棋盤的完美覆蓋

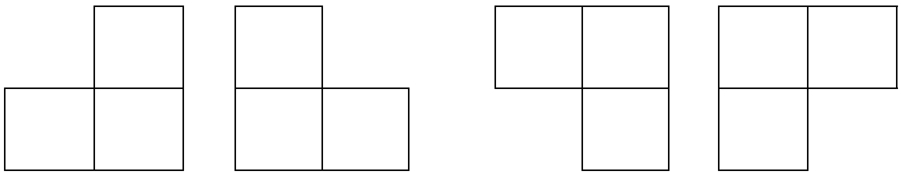
周芷凌[1]　林顥羽[1]　朱亮儒[2*]

[1]國立臺灣師範大學附屬高級中學科學班 1456 班

[2]國立臺灣師範大學數學系

壹、前言

多米洛骨牌(Tromino Puzzle)是指由三個單位正方形排成 L 字型的 1×2 單位或 2×1 單位的骨牌(也稱為 2×2 階的虧格棋盤)，它有以下四種可能的圖形：



這種骨牌最早是由 S.W. Golomb (1945)所提出，也是近代創造數學中的一個熱門問題。同時，他透過簡單的數學歸納法證明了：『任意 $2^n\times 2^n$ 階的虧格正方形棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋』。所謂**虧格棋盤** (Deficient Board)是指矩形棋盤中恰有一單位方格被挖除後剩餘的棋盤；而**完美覆蓋**(Perfect Tiling)是指骨牌恰好可以完全覆蓋棋盤上的每一格(虧格除外)，且骨牌都不重疊。相關的棋盤覆蓋問題可參考 Honsberger (1976, 1977)、Soifer (2010)及 Weisstein (2007)。

很明顯的，$m\times n$ 階的矩形棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋時，格子數 mn 就必須是 3 的倍數；而當 $m\times n$ 階的虧格棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋時，格子數 $mn-1$ 必須是 3 的倍數。特別的，當 $n\neq 5$ 時，Chu 與 Johnsonbaugh (1986) 證明了：『任意 $n\times n$ 階的虧格正方形棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 n^2-1 是 3 的倍數，亦即 n 不是 3 的倍數』。本作品的核心目標包含以下兩個研究主軸：

(1) 找出 $m\times n$ 階的矩形棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋之充要條件。

(2) 找出 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋之充要條件。

貳、完美覆蓋的充要條件

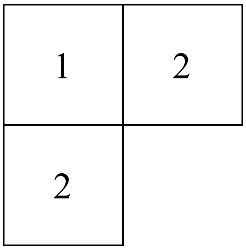
一個 $m\times n$ 階的矩形棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋，mn 必為 3 的倍數，即 m 與 n 中

*為本文通訊作者

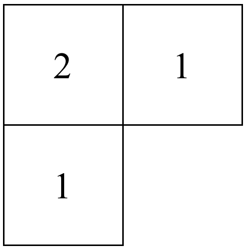
至少有一數是 3 的倍數；反之，當 mn 為 3 的倍數時，$m\times n$ 階的棋盤未必可被多米洛骨牌完美覆蓋，例如：3×3 階和 3×5 階棋盤等。顯然，2×3 階和 3×2 階的基本棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。經由分割，$2\times 3k$ 階棋盤可拆成 k 個 2×3 階的棋盤，而 $3\times 2k$ 階棋盤可拆成 k 個 3×2 階的棋盤，它們都可被多米洛骨牌完美覆蓋。進一步發現：$2\times n$ 階的棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋之充要條件為 n 是 3 的倍數；而 $3\times n$ 階的棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋之充要條件為 n 是偶數。當 m 與 n 都大於 3 時，我們獲得一般性的結果如下：

定理 1：若 $m>3, n>3$，則 $m\times n$ 階的矩形棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 mn 是 6 的倍數，或是 6 的倍數餘 3；即 $mn\equiv 0$ 或 3 $(\mathrm{mod}\, 6)$。

證明：(必要性) 設 $m\times n$ 階的矩形棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋。我們將棋盤依序填入 $1,2,1,2,1,2,\cdots$，使得相鄰格子上的數字都不同，即第 (i,j) 格填入 1 (當 $i+j$ 為偶數)或填入 2 (當 $i+j$ 為奇數)。假設用了 p 個型一的多米洛骨牌(轉角數字為 1)及 q 個型二的多米洛骨牌(轉角數字為 2)可以完美覆蓋此 $m\times n$ 階的矩形棋盤。



