的內角角度是零，即兩 V_a 邊長重疊，沒有任何夾角。而 $V_b V_y$ 的兩邊在多邊形上所夾的內角數目有 k_2 個。故 $k_1 + k_2 = k_2$，這 $V_a^2 V_b V_y$ 項式前的正負符號關係式則被歸納為 $(-1)^{k_2}$ ！此與(i).的情形相異。

因此，此部分每一個被引領的 cosine 項的完整敘述應分別記為下列兩種型式；

$(-1)^{k+1} \cdot 2\, V_a V_x V_b V_y \cos(\, A_{x-(k_1-1)} + \cdots + A_{x-1} + A_x + A_{y-(k_2-1)} + \cdots + A_{y-1} + A_y\,)$。與

$(-1)^{k_2} \cdot 2\, V_a^2 V_b V_y \cos(\, A_{y-(k_2-1)} + \cdots + A_{y-1} + A_y\,)$。

若 x-1 , x-2 , ... , x-(k_1 -1)中任一個出現負數或零，那麼這個負數或零必須加上原凸多邊形的總邊數使其為正。同樣地， y-1 , y-2 , ... , y-(k_2 -1) 情形亦是如此。

例 3：平面凸九邊形由邊長係數為 $V_5 V_6 V_7 V_2$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^{5+1} \cdot 2\, V_5 V_6 V_7 V_2 \cos(\, A_6 + A_8 + A_9 + A_1 + A_2)$$
$$= 2\, V_5 V_6 V_7 V_2 \cos(\, A_6 + A_8 + A_9 + A_1 + A_2)$$

例 4：平面凸九邊形由邊長係數為 $V_4 V_5 V_7 V_1$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^{4+1} \cdot 2\, V_4 V_5 V_7 V_1 \cos(\, A_5 + A_8 + A_9 + A_1)$$
$$= -2\, V_4 V_5 V_7 V_1 \cos(\, A_5 + A_8 + A_9 + A_1)$$

例 5：平面凸七邊形由邊長係數為 $V_2{}^2 V_4 V_6$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^2 \cdot 2\, V_2{}^2 V_4 V_6 \cos(A_5 + A_6) = 2\, V_2{}^2 V_4 V_6 \cos(A_5 + A_6)$$

例 6：平面凸七邊形由邊長係數為 $V_2{}^2 V_4 V_7$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^3 \cdot 2\, V_2{}^2 V_4 V_7 \cos(A_5 + A_6 + A_7) = -2\, V_2{}^2 V_4 V_7 \cos(A_5 + A_6 + A_7)$$

(3) 承上述[1].與[2].的操作守則可得等號右邊每一個多邊形方程式的總項式為

$$(\, n-2\,) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_2^{n-1} \text{ 項。}$$

由遵循上述的 2 個綜合定則即可用來完整敘述並清晰的排列出平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。

C. 展示平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式 與驗證

C-1.平面凸四邊形

[C-1.a] 展示平面凸四邊形內兩交叉對角線長度乘積方程式：

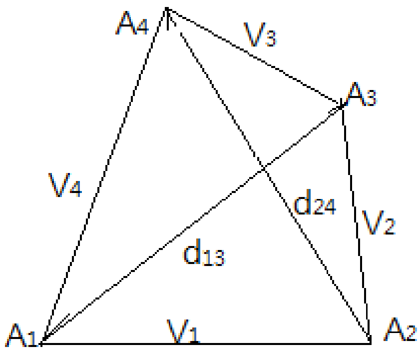

圖 4a

請看上圖 4a.並參照 B.的 2 個綜合定則，先列出兩組相對邊邊長集合；{ V_1 ，V_3 }與{ V_2 ，V_4 }，得兩項相對邊邊長乘積；V_1V_3 、V_2V_4，再依循操作定則所指示的運作排列，得這平面凸四邊形內兩交叉對角線長度乘積方程式如下；

