中學生通訊解題第 116 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11601

已知 a、b 都是整數，a+b = 103，若方程式 x2+5ax+2b = 0 的兩個解都是自然數，試求整數 a、b 之值。

簡答：$a = -69$，$b = 172$

【詳解】

設 α、β 是方程式 $x^2+5ax+2b = 0$ 的兩個解，α、β 都是自然數，

則由 $\alpha+\beta = -5a$，$\alpha\beta = 2b$ 且 $a+b = 103$，

可知 $5\alpha\beta-2\alpha-2\beta = 10(a+b) = 1030$。

整理得 $(5\alpha-2)(5\beta-2) = 5154$

$= 2\times 3\times 859 = 3\times 1718$，

而知 $5\alpha-2 = 3$，$5\beta-2 = 1718$，

即 $\alpha=1$，$\beta=344$。

故 $1+344 = -5a$，$1\times 344 = 2b$，

解得 $a = -69$，$b = 172$。

【另解】

方程式 $x^2+5ax+2b = 0$

之解為 $\dfrac{-5a\pm\sqrt{25a^2-8b}}{2}$，

其中 a、b 都是整數，$a+b = 103$。

∵ 這兩個解都是自然數　∴ a 為負整數，$25a^2-8b$ 是完全平方數。

令 $25a^2-8b = k^2$，k 為正整數或 0，

a 與 k 同為奇數或同為偶數，

則 $25a^2+8a-824 = k^2$

$\Rightarrow\ (5a+\frac{4}{5})^2-\frac{16}{25}-824 = k^2$

$\Rightarrow\ (25a+4)^2-20616 = 25k^2$

$\Rightarrow\ (25a+4)^2-(5k)^2=20616$

$\Rightarrow\ (25a+4-5k)(25a+4+5k)$

$= 2^3\times 3\times 859$，

而知 $25a+4-5k$ 與 $25a+4+5k$ 同為負偶數。又 $(25a+4-5k)-(25a+4+5k) = -10k$ 是 10 的倍數，

故 $(25a+4-5k,\ 25a+4+5k) = (-5154,-4)$ 或 $(-3436,-6)$，

檢驗之，解得 $(a,k) = (-69,343)$，

故 $a = -69$，$b = 172$。

【解題評析】

「每個大於 1 的自然數，皆可分解成有限個質數的乘積」，如果問題之求解有關於整數、因數、倍數，此一被稱為「算術基本定理」的性質常可派上用場。譬如：不定方程式 $uv = a$ 之求整數解，只要因數分解整數 a，便可找到所有可能的數對 (u,v)。

本題可依題意先轉化得型如 $uv = a$ 之不定方程式，再參照「算術基本定理」解題，如上述【詳解】與【另解】。此二解法中，前者從根與係數的關係切入，利用韋

達定理推演得兩根之關係式：$(5\alpha-2)(5\beta-2)=5154$；至此，可以一一檢視 $5154=2\times3\times859$ 之所有因數，尋找自然數 (α,β) 之解；也可以抓緊 α,β 之關係，考慮如下：$uv=2\times3\times859$ 中，數對 (u,v) 之正整數解共有 8 組，此 8 組中 $u<v$ 者有 4 組：$(1,5154)$、$(2,2577)$、$(3,1718)$、$(6,859)$，其中 $u+2$ 為 5 的倍數者只有 1 組，即 $(5\alpha-2,\ 5\beta-2)=(3,1718)$，而得 $\alpha=1$，$\beta=344$。

後者由二次方程式之求根公式切入，易知判別式應為完全平方數，解題不難設想。主要難點：一是 $25a^2+8a-824=k^2$ 之配方分解，二是最後如果一一檢視 $20616=2^3\times3\times859$ 之所有因數，不免繁鉅。為求減省此事，在討論過程中最好能夠掌握 a、k 兩數的關係：$25a+4-5k$ 與 $25a+4+5k$ 皆小於 0 且同為偶數，如此，只要如下思考：$uv=2^3\times3\times859$ 中 (u,v) 之負整數解共有 16 組，這 16 組中之偶數解有 8 組，這 8 組中 $u<v$ 者有 4 組，這 4 組中 $u-v$ 為 10 的倍數者有 2 組，即 $(-5154,-4)$、$(-3436,-6)$，而知 $(a,k)=(-69,343)$，$(a,b)=(-69,172)$。

