中學生通訊解題第 117-118 題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11701

從 1, 2, 3, ….., 2015 中取出 n 個數，使得這 n 個數的任意三個數的和均為 27 的倍數，試求 的最大值。

簡答：n 最大值為 75

【詳解】

(1) 若 $a+b+c$ 及 $a+b+d$ 均為 27 的倍數，則 $c-d$ 為 27 的倍數，所以 n 個數除以 27 的餘數均相同。

(2) 設餘數均為 k，則任三數 $a+b+c=27p+k+27q+k+27r+k$ 為 27 的倍數，可得 $3k$ 為 27 的倍數，所以 $k=0,9,18$。

(3) $k=0$，有 27, 54, …, 1998，共有 74 個 $k=9$，有 9, 36, 63, …, 2007，共有 75 個 $k=18$，有 18, 45, 72, …, 1989，共有 74 個

(4) 綜上，n 最大值為 75，此時取的數為 9, 36, 63, …, 2007。

【解題評析】

這個題目主要的重點有兩個，第一個重點是找到每個數除以 27 的餘數都相同，這一個重點，大部分的同學都有抓到，只是有些同學沒有把證寫出，另一個重點是這個相同的餘數只能是 0, 9, 18，大部分的同學也都有抓到這個重點，可惜的是還是有一些同學沒有完整的論述，這樣的作答都不算完整。最後，給同學一些建議，很多時候對於一個題目，我們可以猜測出或抓到答案的樣貌，但我們還是得用數學的語言加上完整的論述，才能完整的證明出這樣的答案是對的。

問題編號
11702

設 x, y 皆為實數且 $x>y>0$，若 $\dfrac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\dfrac{2xy}{x+y}$ 皆為整數且總和為 49，試求 x 之值。

簡答：$x=45$ 或 $28+14\sqrt{3}$

【詳解】

設 $a=\dfrac{x+y}{2}$、$g=\sqrt{xy}$、$h=\dfrac{2xy}{x+y}$，$h=\dfrac{g^2}{a}\in N$。

由算幾不等式知 $a>g>h$。(由 $x>y>0$ 知等號不成立)

令 $c=(a,g)$ 且 $a=ca_1$、$g=cg_1$，其中 a_1、c、$g_1\in N$ 且 $(a_1,g_1)=1$。

因為 $ca_1+cg_1+\dfrac{cg_1^2}{a_1}=49$ 且 $(a_1,g_1)=1$，

所以 $a_1 \mid c$。

令 $c=a_1d$，其中 $d\in N$，可得 $d\left(a_1^2+a_1g_1+g_1^2\right)=49$，$d=1$ 或 7。

Case 1、$d=1$

此時，$a_1^2+a_1g_1+g_1^2=49$。

因為 $a_1^2<49<3a_1^2$，所以 $4<a_1<7$。

易知 $a_1=5$、$g_1=3$。

故得 $a=da_1^2=25=\dfrac{x+y}{2}$、$g=da_1g_1=15=\sqrt{xy}$，

即 $x=45$、$y=5$。

Case 2、$d=7$

此時，$a_1^2+a_1g_1+g_1^2=7$。

易知 $a_1=2$、$g_1=1$。

故得 $a=da_1^2=28=\dfrac{x+y}{2}$、$g=da_1g_1=14=\sqrt{xy}$，

即 $x=28+14\sqrt{3}$、$y=28-14\sqrt{3}$。

【解題評析】

本題解答有兩個重點，第一要注意到 $\dfrac{x+y}{2}>\sqrt{xy}>\dfrac{2xy}{x+y}$，第二是 $h=\dfrac{g^2}{a}\in N$，其實就是說明 a，g，h 為等比數列。但是許多同學在解題時只求出一組答案，只求出 45 的同學，是把 x、y 都當成整數窮舉求解；只求出 $28+14\sqrt{3}$ 的同學，則是把公比當成是自然數來求解。

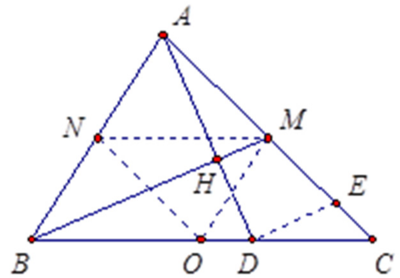
問題編號
11703

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，M 為 $\overline{AC}$ 中點，D 點在 $\overline{BC}$ 上，若 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BM}$，求 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}$ 之比值。