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4) \qquad (4)$$

[C-1.b] 證明平面凸四邊形一般化方程式(4)；請看圖 4.範例的作圖解說與證明；

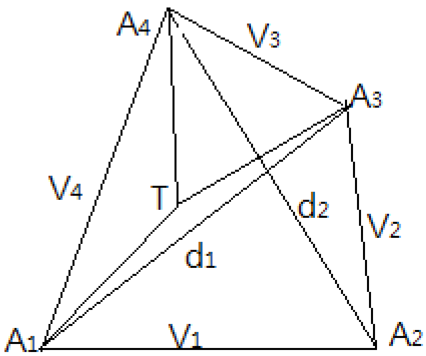

圖 4

(1) 對於四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，在頂點 A_4 處向圖形內側作一射線 A_4T，使 $\angle A_1A_4T = \angle A_2A_4A_3$，又在頂點 A_1 處對圖形內側作另一射線 A_1T，使 $\angle A_4A_1T = \angle A_4A_2A_3$，此兩射線交在 T 點；則 $\Delta A_1A_4T \approx \Delta A_2A_4A_3$（互為相似形）且 $\angle A_4TA_1 = \angle A_4A_3A_2$。並繼續連接 T 與 A_3 兩點，使形成線段 TA_3。$\overline{A_1A_3} = d_1$ 及 $\overline{A_2A_4} = d_2$。

(2) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係，得 $V_4 : d_2 = \overline{A_1T} : V_2 = \overline{A_4T} : V_3 \Rightarrow$ 可得 $V_4 : \overline{A_4T} = d_2 : V_3$，再由 $\angle A_1A_4A_2 = \angle TA_4A_3$ 及兩對應邊長成正比例與其夾角相等的相似形性質，可得知兩相似形關係 $\Delta A_1A_4A_2 \approx \Delta TA_4A_3$，因此可得 $\angle A_4A_1A_2 = \angle A_4TA_3$，且有另一組正比例關係為 $V_4 : \overline{A_4T} = d_2 : V_3 = V_1 : \overline{A_3T}$。

(3) 對作圖 4.中的 ΔTA_1A_3 言，由餘弦定理知

$d_1{}^2 = (\overline{A_1T})^2 + (\overline{A_3T})^2 - 2(\overline{A_1T})(\overline{A_3T})\cos(\angle A_1TA_3)$，而在上述(2).的兩組正比例關係式中可求得 $\overline{A_1T} = (V_2V_4)/d_2$ 及 $\overline{A_3T} = (V_1V_3)/d_2$，將此兩者代入餘弦定理公式內並化簡、整理，可得下列新方程式(4-a)；

$$d_1{}^2d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(\angle A_1TA_3) \tag{4-a}$$

(4) 在頂點 T 處四周圍角度關係可知 $\angle A_1TA_3 = 2\pi - \angle A_4TA_3 - \angle A_1TA_4 = 2\pi - \angle A_4A_1A_2 - \angle A_4A_3A_2 = A_2$(頂角)+ A_4(頂角)，此處對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，其四個頂角總和為 2π，所以將 $\angle A_1TA_3 = A_2 + A_4$ 代入方程式(4-a)，即得證出平面凸四邊形兩交叉對角線長度乘積一般化方程式為下方程式(4-b)；

$$d_1{}^2d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4) \tag{4-b}$$

又此處的兩對角線長 $d_1 = d_{13}$ 及 $d_2 = d_{24}$，代入方程式(4-b)，即得下方程式(4)；

$$d_{13}{}^2d_{24}{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4) \tag{4}$$

平面凸四邊形的方程式(4)等號右邊共有項式 $C_2^{4-1} = C_2^3 = 3$ 項。證明完成。

C-2. 平面凸五邊形

[C-2.a] 展示平面凸五邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式：

請看下圖 5.並參照 B.的 2 個綜合定則，先列出兩組相對邊邊長集合；{ V_1，V_3} 與 { V_2，V_4，V_5 }，得 3 項相對邊邊長乘積；V_1V_3、V_2V_4、V_2V_5，依操作定則的規劃排列，得這平面凸五邊形內兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式如下；