問題編號 11602

已知 a、b、c、d 四個數中，$a\neq b$，$c\neq d$，
且 $a^2+ac=7$，$b^2+bc=7$，
$c^2+ac=9$，$d^2+ad=9$，
試求 $4a+3b+2c+d$ 之值。

簡答：$\pm\frac{9}{2}$

【詳解】

$(a^2+ac)-(b^2+bc)=(a-b)(a+b)+c(a-b)$
$=(a-b)(a+b+c)=0$，
$(c^2+ac)-(d^2+ad)=(c-d)(c+d)+a(c-d)$
$=(c-d)(a+c+d)=0$，
因 $a\neq b$，$c\neq d$，
所以 $a+b+c=0$，$a+c+d=0$，
得 $b=d=-(a+c)$，又
$(a^2+ac)+(c^2+ac)=16\Rightarrow(a+c)^2=16$，
$(a^2+ac)+(c^2+ac)=1-2\Rightarrow(a+c)(a-c)=-2$，
當 $a+c=4$ 時，$a-c=-\frac{1}{2}$，
得 $a=\frac{7}{4}$，$c=\frac{9}{4}$，$b=d=-4$，
當 $a+c=-4$ 時，$a-c=\frac{1}{2}$，
得 $a=-\frac{7}{4}$，$c=-\frac{9}{4}$，$b=d=4$，
所以 $4a+3b+2c+d=\pm\frac{9}{2}$。
由 $a^2+ac=7$、$c^2+ac=9$
得 $(a+c)^2=16$，故 $a+c=\pm4$
因 $a^2+ac=a(a+c)=7\Rightarrow(a,c)=(\frac{7}{4},\frac{9}{4})$
或 $(-\frac{7}{4},-\frac{9}{4})$

(a) 若 $(a,c)=(\frac{7}{4},\frac{9}{4})$，則 $b^2+\frac{9}{4}b=7$，
$d^2+\frac{7}{4}b=9$
得 $b=-4$ 或 $\frac{7}{4}$(不合，因 $a\neq b$)，$d=-4$
或 $\frac{9}{4}$(不合，因 $c\neq d$)
故 $4a+3b+2c+d=-\frac{9}{2}$

(b) 若 $(a,c)=(-\frac{7}{4},-\frac{9}{4})$，

則 $b^2-\frac{9}{4}b=7$，$d^2-\frac{7}{4}b=9$

得 $b=4$ 或 $-\frac{7}{4}$(不合，因 $a\neq b$)，

$d=4$ 或 $-\frac{9}{4}$(不合，因 $c\neq d$)

故 $4a+3b+2c+d=\frac{9}{2}$

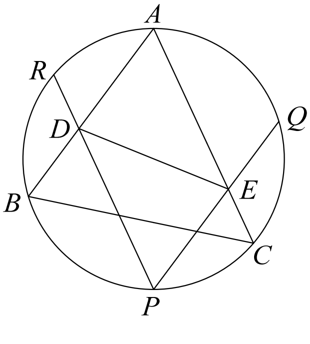
由(a)(b)知，$4a+3b+2c+d=\pm\frac{9}{2}$

【解題評析】

因本題較為平易近人，參與的同學答題狀況皆不錯，部份同學計算錯誤或是條件沒有考慮完整。

問題編號 11603

如圖，已知 ΔABC 的外接圓上三點 $P,\ Q,\ R$ 分別是圓弧 $\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{AB}$ 的中點，設 $\overline{PR}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D 點、$\overline{PQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點，試證：$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$ 且 $D,\ I,\ E$ 三點共線（其中 I 為 ΔABC 的內心）。



詳解：

連接 $\overline{AP},\ \overline{BQ},\overline{CR}$ $\because P,\ Q,\ R$ 分別是圓弧 $\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{AB}$ 的中點

