摺紙學數學--根號 N 螺線：從簡化到立體螺線收納盒

陳哲成 [1*] 顏敏姿 [2]

[1] 國立屏東女子高級中學

[2] 高雄市立楠梓國民中學

在「藝數摺學」FB 社團成立後，筆者陸續參加過不少研習，有一個印象深刻的單元「根號 N 螺線」，在研習過後也延伸並共備了新的課程，底下就把心得與發展的新想法作分享，也當作拋磚引玉，期待可以激盪出更多火花。

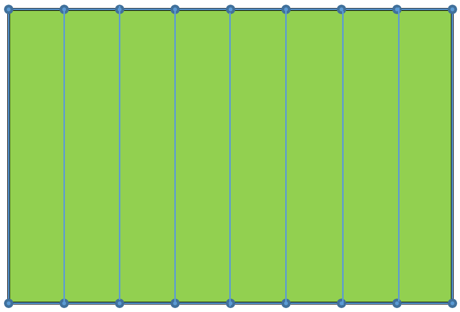
這個圖形（如下圖一）是學生學習無理數 $\sqrt{n}$ 時，都會看到的一個圖形。實際的教學顯示，透過摺紙，很容易讓學生獲得真實的感受。參加過研習的老師們一定也很難忘記那個漂亮的廣用酸鹼指示/根號 N 螺線的模板，個人實施課程的時候覺得有些學生對於摺那麼多的摺線感到困擾，所以以相同的原理簡化為 A4(比例)紙八等分摺的方式來替代，讓不習慣摺紙的學生，可以較快的完成。以下探討為什麼使用這個比例的一些想法。

圖一

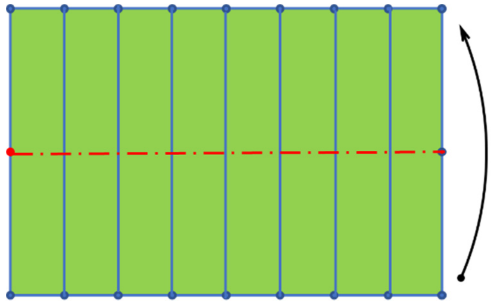
*為本文通訊作者

一、摺法

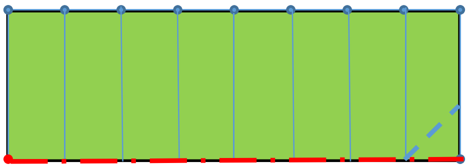
(1) A4 比例紙，摺 8 等分參考線(如藍線)



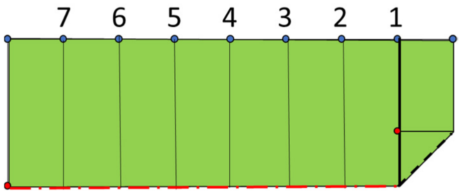
(2)沿紅線對摺



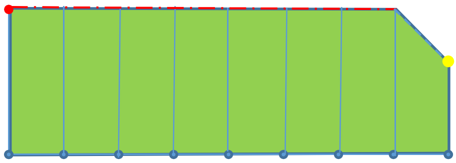
(3)摺 45°



(4) 如圖，紅點摺至第 1 號線

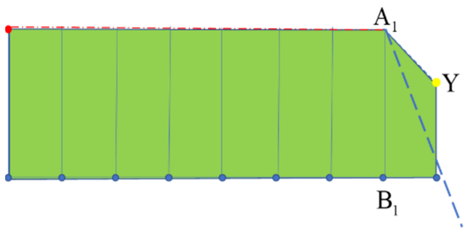


(5)下翻(翻面，開口朝下)

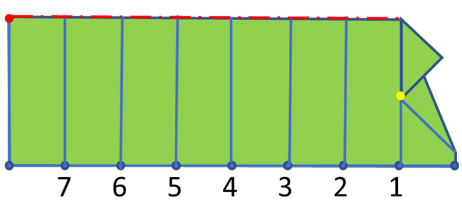


(6)沿藍色谷線將黃點摺至 1 號線

(往前摺 $\angle YA_1B_1$ 的角平分線)