型一



型二

則 $3p+3q=mn$。在可以完美覆蓋的情形下，所填入的數字 1 比數字 2 的個數多一個或相等，所以，$p+2q=2p+q$ 或 $p+2q=2p+q+1$，即 $q=p$ 或 $q=p+1$。因此，$mn=3(p+q)=6p$ 或 $6p+3$，即 $mn\equiv 0$ 或 3 $(\mathrm{mod}\, 6)$。

(充分性) 設 $mn\equiv 0$ 或 3 $(\mathrm{mod}\, 6)$。首先，處理 mn 是 6 的倍數的情形。

情況一：m 是 3 的倍數且 n 是偶數（n 是 3 的倍數且 m 是偶數的情形亦同)

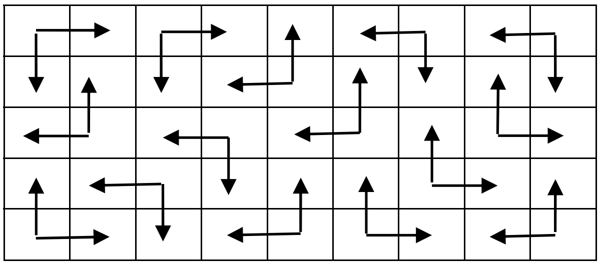
可令 $m=3k, n=2h$，則 $m\times n$ 階的矩形棋盤可拆成 kh 個 3×2 階的棋盤。因此，它是可被多米洛骨牌完美覆蓋。

情況二：m 是 6 的倍數（n 是 6 的倍數的情形亦同)

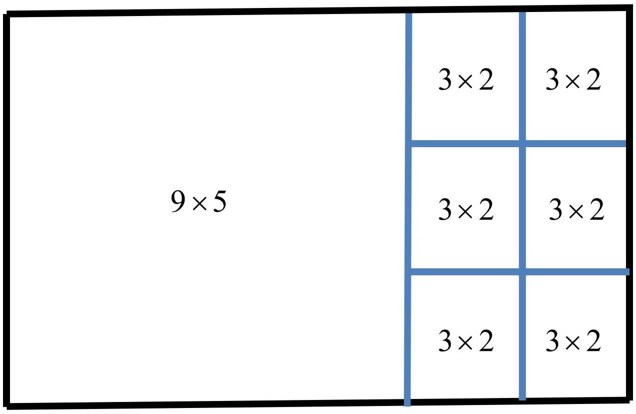
顯然，6×2 階棋盤(可拆成 2 個 3×2 階的棋盤)，6×3 階棋盤(可拆成 3 個 2×3 階的棋盤)都可被多米洛骨牌完美覆蓋。對任意 $n\geq 2$，當 $n=2k$ 為偶數時，

$6\times n$ 階棋盤可拆成 k 個 6×2 階的棋盤；而當 $n=2k+1$ 為奇數時，$6\times n$ 階棋盤可拆成 $k-1$ 個 6×2 階的棋盤及 1 個 6×3 階棋盤的組合。因此，$6\times n$ 階的棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。進一步可推得：當 $m=6\ell$ 時，$m\times n$ 階的棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，因為它可被拆成 ℓ 個 $6\times n$ 階的棋盤。

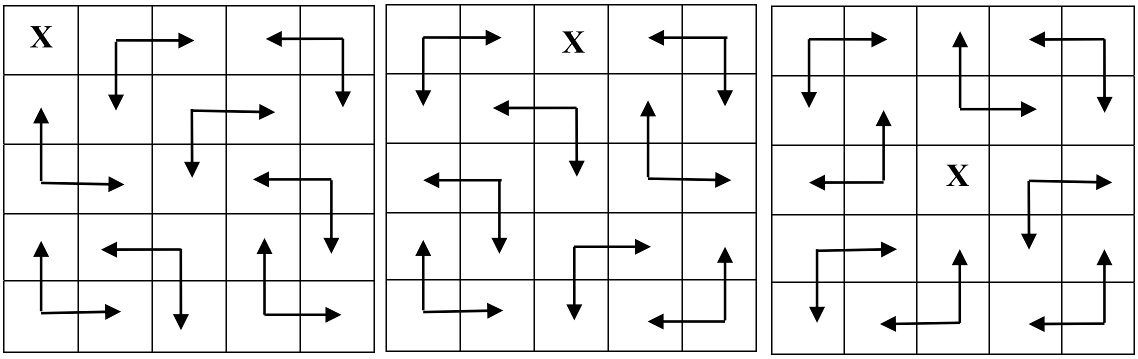
接著，考慮 mn 是 6 的倍數餘 3 的情形。此時，m,n 均為奇數，且至少一數是 6 的倍數餘 3。不失一般性，可設 $m=6k+3, n=2h+1$。因為 $6k\times n$ 階的棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋，因此，我們僅需要考慮 $m=9$ 的情況。
顯然，5×9 階的盤可被多米洛骨牌完美覆蓋，如下圖所示：



