中學生通訊解題第 114 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11401

試求方程式 $a^2b^2 = 4a^5 + b^3$ 的非零整數解。

簡答：序對
$(a,b) = (-1,2), (2,-4), (27,-243), (27,486),$
$(32,512), (54,972), (125,3125)$
等 7 組解

參考解答：

設最大公因數 $(a,b) = g$，則可令 $a = ga', b = gb'$ 代入 $a^2b^2 = 4a^5 + b^3$
得 $g^2a'^2g^2b'^2 = 4g^5a'^5 + g^3b'^3$
$\Rightarrow ga'^2(b'^2 - 4ga'^3) = b'^3 \cdots (1)$
又 a', b' 互質，所以 a'^2, b'^3 亦互質。
因此由(1)式可推得 $a'^2 = 1$，即 $a' = \pm 1$
所以可以令 $b = ac$ 再代入上式得
$a^2a^2c^2 = 4a^5 + a^3c^3 \Rightarrow ac^2 = 4a^2 + c^3 \cdots (2)$
則再設最大公因數 $(a,c) = d$，則可令 $a = dA, c = dC$ 代入(2)中

$$dC^2(A-C) = 4A^2 \Rightarrow d = \frac{4A^2}{C^2(A-C)}$$

又因為 A, C 互質且 C^2 可整除 $4A^2$，所以 $C = -2, -1, 1, 2$ 等 4 組整數解。
即得序對
$(A,C) = (-1,-2), (3,-1), (1,-1), (5,1), (3,1), (2,1), (3,2)$
，則序對
$(a,b) = (-1,2), (2,-4), (27,-243), (27,486),$
$(32,512), (54,972), (125,3125)$
等 7 組解。

【解題評析】

1. 本題屬於較困難的數論方程式問題，同學不僅能確切掌握因倍數性質，且能透過對整數解的了解正確計算出數值，更重要的是能利用數學符號完整表達論證計算的過程。本題徵答人數僅有 8 人，平均得分為 4.875 分，其中只有 4 位同學獲 7 分滿分，其餘未獲滿分同學主要是書寫方式與計算考慮不夠周延，或者是在計算中忘記考慮某些條件導致錯誤推論或者解答有所缺漏。整體而言參與徵答學生的論證與思考表達方法均十分優異，值得肯定。
2. 許多同學亦採用了 $b = ak$ 的論證模式，將其代入原式 $a^2b^2 = 4a^5 + b^3$ 中化簡得到
   $k^2a = 4a^2 + k^3$
   $\Rightarrow 4a^2 - k^2a + k^3 = 0$
   可解出 $a = \dfrac{k(k \pm \sqrt{k^2 - 16k})}{8}$ 有整數解的條件。

故根號內 $k^2-16k=m^2$ 其中 $m\ge 0 \Rightarrow k^2-16k+8^2-m^2=8^2$

$$\Rightarrow (k-8)^2-m^2=64$$

所以 $(k-8-m)(k-8+m)=64$ 即可由因倍數性質正確計算出 k 值，並進而推算 a,b 共有 7 種非零整數解。

問題編號
11402

已知關於 x 的方程式

$$(a^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-(2a+7)\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=0$$

有實數根。

(1) 求 a 的取值範圍

(2) 若原方程式的兩個實數根為 x_1,x_2，且 $\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{3}{11}$，求 a 的值。

簡答： (1) $a\ge -\frac{53}{28}$ (2) $a=10$

參考解答：

(1) 令 $\frac{x}{x-1}=y$，則原方程式為 $(a^2-1)y^2-(2a+7)y+1=0$，由題意知原方程式有實數根，即方程式 $(a^2-1)y^2-(2a+7)y+1=0$ 有實數根。

當 $a^2-1=0$，即 $a=\pm1$時，方程式為 $-9y+1=0$ 或 $-5y+1=0$，即 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{9}$ 或 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{5}$，得 $x=-\frac{1}{8}$ 或 $x=-\frac{1}{4}$。

當 $a^2-1\ne 0$，即 $a\ne\pm1$ 時，$\Delta=(2a+7)^2-4(a^2-1)\ge 0$。

即當 $a\ge -\frac{53}{28}$ 時，方程式 $(a^2-1)y^2-(2a+7)y+1=0$ 有實數根，由 $y=\frac{x}{x-1}$ 知原方程式必有實數根。故當 $a\ge -\frac{53}{28}$時，原方程式有實數根。