$\therefore$ $\overline{AP},\overline{BQ},\overline{CR}$ 三直線交於 ΔABC 的內心 I

$\because \angle AIR=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle ADR$

$\therefore$ A, I, D, R 四點共圓

$\Rightarrow \angle AID+\angle ADR=180^\circ$，同理

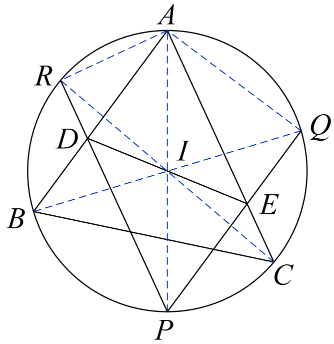
$\Rightarrow \angle AIE+\angle AQE=180^\circ$

$\because A, R, P, Q$ 四點共圓，$\angle ARD+\angle AQE=180^\circ$

$\because \angle AID+\angle AIE=180^\circ \Rightarrow D, I, E$ 三點共線

$\Rightarrow \angle ADI=\angle ARC=\angle ABC$（同位角相等），

故 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$。



【解題評析】

本題希望同學學習到的幾何觀念主要有：

1. 利用圓周上等弧對等角的性質決定內心 I 的位置。
2. 熟知判斷四點共圓的二個觀點，並能互相推導，如：

   $\because \angle AIR=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle ADR\cdots$(觀點 1)

   $\therefore$ A, I, D, R 四點共圓

   $\Rightarrow$ $\angle AID+\angle ARD=180^\circ\cdots$（觀點 2）
3. 知曉說明三點共線的重點：

   $\angle AID+\angle AIE=180^\circ$

   $\Rightarrow$ D, I, E 三點共線
4. 由同位角相等或內錯角相等，判斷兩線段平行。

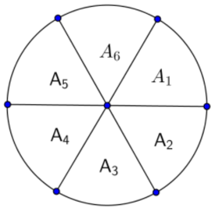
雖然有些同學在作答的過程中做了太多無謂的論述，致使證明的過程看起來龐雜、中心思想不夠明確，但最終幾乎所有投稿

的同學都能完整的證明出此題談到的性質。

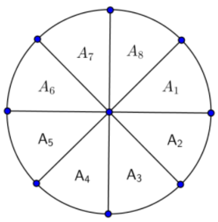
問題編號
11604

(1)如圖一，將圓等分成 6 個小扇形區域 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6，今用四種顏色將它們染色，每個小扇形區域恰染一種顏色，並且有公共邊的兩個扇形區域不同色，試問有多少種不同的染色方法？

(2)如圖二，將圓等分成 8 個小扇形區域 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8$，今用六種顏色將它們染色，每個小扇形區域恰染一種顏色，並且有公共邊的兩個扇形區域不同色，試問有多少種不同的染色方法？



圖一



圖二

簡答：(1)732，(2)390630

詳解：

(1)(a) 當 A_1,A_3,A_5 染1色時，
有 $4\times(3\times3\times3)=108$ 種方法。

(b) 當 A_1,A_3,A_5 染 2 色時，有三類情形：可能(A_1,A_3 同)或(A_3,A_5 同)或(A_5,A_1 同)，有 3×(4×3×3×2×2)=432 種方法。

(c) 當 A_1,A_3,A_5 染 3 色時，有 (4×3×2)×(2×2×2)=192 種方法。綜上，共有 108+432+192=732 種方法。

(2)(a) 當 A_1,A_3,A_5,A_7 染 1 色時，有 $6\times(5\times5\times5\times5)=3750$ 種染色方法。

(b) 當 A_1,A_3,A_5,A_7 染 2 色時，分三類情形：

(i) (A_1,A_3 同且 A_5,A_7 同)或(A_1,A_7 同且 A_3,A_7 同)，有 $2\times(6\times5)\times(5\times4\times5\times4)=24000$ 種方法。

(ii) (A_1,A_5 同且 A_3,A_7 同)，有 $(6\times5)\times(4\times4\times4\times4)=7680$ 種方法。

(iii) (A_1,A_3,A_5 同)或(A_1,A_3,A_7 同)或(A_1,A_5,A_7 同)或(A_3,A_5,A_7 同)，有 $4\times(6\times5)\times(5\times5\times4\times4)=48000$ 種方法。