簡答：$\dfrac{11}{6}$

【詳解一】

如下圖。



分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中點 N、O，

連結 $\overline{OM}$、$\overline{ON}$、$\overline{NM}$；作 $\overline{DE}\,//\,\overline{BM}$。

$\because M$、N、O 分別是 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中點，

$\therefore$ 四邊形 $BOMN$ 為平行四邊形。

由 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，

可知 $\overline{NM}=\dfrac{7}{2}$，$\overline{NB}=\dfrac{5}{2}$，$\overline{NO}=3$。

根據平行四邊形定理，而有 $2\left(\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right)$

$=\overline{BM}^2+3^2$，得 $\overline{BM}=2\sqrt{7}$。

設 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BM}$ 於 H，

則 $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=\overline{AB}^2$，

$\overline{AH}^2+\overline{HM}^2=\overline{AM}^2$，

兩式相減，得 $\overline{BH}^2-\overline{HM}^2=\overline{AB}^2-\overline{AM}^2$

$\Rightarrow(\overline{BH}+\overline{HM})(\overline{BH}-\overline{HM})=25-9=16$。

$\because \overline{BH}+\overline{HM}=2\sqrt{7}$，

$\therefore \overline{BH}-\overline{HM}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$，解得 $\overline{BH}=\dfrac{11}{\sqrt{7}}$，$\overline{HM}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$。

設 $\overline{CE}=x$，$\overline{CD}=y$，由於 $\overline{DE}\,//\,\overline{BM}$，

可知 $\overline{DE}:\overline{BM}=\overline{CD}:\overline{BC}=\overline{CE}:\overline{CM}$，

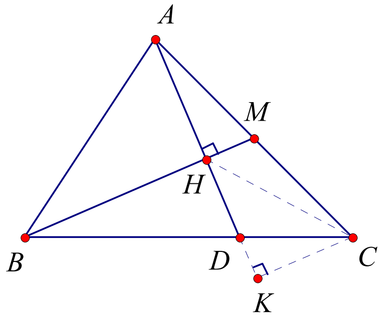
$\overline{HM}:\overline{DE}=\overline{AM}:\overline{AE}$，即

$\overline{DE}:2\sqrt{7}=x:3=y:7$，$\dfrac{3}{\sqrt{7}}:\overline{DE}=3:(6-x)\Rightarrow \overline{DE}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}x=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}y=\dfrac{6-x}{\sqrt{7}}$，

$\Rightarrow x=\dfrac{18}{17}$，$y=\dfrac{42}{17}\Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{42}{17}$，$\overline{BD}=7-\dfrac{42}{17}=\dfrac{77}{17}$，故 $\overline{BD}:\overline{DC}=11:6$。

【詳解二】

如下圖。



作 $\overline{CK}$ 垂直直線 AD 於 K；連結 $\overline{CH}$。

$\because M$ 是 $\overline{AC}$ 中點，$\therefore \triangle BAH$ 與 $\triangle BCH$ 等面積。

設 $\overline{BD}=x$，$\overline{DC}=y$，則由 $\overline{BC}=7$，$\overline{AD}\perp\overline{BH}$，

可知 $\overline{AH}:\overline{HD}=\triangle BAH:\triangle BDH$

$=\triangle BCH:\triangle BDH=7:x$，

因此，可設 $\overline{AH}=7t$，$\overline{HD}=xt$，

$\triangle AKC$ 中，由於 M 是 $\overline{AC}$ 中點，

$\overline{MH}\perp\overline{AK}$，$\overline{CK}\perp\overline{AK}$，

可知 $\overline{AH}=\overline{HK}$，得 $\overline{AH}=14t$，又，

$x+y=7$，故 $\overline{DK}=7t-xt=yt$。

$\because \triangle BHA$、$\triangle BHD$、$\triangle AKC$、$\triangle CKD$ 都是直角三角形，而 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，

