從克卜勒定律破繭而出的萬有引力定律

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

克卜勒(1571~1630)發現的行星三大定律是：1.橢圓律：行星繞日的軌道是一橢圓，太陽位居一焦點。這蘊含著行星受力的形式是與太陽到行星距離平方成反比的規律，本文中我們將用橢圓的曲率半徑與行星所受向心力之間的關聯推導出來。2.面積律：行星繞日時，在單位時間，行星與太陽連線段所掃過的面積是一常數。它隱含著行星受力的方向恆指向太陽，且對太陽而言，行星的角動量守恆。3.週期律：在太陽系中，任一行星繞日軌道半長軸的立方和繞日週期的平方之比是一常數，與個別的行星無關。這暗示此常數必與繞日的眾行星所共同擁有的性質有關，此性質就是它們一起繞太陽運轉，這常數是和太陽的質量有關。本文將揭開這三大定律背後所隱藏的物理意義，並讓牛頓的萬有引力定律從其中破繭而出。

貳、克卜勒行星第二運動定律－角動量守恆

因太陽的質量 M>>行星的質量 m，我們可將太陽視為不動，而行星以橢圓形軌道繞太陽運行，如圖 1 所示。在時間$\Delta t\to 0$ 時，行星與太陽的連線在單位時間內掃過的面積，約等於ΔBPQ 的面積 dS，即面積速率為

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}rv\sin\varphi$$

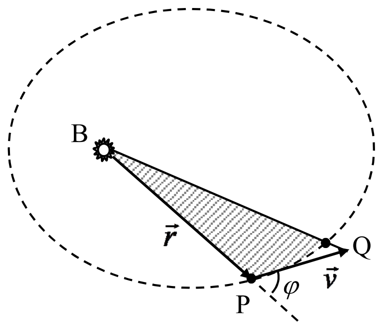

圖 1

其中 r =太陽至行星的距離 ； v = 行星的瞬時速率 ；φ = $\vec{r}$ 與 $\vec{v}$ 之間的夾角。根據克卜勒行星第二運動定律知

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}rv\sin\varphi=\text{常數} \tag{1}$$

角動量 $\vec{\ell}$ 的定義為 $\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$，$m$ 為行星的質量。如此

$$\left|\vec{\ell}\right|=\ell=rmv\sin\varphi=2m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

亦為常數，經觀測行星繞太陽的軌道面(即由 $\vec{r}$ 與 $\vec{v}$ 所構成的平面)維持不變，知 $\vec{\ell}$ 為常向量。將 $\vec{\ell}$ 對時間 t 微分應等於零，得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{\tau}(\text{力矩})=0 \tag{3}$$

(3)式所表達的物理意義是行星所受的萬有引力恆指向太陽，萬有引力是『有心力』。行星繞太陽一周所需的時間 T，稱為週期，在此時間內行星與太陽的連線所掃過的面積恰好等於橢圓的面積 $ab\pi$，a、b 各為橢圓的半長軸與半短軸。這樣一來，

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}=\frac{ab\pi}{T}=\frac{\ell}{2m}=\text{常數} \tag{4}$$

參、向心加速度 $\vec{A}_c$ 與切線加速度 $\vec{A}_t$

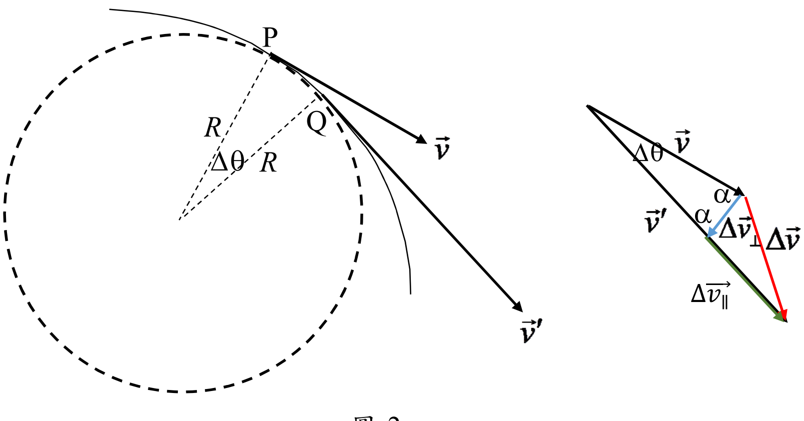

圖 2

做曲線運動的一質點，經時間Δt，從 P 點運動至 Q 點，在 P、Q 兩處的速度各為 $\vec{v}$ 與 $\vec{v}'$，該質點的加速度 $\vec{A}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$。當 $\Delta t\to 0$時，P 至 Q 間的曲線可視為曲率半徑為 R 之圓上的一小圓弧。設 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ 所夾的圓心角為$\Delta\theta$，則 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$ 的夾角亦為$\Delta\theta$，如圖 2 所示。

