中學生通訊解題第 115 期題目參考解答及評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11501

試證：1000 個數

$10^1+1, 10^2+1, 10^3+1, \cdots, 10^{1000}+1$ 中至少有 99% 的數不是質數。

【詳解】

設自然數 $n \neq 2^m$，則 n 有奇因數 $s>1$

令 $n=st$，可得

$10^n+1=(10^t)^s+1$

$=(10^t+1)\left[(10^t)^{s-1}-(10^t)^{s-2}+\cdots\cdots-(10^t)+1\right]$

又 $1<10^t+1<10^n+1$，故此情況下 10^n+1 不是質數。

在 1,2,…,1000 中只有 10 個是 2 的整數次方(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)，

故 $10^1+1, 10^2+1, 10^3+1, \cdots\cdots, 10^{1000}+1$ 中至少有 $1000-10=990$ 個數不是質數。

即至少有 $\dfrac{990}{1000}=99\%$ 的數不是質數。

【解題評析】

本題屬於中等難易度之數論題，同學只要有論述到：在 n 有奇因數的情況下，10^n+1 不為質數。基本上就可得到主要分數。但要注意的是：就算 n 沒有奇因數，即 $n=2^m$，也不代表 10^n+1 就是質數。

譬如 $10^{2^2}+1=10001=73\times137$。

許多同學輕易地宣稱 $10^{2^m}+1$ 是質數，是會導致扣分的。

問題編號
11502

試求出

$\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\cdots$

$\left(1-\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+2013}\right)$ 的值。（用最簡分數表示）

簡答： $\dfrac{2015}{6039}$

【詳解】

$$1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$ ，

$$\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{1+2+3+4+5}\right)\cdots\cdots$$
$$\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots 2013}\right)$$

$$=\frac{1\times 4}{2\times 3}\cdot\frac{2\times 5}{3\times 4}\cdot\frac{3\times 6}{4\times 5}\cdot\frac{4\times 7}{5\times 6}\cdots\cdots\frac{2012\times 2015}{2013\times 2014}$$

$$=\frac{2015}{3\times 2013}=\frac{2015}{6039}$$ 。

【解題評析】

解題過程中，若能將一般項

$$1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

導出來會使得說明比較完整。

有的同學用數學歸納法，而有些同學用數列的觀點，分別證明出一般項的公式，非常難得。

問題編號
11503

已知 a、b、c、d 均為正數，試證：存在一個三邊長為 $\sqrt{b^2+c^2}$ 、 $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2ac}$ 、 $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2bd}$ 為三邊長的三角形，並求此三角形之面積？

簡答：面積$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd)$

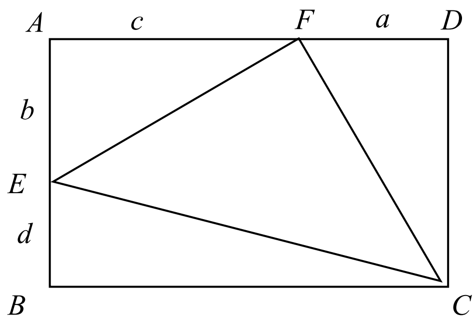
參考解答：

如圖，以 $a+c$、$b+d$ 為邊長作一矩形 $ABCD$，分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 上取點 E、F，使 $\overline{AE}=b$、 $\overline{AF}=c$，則ΔCEF 即為所求

∴面積

$$=(a+c)(b+d)-\frac{1}{2}\left[bc+a(b+d)+d(a+c)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd)$$ 。



【解題重點】

將題目所給的三邊長 $\sqrt{b^2+c^2}$ 、

$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2ac}$ 、 $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2bd}$

利用畢氏定理構造出一個圖形，只要能構造出圖形，解出正確答案就容易多了。

大多數同學都是構造出一個可用的圖形，只有少數同學用海龍公式硬解，過程複雜容易算錯。

問題編號 11504

(1) 把四邊形 ABCD 的四個邊及兩條對角線都塗上顏色，若任兩條有公共頂點(ABCD 的其中一個)的兩線段須塗不同色，則最少要幾色？

(2) 把五邊形 ABCDE 的五個邊及五條對角線都塗上顏色，若任兩條有公共頂點(ABCDE 的其中一個)的兩線段須塗不同色，則最少要幾色？

簡答：

(1)最少 3 個顏色

(2)最少 5 個顏色

詳解：

(1) 由 AB, AC, AD 可知至少 3 個顏色，設三個顏色為 1, 2, 3，AB=CD=1，AC=BD=2，AD=BC=3，此為一組使用三個顏色可行的例子，故最少 3 個顏色。