$\therefore \overline{BH}^2=5^2-(7t)^2=x^2-(xt)^2$，

$\overline{CK}^2=6^2-(14t)^2=y^2-(yt)^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}(49-x^2)t^2=25-x^2\\(196-y^2)t^2=36-y^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{49-x^2}{25-x^2}=\frac{196-y^2}{36-y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{24}{25-x^2}=\frac{160}{36-y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{25-x^2}=\frac{20}{36-y^2}=\frac{17}{11+x^2-y^2}$$

$$=\frac{17}{11+(x+y)(x-y)}=\frac{17}{11+7(2x-7)}$$

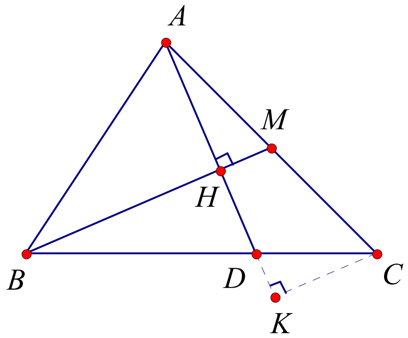
$\Rightarrow 17x^2+42x-539=0$，

解得 $x=\dfrac{77}{17}$，$y=\dfrac{42}{17}$，

故 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}$ = 11 ： 6。

【詳解三】

如下圖。



作 $\overline{CK}$ 垂直直線 AD 於 K，設 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BM}$ 於 H，

則 $\angle DHB = 90° = \angle DKC$，$\angle BDH = \angle CDK$，

故 $\triangle DHB$ 與 $\triangle DKC$ 為相似三形，得

$\overline{BD}$ ： $\overline{DC} = \overline{BH}$ ： $\overline{CK}$ 。

再看 $\triangle AKC$，其中，

$\because$ $\overline{MH} // \overline{CK}$ ，M 為 $\overline{AC}$ 中點，

$\therefore$ $\overline{CK} = 2\,\overline{HM}$ ，

而知 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC} = \overline{BH}$ ：$2\,\overline{HM}$ ；

且 $\triangle ABM$ 面積 $= \triangle CBM$ 面積 。

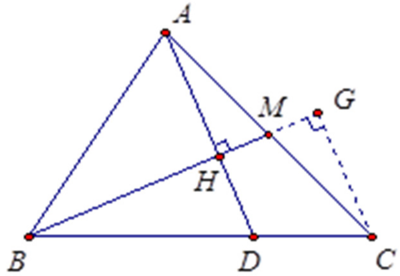
今已知 $\overline{AB} = 5$，$\overline{AC} = 6$，$\overline{BC} = 7$，

故 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC} = \overline{BH}$ ：$2\,\overline{HM} = \dfrac{11}{\sqrt{7}}$ ： $\dfrac{6}{\sqrt{7}}$ ，

化簡得 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}$ = 11 ： 6。

【詳解四】

如下圖。



設 $\overline{BM} = 2x$，根據海龍公式，得

$\triangle ABC$ 面積為 $\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$ 。

$\triangle ABM$ 面積為 $\sqrt{(4+x)(4-x)(x-1)(x+1)}$

$= \sqrt{(16-x^2)(x^2-1)} = 3\sqrt{6}$ ，

$\triangle CBM$ 面積為 $\sqrt{(5+x)(5-x)(x-2)(x+2)}$

$= \sqrt{(25-x^2)(x^2-4)} = 3\sqrt{6}$ ，

而有 $17x^2-x^4-4 = 29x^2-x^4-100 = 54 \Rightarrow$

$x^2 = 7 \Rightarrow \overline{BM} = 2\sqrt{7}$ 。

已知 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BM}$ ，故 $\overline{BM} \times \overline{AH} =$ $2\triangle ABM$ 面積 $= 6\sqrt{6}$ ，得

$\overline{AH} = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ ，

$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{25 - \dfrac{54}{7}} = \dfrac{11}{\sqrt{7}}$ ，

$\overline{HM} = \overline{BM} - \overline{BH} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$ ，

【解題評析】

本題的解法很多，以上四種解法，不外是一些基本幾何性質的應用，譬如：相似形性質、全等形性質、勾股定理、平行四邊形定理、海龍公式、面積關係等等，這些知識同學大多應已熟悉，只是，「已熟