今於 $\left|\vec{v}'\right|$ 上取一段 $\left|\vec{v}\right|$ 的大小，令 $\left|\Delta\overrightarrow{v_{\parallel}}\right| = |\vec{v}'| - |\vec{v}| = \mathrm{d}|\vec{v}| = dv$，表速率的增量，而 $\Delta\overrightarrow{v_{\parallel}}$ 的方向為 $\vec{v}'$ 的方向。作一向量 $\Delta\vec{v}_{\perp}$，使得 $\Delta\vec{v} = \Delta\overrightarrow{v_{\parallel}} + \Delta\overrightarrow{v_{\perp}}$，則 $\left|\Delta\vec{v}_{\perp}\right| = 2v\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$。當 $\Delta t \to 0$，

①$\Delta\theta\to 0$ 或 $\dfrac{\Delta\theta}{2}\to 0 \Rightarrow \Delta\vec{v}_{\parallel}$ 亦可視為平行 $\vec{v}$，$\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\to\dfrac{\Delta\theta}{2}=\dfrac{\widehat{PQ}}{2R}$，$\left|\Delta\vec{v}_{\perp}\right|=\dfrac{v}{R}\times\widehat{PQ}$；② $\alpha\to 90^0\Rightarrow$ $\Delta\vec{v}_{\perp}\perp\vec{v}$。$\vec{A}$ 可進一步改寫成

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{v_{\parallel}}+\Delta\overrightarrow{v_{\perp}}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\widehat{PQ}}{\Delta \mathrm{t}}\vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = \vec{A}_t + \vec{A}_c \tag{5}$$

其中 $\vec{e}_t$ 為沿 $\vec{v}$ 方向的單位向量，$\vec{A}_t$ 稱為質點的切線加速度，它的作用僅能改變速率大小；$\vec{e}_n$ 為垂直速度方向的單位向量，$\vec{A}_c$ 稱為質點的法線加速度，也稱向心加速度，它的作用僅能改變速度方向。

肆、橢圓的曲率半徑

一般看到橢圓曲率半徑公式的證明，多半比較迂迴、過程冗長，這裡將張海潮和莊正良兩位先生用曲率半徑的定義、橢圓的光學性質、再加上焦切距乘積定理，用幾何的觀點，以較為簡潔的方式，求出橢圓上任一點的曲率半徑公式，作一擇要說明。

一、焦切距乘積定理

如圖 3，直線 L 為過橢圓上一點 P 的切線，F_1、F_2 為橢圓的焦點，自焦點 F_1、F_2 作一線段 $\overline{F_1A}(=d_1)$ 和 $\overline{F_2B}(=d_2)$ 均垂直直線 L，交直線 L 於 A、B 兩點。作 $\overrightarrow{F_1P}$ 交 $\overrightarrow{F_2B}$ 於 C 點，$\overrightarrow{F_2P}$ 交 $\overline{F_1\mathrm{A}}$ 於 D 點，$\overrightarrow{F_2E}$ 垂直 $\overline{F_1\mathrm{A}}$ 於 E 點。由橢圓的光學性質，可得 $\Delta F_2PB\cong\Delta CPB$ 和 $\Delta F_1PA\cong\Delta DPA\Rightarrow\overline{F_2D}=\overline{F_2P}+\overline{PD}=\overline{F_2P}+\overline{F_1P}=2a$。由 ΔF_2ED 和 ΔF_1F_2E，可推得如下的數學關係式

$$\begin{cases}(2a)^2=\overline{EF_2}^{\,2}+(d_1+d_2)^2\\(2c)^2=\overline{EF_2}^{\,2}+(d_1-d_2)^2\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=d_1d_2 \tag{6}$$