因此，9×5 階的棋盤也可被多米洛骨牌完美覆蓋。對奇數 $n=2h+1\geq 7$，由於 $9\times n$ 階的棋盤可拆成 1 個 9×5 階的棋盤及 $3(h-2)$ 個 3×2 階的棋盤(如下圖為 $h=4$ 的情況)，因此，$9\times n$ 的棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋。證畢！



關於虧格棋盤，經過實際操作後，我們知道：2×5 階、2×8 階及 5×5 階的虧格棋盤有些可被多米洛骨牌完美覆蓋，有些則不行，這與虧格所在的位置有關。事實上，對於一個 5×5 階的虧格棋盤，我們發現：當虧格位在棋盤的第 (i,j) 格，且 i,j 都是奇數時，它們都可被 8 個多米洛骨牌完美覆蓋(如下列圖形所示，**X** 為虧格所在的位置)；而當 i,j 中有一為偶數時，不難驗證它們都無法被多米洛骨牌完美覆蓋。



進一步觀察與分析，不論虧格的位置如何，我們可以發現：

(1) $2\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 $n=2$(當 $n\geq 3$，且虧格位在第 $(2,3)$ 格時，$2\times n$ 階的虧格棋盤就無法被多米洛骨牌完美覆蓋)；

(2) $3\times n$ 階的虧格棋盤都無法被多米洛骨牌完美覆蓋(因為 $3n-1$ 不是 3 的倍數)；

(3) $4\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 $4\leq n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ (因為 4×4 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，再由以下擴展性 2 可推導出 $4\times(3k+1)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋)；

(4) 不存在 n 使得 $5\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋(因為虧格位在第 $(3,2)$ 格時，$5\times n$ 階的虧格棋盤就無法被多米洛骨牌完美覆蓋)。

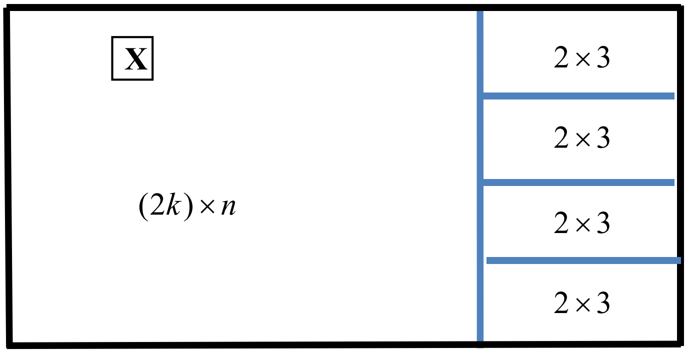
以下，我們將針對 $m>5$ 且 $n>5$ 時，找出 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件。為了證明主要結果，我們先介紹兩個基本的擴展性質：

擴展性 1：若 $m>1, n>5$，且 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，則 $m\times(n+6)$ 階的虧格棋盤也都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

證：將 $m\times(n+6)$ 階的虧格棋盤分拆成一個 $m\times n$ 階的虧格棋盤及一個為 $m\times 6$ 階的完整棋盤，而這兩者都可由多米洛骨牌完美覆蓋。

擴展性 2：若 m 為偶數，$n>2$，且 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，則 $m\times(n+3)$ 階的虧格棋盤也都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

證：令 $m=2k$。將 $m\times(n+3)$ 階的虧格棋盤分拆成一個 $m\times n$ 階的虧格棋盤及 k 個 2×3 階的完整棋盤(如下圖為 $k=4$ 的情況)，而這些都可由多米洛骨牌完美覆蓋。



依據 Chu-Johnsonbaugh 定理，我們知道：當 $n\neq 5$ 時，所有 $n\times n$ 階的虧格正方形棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 n^2-1 是 3 的倍數。至於一般 $m\times n$ 階虧格矩形棋盤，當 $mn-1$ 是 3 的倍數時，即 $mn\equiv 1 \pmod 3$，此式等價於「$m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$ 或 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$」。依此分類，以下的定理提供了 $m\times n$ 階的虧格棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋的一個充分條件。