知」與「能活用」之間還有一些距離，要能適當整合既有知識以解題，大家還得再思考、多練習。

處理本問題被應用最多的是勾股定理。「勾股定理」又稱為「商高定理」、「畢氏定理」，悠悠四千年，它在數學歷史裡身影處處，人所共知，是初等幾何裡最精彩、迷人、實用的定理。本題共有 11 位同學應徵答題，解法多元，但都用到了勾股定理。此外，其中二人引用了孟氏定理，二人以餘弦定理入算，三人由中線定理切入，三人應用了海龍公式，四人採用代數方法(解析幾何)解題。同學所用的策略，不限國中領域，以上【詳解】則只在國中範圍取材。

本題應答同學大多有好成績，不過，計算與證明題之解答書寫，其流暢度與嚴謹性必須注意與講究，希望大家能再力求進步。

問題編號
11704

已知 a,b,c 是 1 到 9(包含 1 和 9)中的不同整數，試求 $\dfrac{abc}{a+b+c}$ 的最小值。

簡答：1

【詳解】

在 $a=1,b=2,c=3$ 的情況下，可以達到值為 1。以下說明不能小過 1。

分母可達到最大值為 24，所以只須考慮分子小於 24 的情況，列表如下：

在這些情況下 $a+b+c\le abc$，

而在其他所有情況 $abc\ge 24$，

同時 $a+b+c\le 24$。

所以，$\dfrac{abc}{a+b+c}$ 的最小值為 1　。

a	b	c	$a+b+c$	abc
1	2	3	6	6
		4	7	8
		5	8	10
		6	9	12
		7	10	14
		8	11	16
		9	12	18
1	3	4	8	12
		5	9	15
		6	10	18
		7	11	21
1	4	5	10	20

【解題評析】

本題屬於較容易的題目，大多數同學從代數角度切入，也有同學以類似所附詳解之列舉法來計算。全部的同學雖然都能算出最後答案，但也許是太過簡單明顯的緣故，部分同學們的論證有失嚴謹，被扣了一些分數實屬可惜。希望同學們以後不論遇到什麼樣的題目，都要抱著耐心謹慎的態度。

問題編號
11705

設 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=4+2\sqrt{2}$，

試求 $\dfrac{2b-c}{a+b+2c}+\dfrac{6a+8c}{a+3b+c}-\dfrac{a-2b}{2a+b+c}$

的最小值。

簡答：$2\sqrt{2}$

【詳解】

令 $\begin{cases} a+b+2c=x \\ a+3b+c=y \\ 2a+b+c=z \end{cases}$，

則 $\begin{cases} 2b-c=-x+y \\ 6a+8c=4x-2y+2z \\ a-2b=-y+z \end{cases}$

故原式

$=\dfrac{-x+y}{x}+\dfrac{4x-2y+2z}{y}+\dfrac{y-z}{z}$

$=-4+(\dfrac{y}{x})+4(\dfrac{x}{y})+2(\dfrac{z}{y})+(\dfrac{y}{z})$

$\geq -4+2\sqrt{(\dfrac{y}{x})\cdot 4(\dfrac{x}{y})}+2\sqrt{2(\dfrac{z}{y})\cdot(\dfrac{y}{z})}$

（算幾不等式）

$=-4+4+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

等號成立於 $\dfrac{y}{x}=4(\dfrac{x}{y})$

且 $2(\dfrac{z}{y})=\dfrac{y}{z}$ 時，

此時 $a=-4+5\sqrt{2}$, $b=5-\sqrt{2}$, $c=3-2\sqrt{2}$。

【解題評析】

本題主要測試同學在計算上的敏感度，能透過變數變換的技巧將分式的分母簡化，以利分式的拆解與組合，並熟悉算幾不等式求極值的方法。

本題僅有二位同學投稿，但可惜的是二位同學皆未抓到本題的計算重點，因此未能將此題解出。

問題編號
11801

已知 n 是偶數，且 $1\leq n\leq 104$。若有唯一的正整數對 (a,b) 使得 $a^2=b^2+n$ 成立，試問這樣的 n 有幾個？

簡答： 12 個

【詳解】

<方法一>參考解答

已知 $(a-b)(a+b)=n$，且 n 為偶數，於是 $a-b,a+b$ 同為偶數。

所以，n 是 4 的倍數。設 $n=4m$，

則 $1\leq m\leq 26$。

(1) 若 $m=1$，可得 $b=0$ 與 b 是正整數矛盾。

(2) 若 m 至少有兩個不同的質因數，則至少有兩個正整數對 (a,b) 滿足 $(\dfrac{a-b}{2})(\dfrac{a+b}{2})=m$，與唯一正整數對 (a,b) 的條件矛盾。