(2) [方法 1]

由 AB, AC, AD, AE 可知至少 4 個顏色，假設只用四個顏色 1, 2, 3, 4 即可讓 AB=1, AC=2, AD=3, AE=4，則 BE=2 或 3，不失一般性設 BE=2。

DE 不能與 AE, AD, BE 同，則 DE=1，接下來依序 CE=3, BC=4, 則 BD 沒有可用的顏色，所以四個顏色不可行。

而五個邊及五條對角線共有五組平行線，若把平行線塗上同一顏色，可滿足條件，共用 5 個顏色，所以最少 5 個顏色。

[方法 2]

共有 10 條線段要塗色，若只用 4 個顏色，則必有顏色至少使用在 3 個線段上，但這些線段上的頂點都不可以重複，所以至少有六個頂點，但五邊形只有五個頂點，所以不可能只用 4 個顏色，故至少 5 個顏色，例子如[方法 1]。

[方法 3]

共有五個頂點，所以同一個顏色至多只能用在四個頂點上，共有十個線段要塗色，共會有 20 個頂點數(塗一個線段，有 2 個頂點對應)，所以至少 $\frac{20}{4}=5$個顏色，例子如[方法 1]。

【解題評析】

這樣的題目主要的重點有兩個。第一個重點是找到最小值，但最小值必須是被證明的，可以透過討論的方式，也可以透過鴿

籠原理的方式，不過討論的方式並不適合對任意多邊形的推廣；另一個重點是舉出一個可以滿足最小值的例子，這一題大部分的同學都有抓到重點，可是有一些人只有例子沒有證明為什麼是最小值，而有些人只證明了最小值，但沒有例子去支持最小值，這樣的作答都不算是完整的。另外，希望各位同學可以再從自己的作法出發，再給自己一些挑戰，若 n 邊形的話，最小值會是什麼？

問題編號 11505

一圓形競技場共有 38 個入口，等距設置，依序編號為 $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{38}$。這 38 個入口其中的 11 個入口僅供參賽者使用。試證明在$(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_7)$，$(A_2, A_3, A_4, \ldots, A_8)$，…，$(A_{38}, A_1, A_2, \ldots, A_6)$，這 38 組的組合中至少有一組合包含 3 個(含)以上供參賽者使用的入口。

詳解：

設參賽者入口為 1，一般入口為 0，

設 a_i 為$(A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i+6})$ 這一組合所有數值的總和，$i=1, 2, 3, \ldots\ldots, 38$

$\sum_{i=1}^{38} a_i = 77$ (因為每個入口都算了 7 次)

【方法一 反證法】

若這 38 組的組合中沒有一組合包含 3 個(含)以上供參賽者使用的入口，

則 $a_i \le 2$，所有 $i=1, 2, 3, \ldots\ldots, 38$

因此 $\sum_{i=1}^{38} a_i \le 76$，矛盾。

故這 38 組的組合中至少有一組合包含 3 個(含)以上供參賽者使用的入口。

【方法二 鴿籠原理】

因為 $77 \div 38 = 2 \cdots 1$，所以由鴿籠原理，這 38 組的組合中至少有一組合包含 $2+1=3$ 個以上供參賽者使用的入口。

因此得證。

【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：這 38 組的組合中，供參賽者使用的每個入口都算了 7 次，因此共算了 77 次。

   【方法一 反證法】

   先設結論不成立，即這 38 組的組合中沒有一組合包含 3 個(含)以上供參賽者使用的入口，但是 $38 \times 2 = 76 < 77$，因而得到矛盾。

   【方法二 鴿籠原理】

   利用鴿籠原理 (pigeonhole's principle)，又叫作 Dirichlet 抽屜原理。

   鴿籠原理 (pigeonhole's principle)：

若有 n 個籠子和 $n+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 2 隻鴿子。

另一種為：

若有 n 個籠子和 $kn+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 $k+1$ 隻鴿子。

此題 $77 = 2 \times 38 + 1$，由鴿籠原理得證。

2. 有一些作答同學，列舉一些這 38 組的組合中至少有一組合包含 3 個(含)以上供參賽者使用的入口的情況，這樣的作答方式，並未將所有情況均考慮到，因此酌予扣分。