定理 2：設 $m>2, n>2$，且 $m-n$ 為偶數。

(1) 若 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$，則任意 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

(2) 若 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$，且 $m,n>5$，則任意 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

證明：當 $m=n\neq 5$ 時，由 Chu-Johnsonbaugh 定理知：此種 $n\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。當 $m\neq n$ 時，不失一般性，可設 $n>m$。

(1) 當 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$ 時，可令 $m=3k+1, n=3h+1$，又 m,n 有相同的奇偶性，可設 $h=k+2p$，其中 $p\geq 1$。由此可得

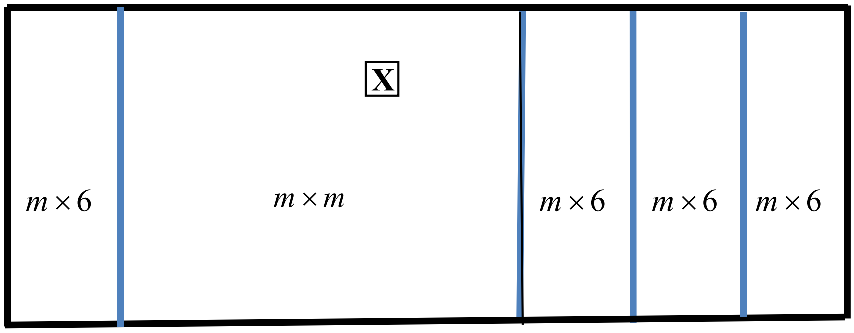
$$n=3(k+2p)+1=3k+6p+1=m+6p。$$

因此，這 $m\times n$ 階的虧格棋盤可被分拆成一個 $m\times m$ 階的虧格棋盤及 p 個 $m\times 6$ 階的完整棋盤，(如下圖為 $p=4$ 的情況)，它們都可被多米洛骨牌完美覆蓋。因此，這種 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。

(2) 當 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$，且 $m,n>5$ 時，可令 $m=3k+2, n=3h+2$，又 m,n 有相同的奇偶性，可設 $h=k+2p$，其中 $p\geq 1$。由此可得

$$n=3(k+2p)+2=3k+6p+2=m+6p。$$

因此，這 $m\times n$ 階的虧格棋盤一樣可以被分拆成一個 $m\times m$ 階的虧格棋盤及 p 個 $m\times 6$ 階的完整棋盤，它們都可被多米洛骨牌完美覆蓋。因此，這種 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。



在**定理** 2 中，$m-n$ 為偶數，即 m,n 有相同的奇偶性。當 m 與 n 的奇偶性不同時，是否仍有類似的結果呢？進一步研究與分析，我們藉由**定理** 2 一樣可以推導出以下相同的結果。

定理 3：設 $m>2,n>2$，且 $m-n$ 為奇數。

(1) 若 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$，則任意 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

(2) 若 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$，且 $m,n>5$，則任意 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

證明：

(1) 不失一般性，可設 $n>m$。由 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$，可令 $m=3k+1,n=3h+1$，得到 $n-m=3(h-k)$；又 $m-n$ 為奇數，可知 $h-k$ 也是奇數。於是可設 $h-k=2p+1$，其中 $p\geq 0$。由此可得 $n=m+3(2p+1)=m+6p+3$。

(i) 當 m 為偶數時，因 $m^2-1=3(3k^2+2k)$ 是 3 的倍數，由 Chu-Johnsonbaugh 定理，任意 $m\times m$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。利用**擴展性** 2，可知：$m\times(m+3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。再利用**擴展性** 1 及數學歸納法，可知：$m\times(m+6p+3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，即 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。

(ii) 當 m 為奇數時，$m\geq 7$。因為 $(m+3)(m-3)-1=3(3k^2+2k-3)$ 是 3 的倍數，且 $(m+3)-(m-3)$ 為偶數，由**定理** 2(1)，任意 $(m+3)\times(m-3)$ 階的虧格棋盤都可以被多米洛骨牌完美覆蓋。利用**擴展性** 2，得知：$(m+3)\times m$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，故 $m\times(m+3)$ 階的虧格棋盤也都可被多米洛骨牌完美覆蓋。再利用**擴展性** 1 以及數學歸納法，我們可以證得：$m\times(m+6p+3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，即 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。

(2) 仿(1)的證明，可設 $n>m$。由 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$，可令 $m=3k+2,n=3h+2$，