(3) 若 m 恰是一個質數的冪，且這個冪指數不小於 3，則至少有兩個正整數對

(a,b) 滿足 $(\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2})=m$ ，與唯一正整數對 (a,b) 的條件矛盾。

(4) 若 m 是質數或 m 恰是一個質數的冪，且這個冪指數為 2 ，則有唯一的正整數對 (a,b) 滿足 $(\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2})=m$ ，

所以 m 的可能值為 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 25，

故 n 的可能值為 8, 12, 16, 20, 28, 36, 44, 52, 68, 76, 92, 100 共 12 個。

<方法二>參考解答

臺北市麗山國中鍾 O 燁同學作法

已知 $(a-b)(a+b)=n$ ，且 n 為偶數，

於是 $a-b, a+b$ 同為偶數。

所以， n 是 4 的倍數。設 $n=4m$ ，

則 $1\le m\le 26$ ，列舉所有可能如下：

m	$n=4m=(a+b)(a-b)$	正整數對 (a,b) 組數	是否合唯一的正整數對 (a,b) 的條件
1	$n=4=2\times 2$	0	不合
2	$n=8=4\times 2$	1	合
3	$n=12=6\times 2$	1	合
4	$n=16=8\times 2=4\times 4$(不合)	1	合
5	$n=20=10\times 2$	1	合
6	$n=24=12\times 2=6\times 4$	2	不合
7	$n=28=14\times 2$	1	合
8	$n=32=16\times 2=8\times 4$	2	不合
9	$n=36=18\times 2$	1	合
10	$n=40=20\times 2=10\times 4$	2	不合
11	$n=44=22\times 2$	1	合
12	$n=48=24\times 2=12\times 4$	2	不合
13	$n=52=26\times 2$	1	合
14	$n=56=28\times 2=14\times 4$	2	不合
15	$n=60=30\times 2=10\times 6$	2	不合
16	$n=64=32\times 2=16\times 4=8\times 8$(不合)	2	不合
17	$n=68=34\times 2$	1	合
18	$n=72=36\times 2=18\times 4$	2	不合
19	$n=76=38\times 2$	1	合
20	$n=80=40\times 2=20\times 4$	2	不合
21	$n=84=42\times 2=14\times 6$	2	不合

22	$n=88=44\times 2=22\times 4$	2	不合
23	$n=92=46\times 2$	1	合
24	$n=96=48\times 2=24\times 4$	2	不合
25	$n=100=50\times 2$	1	合
26	$n=104=52\times 2=26\times 4$	2	不合

所以 m 的可能值為 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 25。

故 n 的可能值為 8, 12, 16, 20, 28, 36, 44, 52, 68, 76, 92, 100 共 12 個。

<方法三> 新北市文山國中王 O 豪同學作法

$n=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，由 n 為偶數，於是 $a-b, a+b$ 同為偶數。

又 $a+b>a-b$，所以 $a-b<\sqrt{104}<11$，因此 $a-b=2,4,6,8,10$。

(1) 當 $a-b=2$ 時，n 最小值為 8，$n=8+2(a+b)$，令 $a+b=2x$，$n=8+4x$（其中 $x\le 24$，$x\in N\cup\{0\}$），此時 n 有 25 個。

(2) 當 $a-b=4$ 時，n 最小值為 24，$n=24+4(a+b)$，令 $a+b=2y$，$n=24+8y$（其中 $y\le 10$，$y\in N\cup\{0\}$），此時 n 有 11 個。

(3) 當 $a-b=6$ 時，n 最小值為 48，$n=48+6(a+b)$，令 $a+b=2z$，$n=48+12z$（其中 $z\le 4$，$z\in N\cup\{0\}$），此時 n 有 5 個。

(4) 當 $a-b=8$ 時，n 最小值為 80，$n=80+8(a+b)$，令 $a+b=2w$，$n=80+16w$（其中 $w\le 1$，$w\in N\cup\{0\}$），此時 n 有 2 個。