(c) 當 A_1,A_3,A_5,A_7 染 3 色時，分兩類情形：

(i) (A_1,A_3 同色)或(A_3,A_5 同色)或(A_5,A_7 同色)或(A_7,A_1 同色)，有 $4\times(6\times5\times4)\times(5\times4\times4\times4)=153600$ 種方法。

(ii) (A_1,A_5 同色)或(A_3,A_7 同色)，有 $2\times(6\times5\times4)\times(4\times4\times4\times4)=61440$ 種方法。

(c) 當 A_1,A_3,A_5,A_7 染 4 色時，有 $(6\times5\times4\times3)\times(4\times4\times4\times4)=92160$ 種方法。

綜上，共有
3750+24000+7680+48000+153600+61440+92160=390630 種方法。

【解題評析】

本題主要討論塗色問題，但是要注意是否有同色的情形，有幾位同學一些細節沒有注意到，答案差一些，非常可惜。完全答

對的同學中，有些使用取捨原理，也可以非常快的求出答案。也有同學使用樹形圖很有耐心的討論，值得嘉許。

問題編號 11605

任給 $n+1$ 個不同的自然數，且它們都小於 $2n$，試證：必可從中選出三個數，使其中兩個之和等於第三個。

【解題評析】

《方法一：反證法》

設這 $n+1$ 個不同的自然數按大小順序排列為：

$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n\,(<2n) \cdots\cdots(1)$

令 $b_k = a_k - a_0\,(k=1,2,\ldots,n)$，這樣，

又得到了 n 個自然數

$b_1 < b_2 < \ldots < b_n\,(<a_n<2n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)和(2)中共有 $2n+1$ 個自然數，它們都小於 $2n$，但小於 $2n$ 的自然數只有 $2n-1$ 個，故這 $2n+1$ 個自然數中必有兩個相等，由(1)，(2)中的不等號可見，這兩個數只能是一個在(1)中，另一個在(2)中，

設為 a_k 及 b_j ($k \neq j$ 。因若 $k=j$，

則 $a_k = b_k = a_k - a_0$ ，這不可能)，

即 $a_k = a_j - a_0$ ，所以 $a_j = a_0 + a_k$ 。

《方法二：數學歸納法》

依題意 $n \geq 2$ ，

1. 當 $n=2$ 時，任給 3 個數皆小於 4，此 3 數為 1，2，3。其中 $1+2=3$，故原命題成立。
2. (1) 假設 $n=k$ 時，任給 $k+1$ 個數皆小於 $2k$，可選出三數使兩數和等於第三數之和，命題成立，即 1，2，...，$2k-1$ 中，任給 $k+1$ 個數，可選出三數使兩數和等於第三數之和。

   (2) 當 $n=k+1$ 時，任給 $k+2$ 個數皆小於 $2k+2$ ，此時給定的數字可能為 1，2，...，$2k-1$ ，$2k$ ，$2k+1$ 等。
   - i. 若從 $1 \sim 2k-1$ 中選出 $k+1$ 個數或 $k+2$ 個數，由 $n=k$ 的假設知原命題成立。
   - ii. 若從 $1 \sim 2k-1$ 中選出 k 個數，則 $2k$ 與 $2k+1$ 皆需選取，如果 1 也選取，則 $1+2k=2k+1$，原命題成立。

     考慮 1 不被選取，將 2 至 $2k-1$ 分組，令 $i+j=2k+1$，其中 i,j 為 $2 \sim 2k-1$ 之間的數。故 2 至 $2k-1$ 可分成 $k-1$ 組，此 $k-1$ 組中需選出 k 個數，故必有 1 組數中兩數皆被選取，此兩數之和皆為 $2k+1$，故原命題成立。
3. 由數學歸納法知 $n \geq 2$，原命題成立。

【解題評析】

本題目有一個主要的重點， 個自然數是小於 且是任意給定的，有同學利用奇數偶數的方式或等差數列的特性，選定一組數，再指出其中有三個數有符合 的關係，這是對題目的說明不夠理解所致。