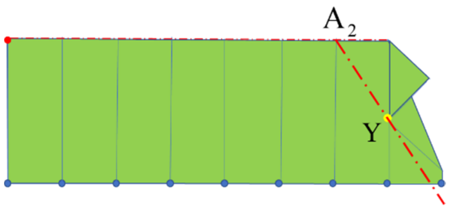


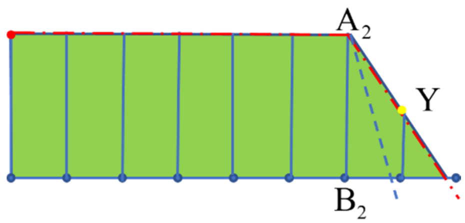
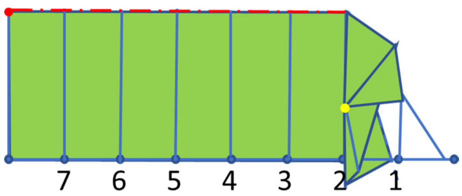
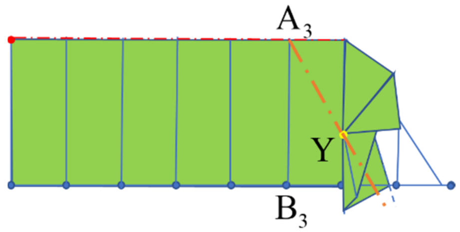
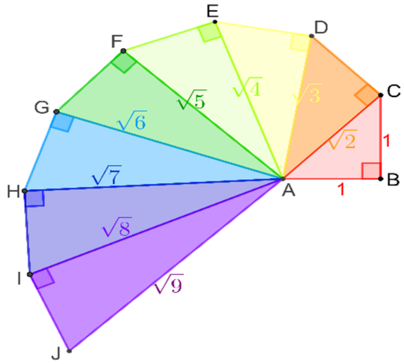
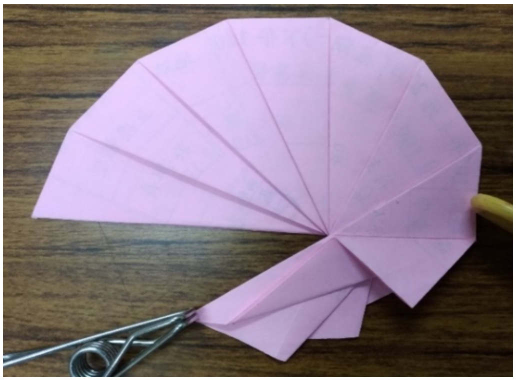
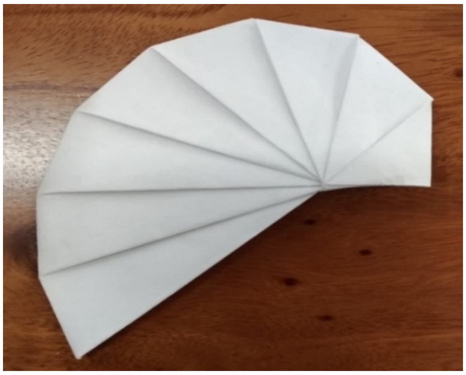
(7)

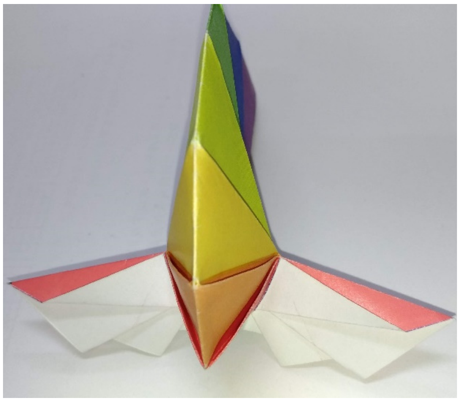
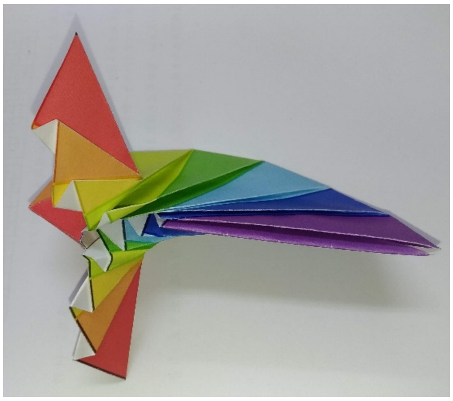
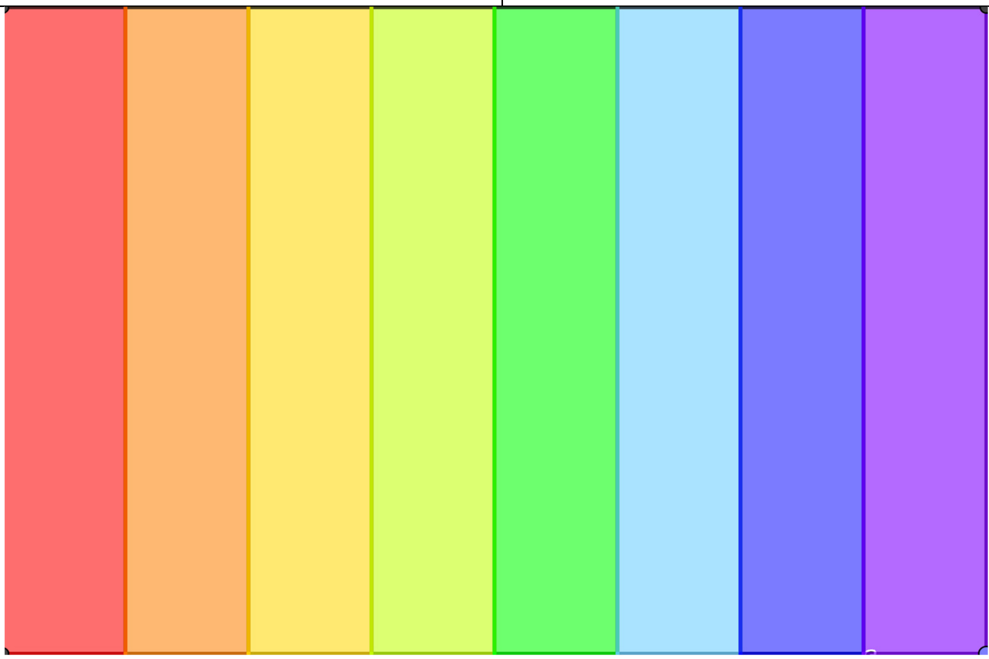


(8)如圖，第 2 條藍線與黃點連線山摺

(往後摺直線 A_2Y)