(5) 當 $a-b=10$ 時，n 最小值為 $120>104$，不合。

由於 $(2)\cap(3)$ 時：$n=48,96,72$，

$(2)\cap(4)$ 時：$n=80,96$，

$(3)\cap(4)$ 時：$n=96$，

$(2)\cap(3)\cap(4)$ 時：$n=96$，

因此，由排容原理(Principle of Inclusion and Exclusion)可得 n 的個數為 $25-11-5-2+3+2+1-1=12$ 個。

<方法四>台北市龍門國中盛偉嘉同學作法

已知 $(a-b)(a+b)=n$，且 n 為偶數，於是 $a-b, a+b$ 同為偶數。

所以，n 是 4 的倍數。

(1) $n=4=2\times 2$，$a+b=a-b=2$，得 $a=2, b=0$，不合。

(2) n 為 8 的倍數中，除了 $n=8,16$ 外，只要 $a-b, a+b$ 其中之一含有因數 2，另一個含有因數 4 時，不合唯一性。

(3) n 除以 4 以後，若含有 4 個以上的因數，亦不符合唯一性，故 $n=60,84$ 不合。

$\left[\frac{104}{4}\right]=1\sim104$ 中的 4 的倍數的個數，

$\left[\frac{104}{8}\right]=1\sim104$ 中 8 的倍數的個數，其中 $[x]$ 定義為小於或等於 x 的最大整數，所以，n 的個數為

$\left[\frac{104}{4}\right]-1-\left(\left[\frac{104}{8}\right]-2\right)$-2=12 個。

$\downarrow$ n=4　$\downarrow$ n=8, 16　$\downarrow$ n=60,84

【解題評析】

本題屬於中等難度的題目，大多數同學都有論證出 n 是 4 的倍數，且 $a-b,a+b$ 同為偶數。本題限制唯一的正整數對 (a,b) 使得 $a^2=b^2+n$ 成立，欲求出這樣的 n，所以來信徵答同學的作法分別有下列四種：

有 12 位同學用<方法一>討論出 n 為質數的 4 倍或 n 為質數平方的 4 倍，錯誤的同學大都是遺漏了 n 亦可為質數平方的 4 倍，而且多數同學只論證 n 為質數的 4 倍或 n 為質數平方的 4 倍符合題意，但沒有論證 n 為其他情形時為何不滿足題意；

有 2 位同學用<方法二>列舉出所有的解，錯誤的同學是列舉有疏漏；

有 3 位同學用<方法三>、有 6 位同學用<方法四>只求出 n 的個數；

另外有 1 位同學畫 a^2,b^2 的所有可能分別在縱軸、橫軸的矩陣表，裡面元素為相應的 n 值，並標示 n 為偶數的情形，但是卻忘了考慮使得 $a^2=b^2+n$ 成立的正整數對 (a,b) 必須唯一。

本題同學們作答論證品質普遍不佳，希望大家可以要求自己將想法更完整的呈現出來。

問題編號
11802

對任意正整數 x,y，函數 $f(x,y)$ 具有下列性質：$f(x,x)=x,\quad f(x,y)=f(y,x),$
$(x+y)f(x,y)=y\ f(x,x+y)$，
試求 $f(14,52)$ 之值。

簡答： 364

【詳解】

因為 $(x+y)f(x,y)=y\ f(x,x+y)$，所以

$f(x,x+y)=\dfrac{x+y}{y}\ f(x,y)$。

故 $f(14,52)=\dfrac{52}{38}\ f(14,38)=\dfrac{52}{38}\times\dfrac{38}{24}\times$

$$f(14,24)=\frac{52}{38}\times\frac{38}{24}\times\frac{24}{10}\ f(14,10)$$

$$=\frac{52}{10}\times f(10,14)=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}f(10,4)$$

$$=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{6}\ f(4,6)$$

$$=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{6}\times\frac{6}{2}\ f(4,2)$$

$$=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{2}\times f(2,4)$$

$$=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{2}\times\frac{4}{2}\times f(2,2)$$

$$=\frac{52}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{2}\times\frac{4}{2}\times 2=364$$ 。

【解題評析】

1.本題屬於較簡易的函數方程問題，同學不僅能確切掌握代換性質，且能正確計算出數值，更重要的是能透過對於函數的了解及利用數學符號完整表達論證計算的過程。本題徵答人數極為踴躍共有 21 人，其中有 20 位獲 7 分滿分，平均得分 6.95 分。整體而言參與徵答學生的論證與思考表達方法均十分優異，值得肯定。許多同學亦採用計算模式而解出正確數值。