(6)式的結果即為焦切距乘積定理。

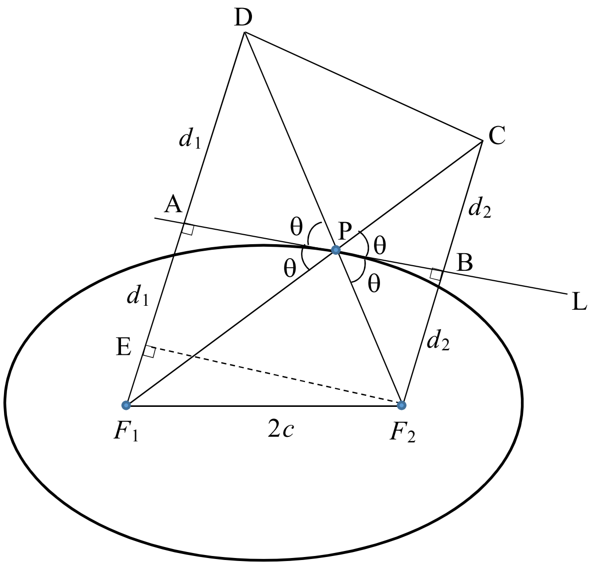

圖 3

二、橢圓的曲率半徑公式

如圖 4，一行星以橢圓軌道繞恆星運行，在極短的時間$\Delta t \to 0$，從橢圓上的 P 點走到 Q 點，則$\overset{\frown}{PQ}$可視為某曲率半徑為 R 之圓上的一小段圓弧，而直線 L_1、L_2 為各切於 P 點與 Q 點的切線。過 P 點與 Q 點作各垂直於 L_1、 L_2 的法線$\overleftrightarrow{OP}$ 和$\overleftrightarrow{OQ}$ ，並交於 O 點,則該圓的曲率半徑 $R=\overline{OP}=\overline{OQ}$，$\eta$為$\overset{\frown}{PQ}$對圓心 O 所張的圓心角。由橢圓的光學性質知，$\overleftrightarrow{OP}$ 和$\overleftrightarrow{OQ}$各為$\angle F_1PF_2$ 與$\angle F_1QF_2$ 的分角線，由圖 4 得

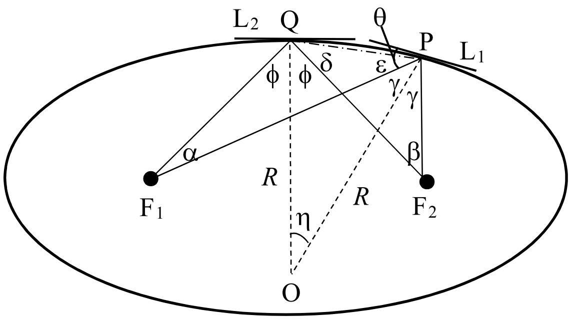

圖 4

$$\begin{cases}\alpha+\phi=\eta+\gamma \\ \beta+\gamma=\eta+\phi\end{cases} \Rightarrow \eta=\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{7}$$

應用正弦定律於ΔQF_1P、ΔQF_2P，得

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sin(2\phi+\delta)}{\overline{PF_1}}=\dfrac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\overline{PF_1}}\\ \dfrac{\sin\beta}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sin\delta}{\overline{PF_2}}\end{cases}\Rightarrow\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\overline{PQ}}=\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\overline{PF_1}}+\frac{\sin\delta}{\overline{PF_2}} \tag{8}$$

當$\Delta t\to 0$　①$\overline{PQ}\to\widehat{PQ}$　②α和β→0⇒sinα→α、sinβ→β　③δ和ε→θ(θ為切線 L_1 與$\overline{PF_1}$或$\overline{PF_2}$的夾角)，sin(α+ε)→sinθ，sinδ→ sinθ。因此，由(8)式，得

$\dfrac{\alpha+\beta}{\widehat{PQ}}=\dfrac{\sin\theta}{\overline{PF_1}}+\dfrac{\sin\theta}{\overline{PF_2}}\Rightarrow\dfrac{2\eta}{\widehat{PQ}}=\sin\theta\cdot\dfrac{2a}{\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}\Rightarrow\dfrac{1}{R}=\dfrac{a\sin\theta}{\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}$。從圖 3 和(6)式知

$$\begin{cases}\overline{PF_1}=\dfrac{d_1}{\sin\theta}\\ \overline{PF_2}=\dfrac{d_2}{\sin\theta}\end{cases}\Rightarrow\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{d_1d_2}{\sin^2\theta}=\frac{b^2}{\sin^2\theta}\Rightarrow\frac{1}{R}=\frac{a\sin^3\theta}{b^2} \tag{9}$$