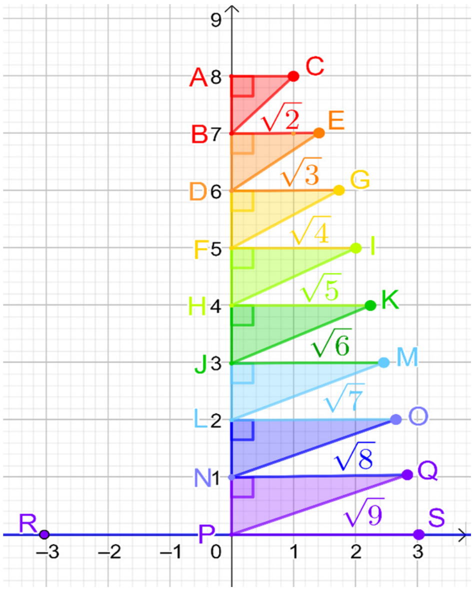
<table>
<tr>
<td>(9)沿藍色谷線將黃點摺至直線 A_2B_2
(往前摺 $\angle YA_2B_2$ 的角平分線)

</td>
<td>(10)如圖

</td>
</tr>
<tr>
<td>(11)如圖，沿紅線山摺(往後摺直線 A_3Y)
依此要領反覆摺至最後一條藍線。

</td>
<td>(11-a)

</td>
</tr>
<tr>
<td>(12)將多餘部分往內收合
</td>
<td>(12-a)
</td>
</tr>
<tr>
<td>(12-b)正面
</td>
<td>(12-c)反面
</td>
</tr>
</table>

(13)準備塞入(由上方往下看) 	(13-a)整理後準備塞入(由下方往上看) 
(13-b) 	(13-c) 
	

二、 為什麼選用 A4 比例的紙以八等分去摺呢?

要探討這個問題，首先把摺好的這張螺線紙攤開，利用長度與畢氏定理來理解各個直角三角形之間的關係。為了說明方便起見，我們在平面直角座標系統上畫圖，希望藉由直角座標系獲得一些靈感。以下提供一些步驟，供大家參考。

1. 如右圖二，$\overline{AC}=\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=\overline{BE}=\sqrt{2}$，$\overline{DE}=\overline{DG}=\sqrt{3}$，$\overline{FG}=\overline{FI}=\sqrt{4}=2$，$\overline{HI}=\overline{HK}=\sqrt{5}$，$\overline{JK}=\overline{JM}=\sqrt{6}$，$\overline{LM}=\overline{LO}=\sqrt{7}$，$\overline{NO}=\overline{NQ}=\sqrt{8}$，$\overline{PQ}=\overline{PS}=\sqrt{9}=3$，且 $\overline{AB}=\overline{BD}=\cdots=\overline{NP}=1$
   可知 Q 點坐標為 $Q(\sqrt{8},1)=(2\sqrt{2},1)$

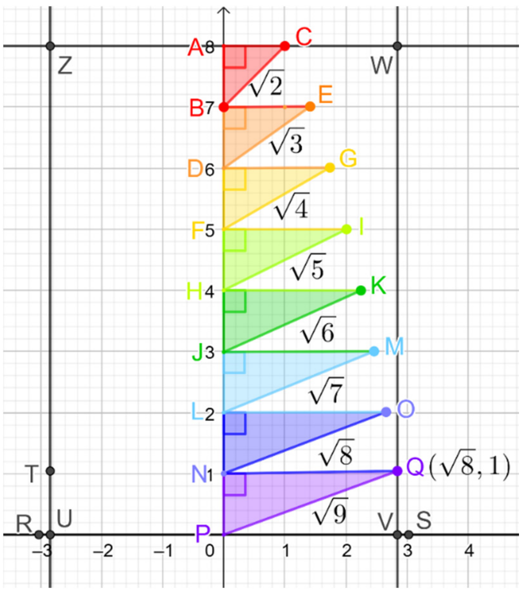


圖二

2. 所以我們只需按矩形 UVWZ 裁下(如下圖三)，就可以摺出 $\sqrt{1}$ 到 $\sqrt{9}$ 的這些根號數，這樣的紙的長寬比為何？顯然 長: 寬 $=8:\ 2\sqrt{8}=\sqrt{8}:2=\sqrt{2}:1$
   ，也就是 A4 紙的長寬比。這說明了以 A4 紙去摺製是恰當的。

三、 C, E, G, I, K, M, O, Q, S 點是否在同一個函數的圖形上？

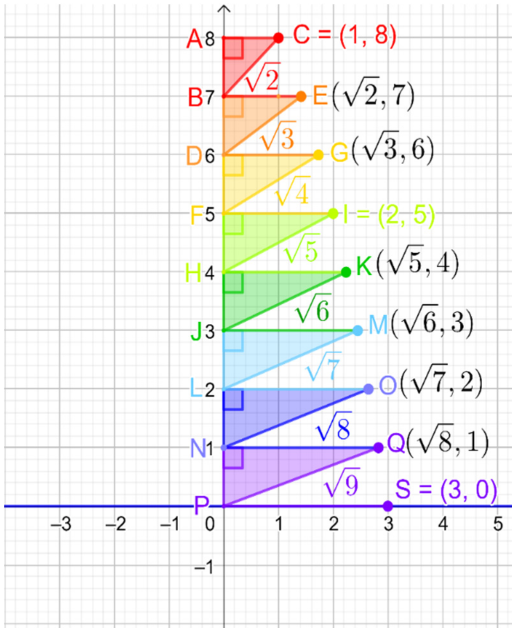
1. 將 C, E, G, I, K, M, O, Q, S 這些點以匀滑曲線連接起來，是否像是同在一個函數圖形上的點呢？是不是可以求出這個函數呢？請利用右圖三畫畫看，並請學生說說他的看法。
2. 將上述的點，標出坐標或許可以帶給我們一些靈感也說不定。
3. 再加上我們本來就以 y 軸為對稱軸去摺出這個螺線的形狀的，是否因此可以決定出這個圖形的函數呢?
4. 由右圖四是否發現 x 坐標與 y 坐標似乎存在著一種奇妙的關係。請學生說說他的看法。