2.臺南市民德國中朱 O 潔同學有精彩的推論如下：

當 $x+y=nx$ **時**，$(n\in N)$

$$f(x,x+y)=f(x,nx)=\frac{nx}{(n-1)x}\times f(x,(n-1)x)$$

$$=\frac{nx}{(n-1)x}\cdot\frac{(n-1)x}{(n-2)x}\times f(x,(n-2)x)$$

$$=\frac{nx}{(n-1)x}\cdot\frac{(n-1)x}{(n-2)x}\cdot\cdots\times\frac{3x}{2x}\times\frac{2x}{x}\times f(x,x)$$

$$=nx$$

即若函數 $f(x,y)$ **有** $f(x,x)=x,$

$f(x,y)=f(y,x),\ \ (x+y)f(x,y)=y$

$f(x,x+y)$ **性質，則** $f(x,y)=\dfrac{x\times y}{(x,y)}$ **。**

問題編號
11803

ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle B$ 的角平分線交 AC 邊於 D 點，若 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，求 $\angle A$ 的度量。

簡答：$100°$

【詳解】

在 BC 邊上取 E 點使得 $\overline{BE}=\overline{BD}$，由 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$ 知 $\overline{CE}=\overline{AD}$。因 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分線，所以 $\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}$，

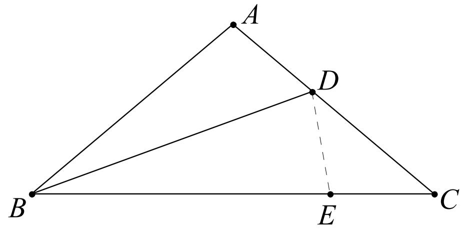
故得 $\overline{CE}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BC}$

又 $\angle ABC=\angle ACB$ 可得 $\Delta ABC\sim\Delta ECD$ (SAS 相似)，因此 $\overline{EC}=\overline{ED}$。

假設 $\angle ABC=2\theta$，

則 $\angle ACB=\angle EDC=2\theta$ 、 $\angle DBE=\theta$ 、 $\angle BDE=\angle BED=4\theta$、$\angle A=180°-4\theta$。

在 ΔBDE 中，由內角和 $9\theta=180°$，所以 $\theta=20°$，代回可得 $\angle A=100°$。



【解題評析】

以 D 點為圓心，$\overline{AD}$ 為半徑作一圓，可與 BC 邊交於相異兩點（想想看為什麼？），參考解答用的是右邊的交點同學

(有些同學雖有筆誤，解題的主要想法仍是正確)。而使用了左邊交點的同學，雖然同學們證明的寫法偶有筆誤，但瑕不掩瑜，每個同學都有自己的邏輯證明，與參考解答均不盡相同，值得鼓勵。

問題編號
11702

設 x, y 皆為實數且 $x > y > 0$，若 $\dfrac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\dfrac{2xy}{x+y}$ 皆為整數且總和為 49，試求 x 之值。

簡答： $x = 45或28 + 14\sqrt{3}$

【詳解】

設 $a = \dfrac{x+y}{2}$ 、 $g = \sqrt{xy}$ 、 $h = \dfrac{2xy}{x+y}$ ，$h = \dfrac{g^2}{a} \in N$ 。

問題編號
11804

已知 n 為正整數，且在 1, 2, 3, …, n 等 n 個數的任意排列中，均可找到連續 26 個數的和大於 2015，試求滿足條件的最小正整數 n。

簡答：155

【詳解】

(1) 先證 155 符合條件：

令數列 $a_1, a_2, \ldots, a_{155}$ 為 1, 2, 3, …, 155 等數的一個排列，將其依序分成 6 組，每組 26 個數，且最後兩組有一共同數 a_{130}。

$A_1 = (a_1, a_2,\ldots, a_{26})$，$A_2 = (a_{27}, a_{28},\ldots, a_{52})$，…，$A_5 = (a_{105}, a_{106},\ldots, a_{130})$，$A_6 = (a_{130}, a_{131},\ldots, a_{155})$。