得到 $n-m=3(h-k)$ ；又 $m-n$ 為奇數，可知 $h-k$ 也是奇數。於是，可設 $h-k=2p+1$，其中 $p\geq 0$。由此可得 $n=m+3(2p+1)=m+6p+3$。

(i) 當 m 為偶數時，因為 $m^2-1=3(3k^2+2k+1)$ 是 3 的倍數，我們一樣可以由 Chu-Johnsonbaugh 定理，得到：任意 $m\times m$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。仿照 1(i) 的證明，可知：$m\times(m+6p+3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，即 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。

(ii) 當 m 為奇數時，$m\geq 11$。因為 $(m+3)(m-3)-1=3(3k^2+4k-2)$ 是 3 的倍數，且 $(m+3)-(m-3)$ 為偶數，由**定理** 2(2)，任意 $(m+3)\times(m-3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。再仿照 1(ii) 的證明，同樣可以得到：$m\times(m+6p+3)$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，即 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被完美覆蓋。

綜合以上**定理** 2 及**定理** 3，我們可以得到 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件，此結果推廣了 Chu -Johnsonbaugh 定理。

定理 4：若 $m\geq 2$ 且 $n\geq 2$，則不論虧格的位置如何，任意 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋的充要條件為 $m=n=2$ 或 $m=4\leq n\equiv 1 \pmod 3$ 或 $n=4\leq m\equiv 1 \pmod 3$ 或 $m>5, n>5, mn\equiv 1 \pmod 3$。

證明：(充分性) 每一種情況都可得到 $mn\equiv 1 \pmod 3$，等價於「$m\equiv n\equiv 1 \pmod 3$ 或 $m\equiv n\equiv 2 \pmod 3$」，因此，由**擴展性** 2、**定理** 2 及**定理** 3 得知：此種 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋。

(必要性) 若 $m\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋，則 $mn-1$ 必為 3 的倍數，即 $mn\equiv 1 \pmod 3$。當 $m>5$ 且 $n>5$ 時，命題顯然成立。若 m 與 n 中有一數不大於 5，可設 $m\leq n$，則 $m\leq 5$。由於 $3\times n$ 階虧格棋盤都無法被多米洛骨牌完美覆蓋，而 $5\times n$ 階虧格棋盤僅有一些可被多米洛骨牌完美覆蓋；因此，$m\in\{2,4\}$。當 $m=2$ 時，僅有 $n=2$ 才能使任意 $2\times n$ 階的虧格棋盤都可被多米洛骨牌完美覆蓋；而當 $m=4$ 時，由 $mn\equiv 1 \pmod 3$，可得 $n\equiv 1 \pmod 3$；因此，$m=4\leq n\equiv 1 \pmod 3$。證畢！

參、結語

許多虧格棋盤，如：5×2 階、5×5 階、5×8 階等虧格棋盤，有些可被多米洛骨牌完美覆蓋，有些無法被完美覆蓋，這與虧格所在的位置有關。例如：5×2 階虧格棋盤，當

虧格位在第 (i, j) 格，其中 $i = 1,2,4,5, j = 1,2$ 時，它們才可以被多米洛骨牌完美覆蓋；又如： 5×5 階虧格棋盤，當虧格位在第 (i, j) 格，其中 i, j 都是奇數時，它們才可以被多米洛骨牌完美覆蓋。最後，我們提出一個進階的問題，留給讀者自行研究：『找出 $m \times n$ 階的虧格棋盤可被多米洛骨牌完美覆蓋之所有可能的虧格位置，又有多少種可以完美覆蓋的方式？』。

參考文獻

I. P. Chu and R. Johnsonbaugh (1986), *Tiling deficient boards with trominoes*,.Mathematics Magazine **59(1**), 34-40

S. W. Golomb (1954), *Checker boards and polyominoes*. American Mathematical Monthly **61**: 675–682. doi:10.2307/2307321. MR 0067055.

S. W. Golomb (1994), *Polyominoes* (2nd ed.). Princeton, New Jersey: Princeton U. Press. ISBN 0-691-02444-8.

R. Honsberger (1976), *Mathematical Gems II*. Dolciani Math. Expositions No. **2**, MAA, 62-63.

R. Honsberger (1977), In Pólya's Footsteps. Dolciani Math. Expositions No. **19**, MAA, 81-84.

A. Soifer (2010), *Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics*. Springer, (2nd, expanded edition).

E. W. Weisstein (2007), Making *MathWorld. The Mathematica Journal* **10**, 474-488.