圖三

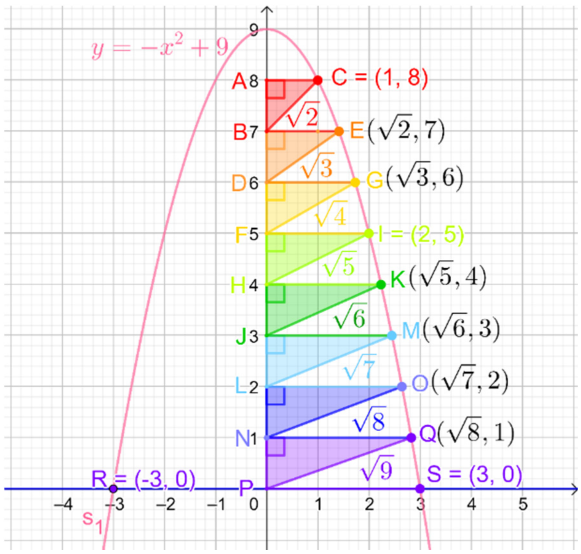
試著讓讓學生寫出 x 與 y 的關係式。

5. 不難發現 x 坐標的平方加 y 坐標等於定值 9，這時候應該會有學生可以說出 $x^2+y=9$ 這個關係。也就是 C , E , G , I , K , M , O , Q，S 每一個點都在 $y=-x^2+9$ 的圖形上，也就是這些點都是函數 $f(x)=-x^2+9$ 圖形上的點。



圖四

6. 如果學生觀察到：該圖原本就是以 y 軸對摺而得到圖形，應該不難猜出這個圖形是拋物線，那麼我們可以利用這個拋物線通過 x 軸上相異兩點 $S(3,0), R(-3,0)$ 的特性，假設二次函數為 $f(x)=a(x-3)(x+3)$，又此函數圖形通過點 $C(1,8)$，可以得到 $a(1-3)(1+3)=8$，即 $a=-1$，故 $f(x)=-(x-3)(x+3)=-x^2+9$，再一一檢驗各點，便可知道原來這些點都在這個開口朝下的拋物線上，如圖五。

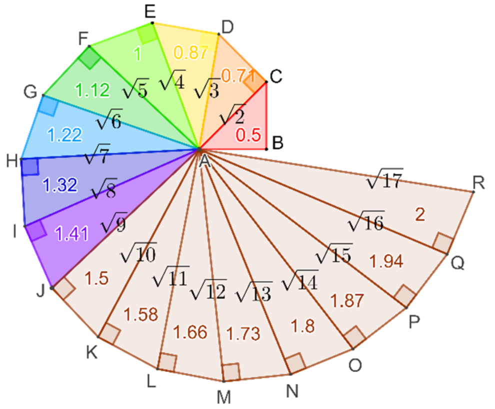


圖五

四、　摺一個 $\sqrt{1}$ 到 $\sqrt{17}$ 螺線，請問紙張的長寬比應該為何?

如果我們想摺一個 $\sqrt{1}$ 到 $\sqrt{17}$ 螺線，請問紙張的長寬比應該為何？透過前述的方法可以找到這個長寬比為 $16:2\sqrt{16}=2:1$，這時候只要將正方形色紙對半裁成兩張矩形，然後長邊以 16 等分去摺，就可以試試看了。事實上收成立體的部分還有些技巧需要克服，不過應該可以試著完成看看。

如圖六給出了關於 $\sqrt{n}$ 的圖像，我們很容易可以觀察到下列的關係(參考圖六，以線段 AB 長度為 1)：



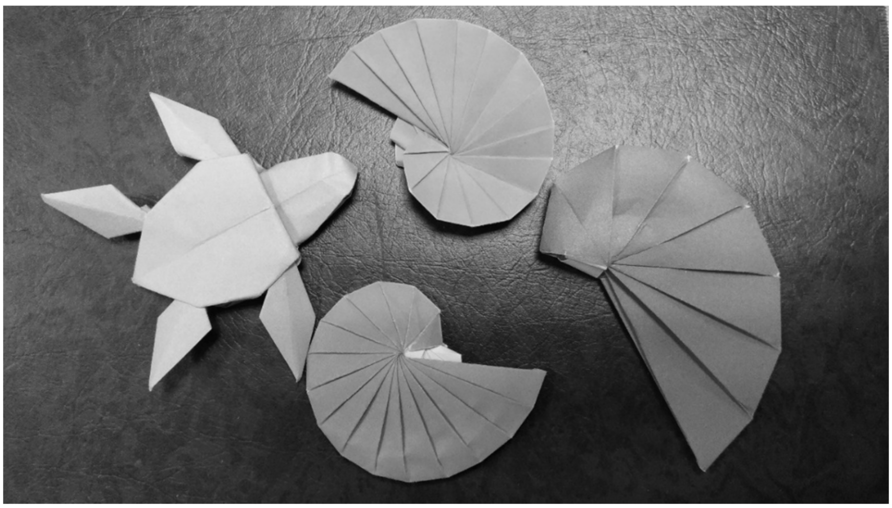
圖六

1. 就線段長度而言，可以看到

$$\overline{AC}=\sqrt{2},\overline{AD}=\sqrt{3},\overline{AE}=\sqrt{4},\overline{AF}=\sqrt{5},\overline{AG}=\sqrt{6},\overline{AH}=\sqrt{7},\overline{AI}=\sqrt{8},\overline{AJ}=\sqrt{9},\cdots$$