此 6 組數之和的算術平均數為

$$\frac{1+2+3+\cdots+155+a_{130}}{6}$$

$$=2015+\frac{a_{130}}{6}>2015$$

故其中必有一組數之和大於 2015。

(2) 再證小於 155 的數不符合條件：

構造數列如下：

154, 153, 152, …, 142, 1, 2, 3, …,13,
141, 140, 139,…, 129,14, 15, 16,…,26,
128, 127, 126,…,116, 27, 28, 29,…,39,
115, 114, 113,…,103, 40, 41, 42,…,52,
102, 101, 100,…,90, 53, 54, 55,…,65,
89, 90, 91 …,79, 66, 67, 68, …, 78

此數列中，任意連續 26 個數之和為 2015, 2002, …, 1846，故小於 155 的數均不符合條件。

【解題評析】

本題題目較為困難，雖然不須太多計算，但證明過程需要一些巧思及安排，得分的同學在說明的過程中，有個較嚴重的

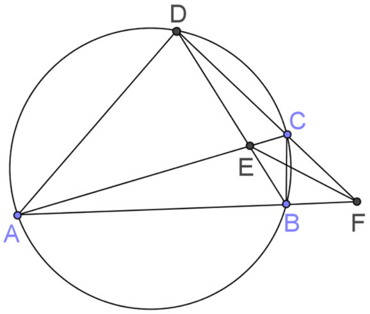
問題:在得到此最小正整數 155 的過程中，使用一個特殊的數列安排：1, *n*, 2, (*n* − 1), …，以此猜測下界為 155，但均未說明清楚為何此 155 個數的任意排列，必可符合題目條件。因此本題無人得滿分。

問題編號 11805

在圓內接四邊形 *ABCD* 中，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於點 *E*，且 $\angle ABD = 60^0$，$\overline{AE}=\overline{AD}$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{DC}$ 交於點 *F*。求證：

(1) 點 *B* 為 $\triangle CEF$ 的外心。

(2) $\angle EBC = 2\angle EFC$



【詳解】

(1) 因為 $\overline{AE}=\overline{AD}$，*A*、*B*、*C*、*D* 四點共圓，所以 $\angle BCE = \angle ADE = \angle AED$ $= \angle BEC$，故 $\overline{BC}=\overline{BE}$。

又 $\angle BCF = \angle BAD$

$= 180^0 - (\angle ABD + \angle ADB)$

$= 120^0 - \angle ADE \angle BF$

$C = \angle ABD - \angle BDF = 60^0 - \angle BAC$

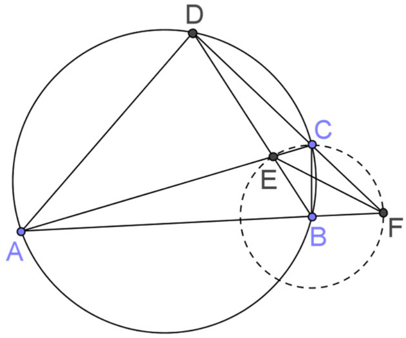
$= 60^0 - (\angle AED - \angle ABE)$

$= 120^0 - \angle AED$，

因為 $\angle ADE = \angle AED$，

所以 $\angle BCF = \angle BFC$，則 $\overline{BC}=\overline{BF}$，因此 $\overline{BC}=\overline{BE}=\overline{BF}$，故點 *B* 為 $\triangle CEF$ 的外心。

(2) 以 *B* 點為圓心，$\overline{BC}$ 為半徑作 $\triangle CEF$ 的外接圓，因為對同弧的圓心角為圓周角的 2 倍，所以 $\angle EBC = 2\angle EFC$。



【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

(1)等腰三角形兩底角相等。

(2)對頂角相等。

(3)對同弧的圓周角相等。

(4)圓內接四邊形對角互補。

(5)三角形三內角和為 180°。

(6)對同弧的圓心角為圓周角的兩倍。

利用上述之數學性質，得到 $\angle BCE = \angle BEC$ 以及 $\angle BCF = \angle BFC$，因此得到結論。

2. 平面角的一種單位為度，符號為「°」，符號「°」不可以省略不寫；平面角還有另一種單位為弧度(又稱弳度)，角度以弧度為單位時，通常不寫弧度單位。1 (弧度)= 180°/π（約 57.29577951°）。國中生作答時應注意寫上「°」。