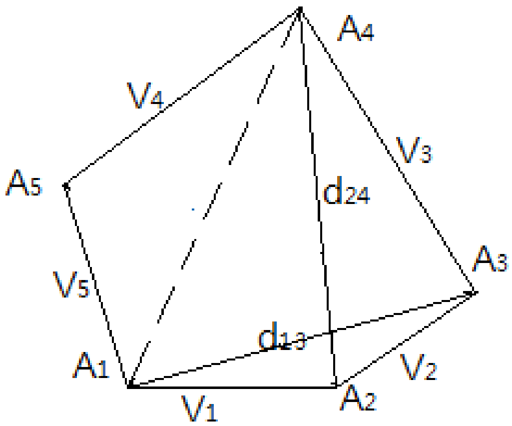

圖 5

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \qquad (5)$$

平面凸五邊形的方程式(5)等號右邊共有項式 $C_2^{5-1} = C_2^4 = 6$ 項。

[C-2.b] 證明：略。此證明方法與下方 C-5.之平面凸八邊形情形完全相同。

C-3. 平面凸六邊形

[C-3.a] 展示平面凸六邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式：請看下圖 6.並參照 B.的 2 個綜合定則，先列出兩組相對邊邊長集合；{ V_1，V_3}與 { V_2，V_4，V_5，V_6 }，得 4 項相對邊邊長乘積；V_1V_3、V_2V_4、V_2V_5、V_2V_6，依操作的規則，得六邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式如下；

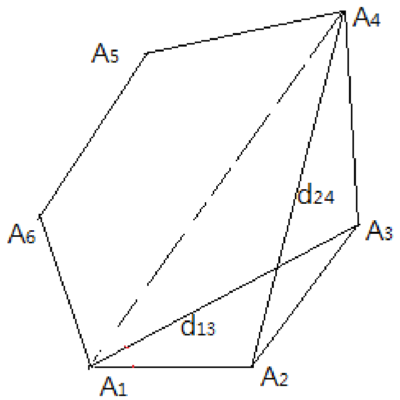

圖 6.

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$
$$+ 2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2 + A_4 + A_5) - 2V_6V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5$$
$$- 2V_2^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_2^2V_4V_6\cos(A_5 + A_6) \qquad (6)$$

平面凸六邊形的方程式(6)等號右邊共有項式 $C_2^{6-1} = C_2^5 = 10$ 項。

[C-3.b] 證明：略。此證明方法與下方 C-5.之平面凸八邊形情形完全相同。

C-4. 平面凸七邊形

[C-4.a] 展示平面凸七邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式：

請看下圖 7.並參照 B.的 2 個綜合定則，先列出兩組相對邊邊長集合；{V_1，V_3} 與 {V_2，V_4，V_5，V_6，V_7}，得出 5 項相對邊邊長乘積；V_1V_3、V_2V_4、V_2V_5、V_2V_6、V_2V_7，再依操作的完整理念，列出七邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式如下；

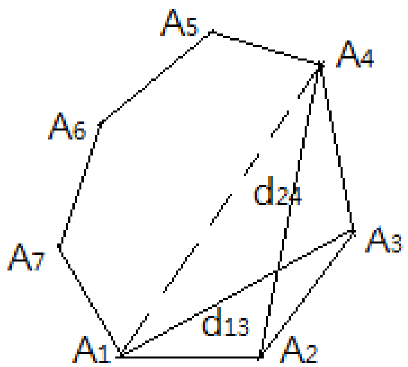

圖 7

$$d_{13}{}^2 d_{24}{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 + (V_2V_7)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$
$$- 2V_2{}^2 V_4V_5\cos A_5 - 2V_2{}^2 V_5V_6\cos A_6 - 2V_2{}^2 V_6V_7\cos A_7 +$$
$$2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2 + A_4 + A_5\right) + 2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5 + A_6\right) +$$
$$2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6 + A_7\right) - 2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) -$$
$$2V_2{}^2V_4V_7\cos(A_5 + A_6 + A_7) + 2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \quad (7)$$

平面凸七邊形的方程式(7)等號右邊共有項式 $C_2^{7-1} = C_2^6 = 15$ 項。

[C-4.b] 證明：略。此證明方法與下方 C-5.之平面凸八邊形情形完全相同。

【待續】