2. 就三角形的面積而言，可以得到 $a\Delta ABC=\frac{1}{2},a\Delta ACD=\frac{\sqrt{2}}{2},a\Delta ADE=\frac{\sqrt{3}}{2},a\Delta AEF=\frac{\sqrt{4}}{2},$

$$a\Delta AFG=\frac{\sqrt{5}}{2},\ a\Delta AGH=\frac{\sqrt{6}}{2},\ a\Delta AHI=\frac{\sqrt{7}}{2},a\Delta AIJ=\frac{\sqrt{8}}{2},a\Delta AJK=\frac{\sqrt{9}}{2},\cdots$$



3. .接下來想談談角度的問題

設

$\angle BAC=\theta_1,\angle CAD=\theta_2,\angle DAE=\theta_3,\angle EAF=\theta_4,\angle FAG=\theta_5,\angle GAH=\theta_6,\angle HAI=\theta_7,\cdots$

如果以反正切函數來表示角度可以很容易套用，例如

$$\theta_1=\tan^{-1}\tfrac{1}{1},\theta_2=\tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{2}},\theta_3=\tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{3}},\theta_4=\tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{4}},\theta_5=\tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{5}},\cdots,\theta_n=\tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{n}},\cdots$$

這些角度我們可以透過計算機運算或查表得到，如下表所示

角度	$\tan^{-1}\frac{1}{1}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{8}}$
度數	45°	35.26439°	30°	26.56505°	24.09484°	22.20765°	20.70481°	19.47122°
角度	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{9}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{16}}$
度數	18.43495°	17.5484°	16.77865°	16.10211°	15.50136°	14.96322°	14.47751°	14.03624°

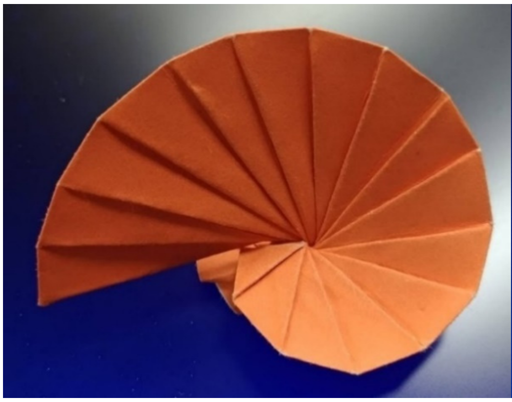
(1) $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_6=\tan^{-1}\frac{1}{1}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 183.1319^\circ>180^\circ$

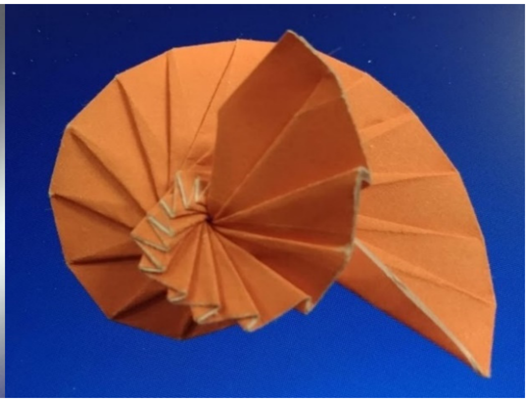
此時可以了解 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_6$ 很接近平角，即 B、A、H 三點並不共線。

(2) $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_8=\tan^{-1}\frac{1}{1}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{8}}\approx 223.308^\circ$

(3) $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{16}=\tan^{-1}\frac{1}{1}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{16}}\approx 351.1504^\circ<360^\circ$

所以摺到 16 等分時，旋轉的角度總和約為 351.1504°，還不會有螺旋重疊的部分。°



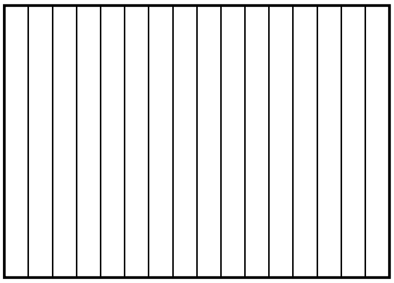
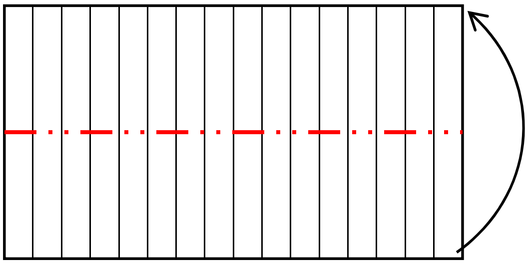
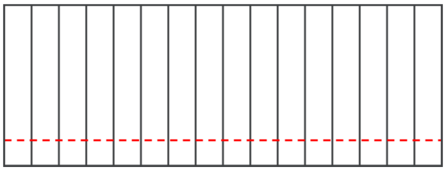
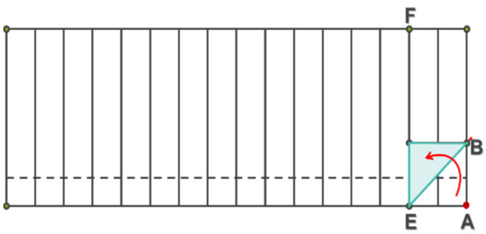