伍、平方反比規律與萬有引力定律

如圖 5，當行星以橢圓軌道繞行太陽至 P 點時，所受的向心加速度$\vec{A}_c$，根據為(5)式

$$A_c=\frac{v^2}{R}$$

利用(2)式 $v=\dfrac{\ell}{mr\sin\varphi}=\dfrac{\ell}{mr\sin\theta}$、(9)式，代入上式，得 $A_c=\dfrac{a\ell^2\sin\theta}{m^2r^2b^2}$。又行星的加速度量值 A 與向心加速度量值 A_c 之間的關係為 $A=A_c/\sin\theta$，因此

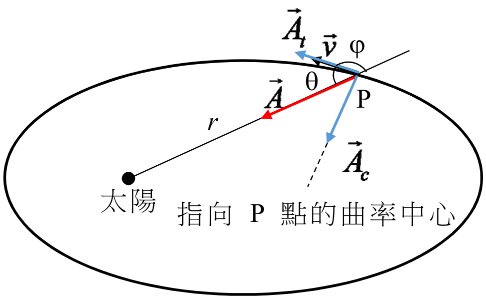

圖 5

$$A=\frac{a\ell^2}{m^2r^2b^2} \tag{10}$$

根據牛頓第二運動定律，太陽施予行星之力為

$$F_{\text{太陽吸引行星}} = mA = \frac{a\ell^2}{mr^2b^2} \propto \frac{1}{r^2} \tag{11}$$

(11)式說明了萬有引力和兩質點間的距離平方成反比。

由(4)式，將角動量 $\ell = \dfrac{2mab\pi}{T}$ 代入(11)式，得

$$F_{\text{太陽吸引行星}} = m4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \ ,$$

又<u>克卜勒</u>行星第三運動定律指出 $\frac{a^3}{T^2} =$ 常數 k，因此

$$F_{\text{太陽吸引行星}} = m4\pi^2 k \cdot \frac{1}{r^2}$$

若太陽的質量為 M，由對稱性知，行星吸引太陽的力之形式應為

$$F_{\text{行星吸引太陽}} = MA' = M\,4\pi^2 k' \cdot \frac{1}{r^2}$$

再從牛頓第三運動定律知

$$m4\pi^2 k = M\,4\pi^2 k' \tag{12}$$

要讓(12)式成立，可令

$$4\pi^2 k = GM \ ; \ 4\pi^2 k' = Gm$$

其中 G 為萬有引力常數，如此萬有引力定律可寫成

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{13}$$

陸、克卜勒第三定律中常數 *k* 之值

在行星與太陽的系統中，它們所擁有的力學能

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{mr\sin\varphi}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2\sin^2\varphi} - \frac{GMm}{r}$$

經整理得

$$\Rightarrow \qquad r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mE\sin^2\varphi}=0 \tag{14}$$

因近日距 r_1 與遠日距 r_2 為(14)式方程式的兩個根，且在近日距 r_1 與遠日距 r_2 時，$\varphi=\pi/2$，故兩根之和

$$r_1+r_2=2a=-\frac{GMm}{E}\Rightarrow E=-\frac{GMm}{2a}\text{ 或 }a=-\frac{GMm}{2E} \tag{15}$$

兩根之積

$$r_1r_2=b^2=-\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mE}\Rightarrow b=\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mE}} \tag{16}$$

將(15)式代入(16)式，得

$$b=\sqrt{\frac{a\ell^2}{GMm^2}} \tag{17}$$

將(17)式代入(4)式，得

$$\frac{a\sqrt{\dfrac{a\ell^2}{GMm^2}}\pi}{T}=\frac{\ell}{2m}\Rightarrow\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}=k \tag{18}$$

柒、結論

橢圓律蘊含著萬有引力與行星到太陽距離的平方成反比的規律，可經由橢圓的曲率半徑與行星所受的向心加速度之間的關係得出。再運用牛頓第二、第三定律和對稱性，便可得出萬有引力公式。行星在與距離平方反比的力作用下，它的運動軌跡可進一步證明並非僅能是橢圓，也可以是圓錐曲線中的任一種軌跡，即圓、拋物線或雙曲線。至於克卜勒週期律中對太陽系任一行星 $\dfrac{a^3}{T^2}$ 均為定值，此定值經求出為 $\dfrac{GM}{4\pi^2}$，與太陽的質量有關。

參考文獻

張海潮、莊正良(2016) 橢圓的曲率公式和萬有引力的平方反比規律。**數學傳播季刊**，**40**(2)：24-34。