五、　應用與推廣--立體「螺線收納盒」摺製

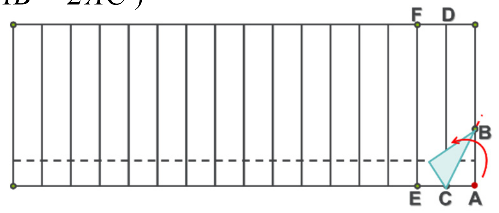
接下來我們將上述的結論作推廣，說明由台北科技大學李家祥教授指導的立體螺線盒摺製方式，摺製立體「螺線收納盒」(如圖七)。

圖七

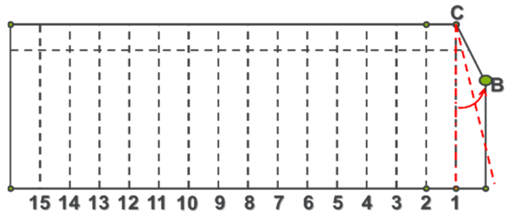
摺製步驟如下：

(1) 取 A4 比例的紙 16 等分 	(2) 將短邊對摺(開口朝上) 
(3)將中心線往上摺一條一等分寬的平行線(如紅線)後攤開。 	(4)將 A 點摺至第二等分線 EF，找出 B 點。 

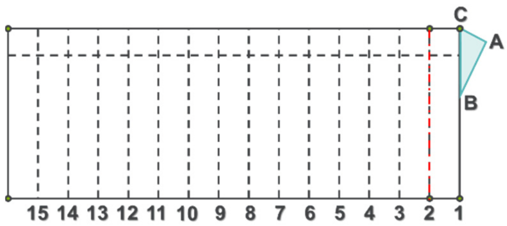
(5) 第一個三角形從三邊 1:2: $\sqrt{5}$ 開始。
($\overline{AB}=2\overline{AC}$)



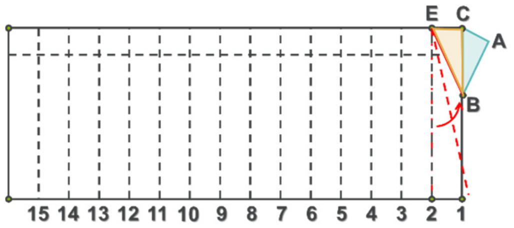
(6)往上翻至背面，將$\overline{BC}$摺至與第 1 等分線貼齊。



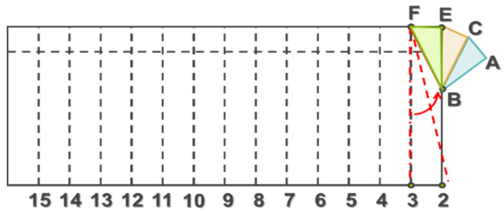
(7) 將剛剛摺出的角平分線內縮後，得出第一個直角三角形。



(8) 參考平面的螺線摺法，摺出第二個三角形。

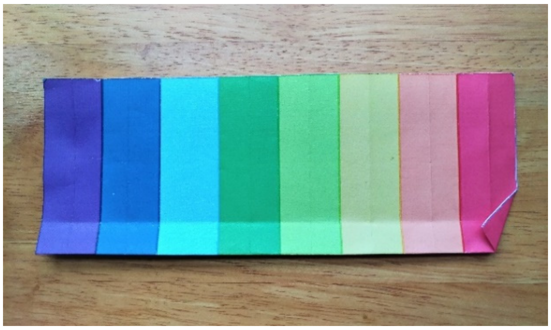


(9)參考前述摺法，繼續摺到最後。

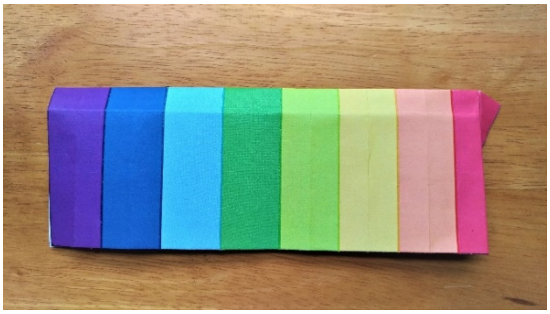


(10)參考李政憲老師摺製視頻連結

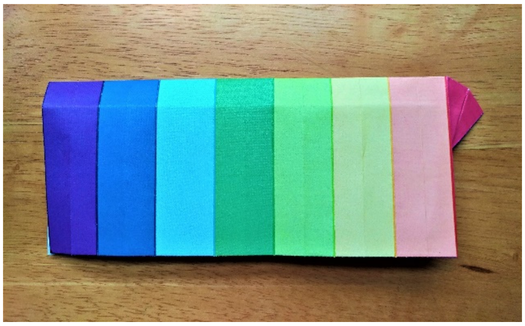
(10-a)如上步驟(5)兩股1:2的直角三角形



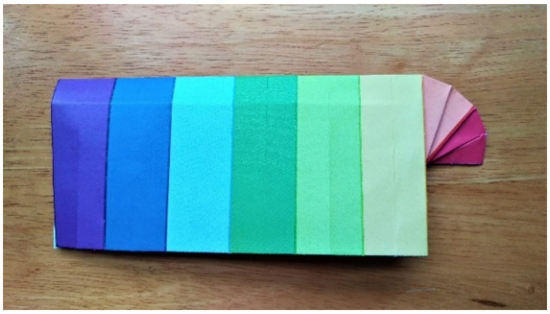
(10-b)如上步驟(7)



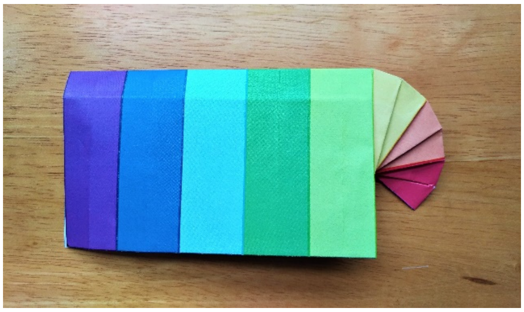
(10-c)如上步驟(8)



(11)按前述要領繼續摺



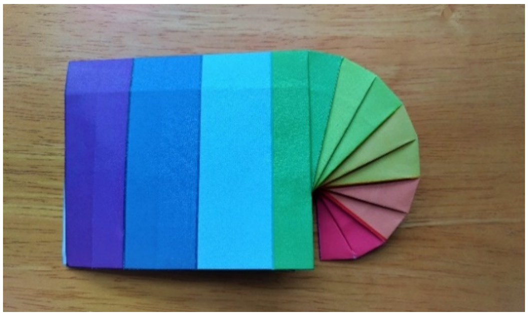
(11-a)



(11-b)

(12)

$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{12}}\approx 181.9^\circ$

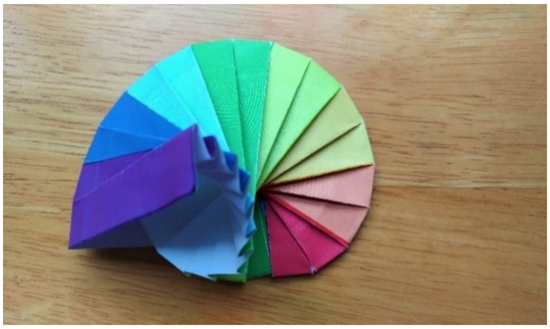
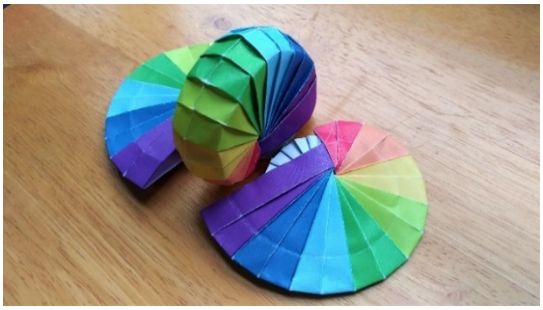


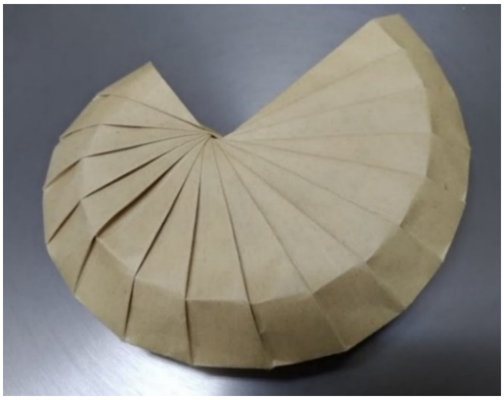
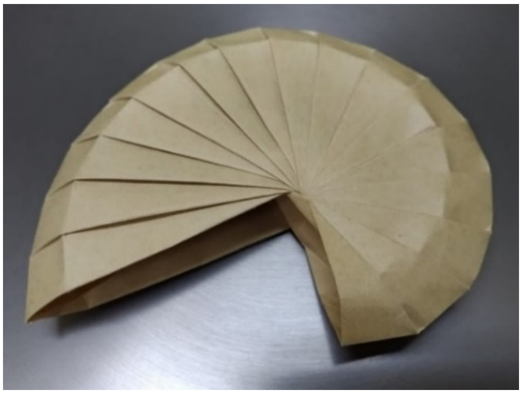
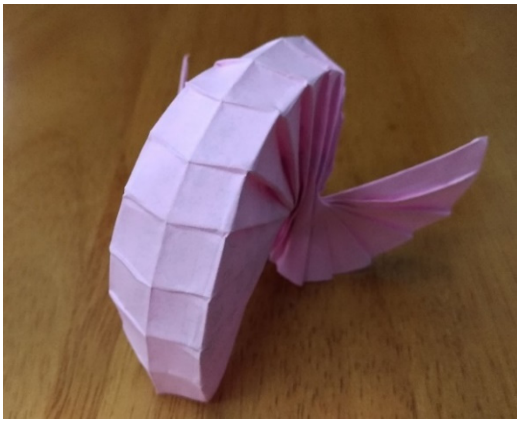
(13)

$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{18}}\approx 267.78^\circ$

(14)可試將藍色端塞在紅色端下方

(15)攤開整理摺痕

(16)先整理一面 	(17)再整理另一面 
(18)可兩面都收好壓平 	(19)將摺痕凸起 
(20)完成螺線盒 	(20-a)完成螺線盒 

以下提供摺製過程中，或許有其他喜愛的可能造型。	
	
	

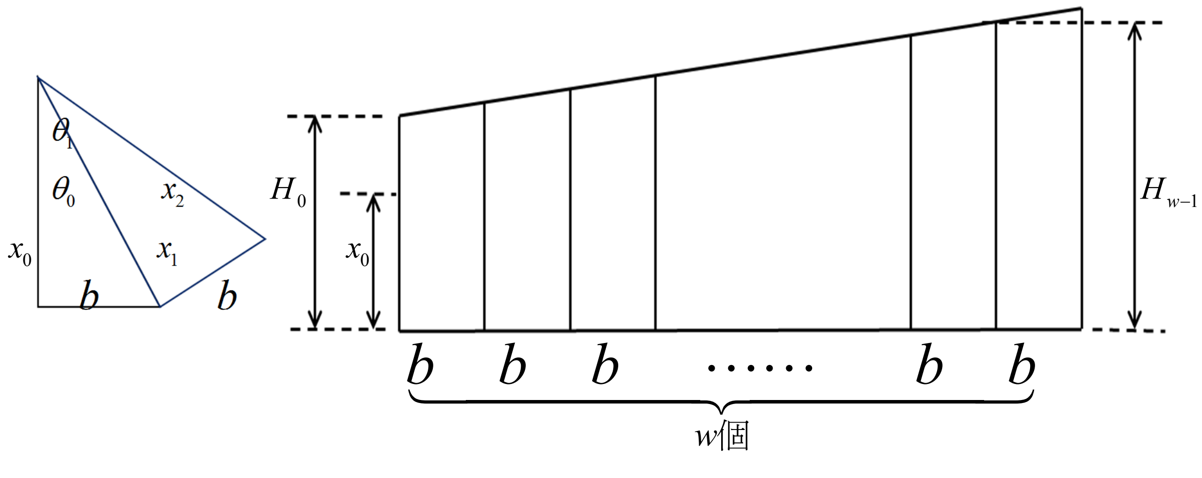
透過其他造型的嘗試，可以結合數學與藝術的教育，增加教學上的活化與樂趣。

最後借用李家祥教授的螺旋體比例方程式，來說明會以 $\sqrt{5}$ 的長度開始的原因。螺旋體方程式如下：

若初始長度為 x_0 與每次增加的固定值 b 作為直角三角形的兩股，經過 w 次螺旋摺製的情形，$x_m = \sqrt{n^2+m}\ b$ ， $\theta_m = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+m}}$ $\quad ,m = 0,1,2,\cdots,w-1$

$$x_0 = nb \text{ ，} \quad H_0 = x_0 + 2.5 \text{ ，} \quad H_{w-1} = x_{w-1} + 2.5$$

其中 2.5 是常數，是預留在摺螺旋另一側的短邊的長度，之後會塞進螺旋內側的部份，w 是分段數，因為通常摺製時，常以 8 等分或 16 等分來摺比較方便。



(1) 當分段數 w =16 時，求比例 n，使得旋轉角度總和 $\sum_{m=0}^{w-1}\theta_m = 270°$ 或 $315°$ 。

(2) 當比例 n =1 時，求分段數 w 使得旋轉角度總和 $\sum_{m=0}^{w-1}\theta_m = 270°$ 或 $315°$ 。

李教授所提供的方程式的主要在求解三角形高 x_0 與每個分段長 b 的比例關係 n，找出 n，使得 16 等分的螺旋角度總和為 270° 或 315° ，這樣可以使前段的螺旋部分，剛好可以塞進螺旋的開口部分。本次螺線盒的介紹即是以 A4 比例的紙為例，實際以 A5 彩虹紙摺製，在步驟(13)可以看到 $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{18}}\approx 267.78°$ 接近 270° ，這樣可以讓短邊多餘的部分插入螺旋的開口部分。

由以上結果，如果三角形的高與底的比例為 $x_0 : b = 2:1$，那麼就是 n =2，斜邊長就是 $\sqrt{5}$，以一張 A4 紙，長邊分成 16 等分，恰就能摺出螺旋角度總和約 270 度的螺旋收納盒了。另外 2.5 的設定與摺的過程有關，是用來設定將原本的長方形摺成梯形的比例，如果直接用長方形的紙摺的時候，就容易發生紙會卡住的情形。

在此特別感謝李家祥教授願意傾囊相授，因為這個收納盒的立體變化型，關鍵在於從 $\sqrt{5}$ 開始摺製，讓我們可以由平面的基礎，進化到立體的摺製，但背後理由是李教授利用程式求得數值解的結果，相關結果李教授近期會有文章說明，敬請同好們期待後續解說。

最後感謝藝數摺學社團裡的的夥伴李政憲老師、王儷娟老師、吳惠美老師的校稿與建議，讓本文能夠更通順流暢，希望藉此可以讓數學的教學與生活能更適切的結合。

參考資料

藝數摺學廣用酸鹼指示/根號 n 螺線
台北科技大學李家祥教授指導的立體螺線盒摺製方式
摺製影片參考：【藝數摺學】根號 n 螺線收納盒 https://youtu.be/8T65xRF40rw

根號 N 螺線摺紙

spiralbox 螺線盒