(2) 由題意知 $y_1=\frac{x_1}{x_1-1}$ 與 $y_2=\frac{x_2}{x_2-1}$ 是方程式 $(a^2-1)y^2-(2a+7)y+1=0$ 的兩個實數根，則有 $(a^2-1){y_1}^2-(2a+7)y_1+1=0$，$(a^2-1){y_2}^2-(2a+7)y_2+1=0$，兩式相減得

$(y_1-y_2)[(a^2-1)(y_1+y_2)-(2a+7)]=0$。

若 $y_1=y_2$，則 $a=-\frac{53}{28}$，而 $y_1+y_2=\frac{3}{11}$，即 $y_1=\frac{3}{22}$，代入方程式得

$$(a^2-1)\times\left(\frac{3}{22}\right)^2-(2a+7)\times\frac{3}{22}+1=0$$

，知 a 不等於 $-\frac{53}{28}$，矛盾。所以 $y_1 \neq y_2$，得

$(a^2-1)(y_1+y_2)-(2a+7)=0$，

即 $y_1+y_2=\frac{2a+7}{a^2-1}=\frac{3}{11}$，

即 $3a^2-22a-80=0$，

得 $(a-10)(a+\frac{8}{3})=0$。

又因為 $a \geq -\frac{53}{28}$，故 $a=10$。

【解題重點】

本題沒給圖形，只要能畫出圖形，解出正確答案並不困難。大多數同學會漏掉圖(2)，但有少數同學卻是漏掉圖(1)，細心的同學有 6 位，他們都得到 7 分。

問題編號

11403

在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{AE}$ 為 $\angle BAC$ 的平分線，試求 $\angle EAD$。

簡答：67.5°或 22.5°

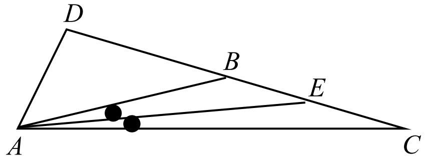
參考解答：

有 2 種可能，如圖(1)：

$\because \overline{AB}=\overline{BC} \therefore \overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\Rightarrow \angle ABD = 30° \Rightarrow \angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 7.5°$

$\therefore \angle EAD = 60° + 7.5° = 67.5°$。



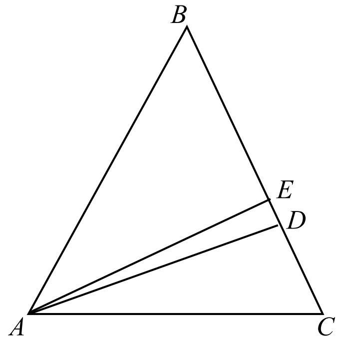
圖(1)

如圖(2)：同(1)，$\angle B = 30°$

$\Rightarrow \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB = 37.5°$

$\therefore \angle CAD = 90°-75°=15°$

$\therefore \angle EAD= 37.5°-15° = 22.5°$。



圖(2)

【解題評析】

本題屬於簡易的幾何與數論問題，同學只需透過細緻的觀察座標特性分類找出適合

的規律與條件，加上計算與推導，即可獲得正確的座標。

問題編號
11404

由 9 名裁判給 12 名體操選手評分，每名裁判對每個選手給出的分數都是 1,2,3,...,12 分的其中一個且給每個選手的分數都不同，若最後的結果顯示：
每個選手得到的九個分數中，最高與最低的差均不大於 3。
假設 12 名選手的總分依序為 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$，且 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{12}$，則 a_1的最大值為何？

簡答：24

詳解：

(1) 9 個 1 分最多只能在分配到 4 個人身上。
若在五個人身上，因為任一裁判在這五人身上，必給出至少一個不小於 5 的分數，這與最高與最低的差不大於 3 矛盾。

(2) 若 9 個 1 分只在 1 個人身上，$a_1 = 9$

(3) 若 9 個 1 分集中在 2 個人身上，

$a_1 \le 1\times 5 + 4\times 4 = 21$，$a_1 \le 21$

(4) 若 9 個 1 分集中在 3 個人身上，

$a_1 + a_2 + a_3 \le 1\times 9 + 3\times 9 + 4\times 9 = 72$

，$a_1 \le 24$

(5) 若 9 個 1 分集中在 4 個人身上，

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le$

$1\times 9 + 2\times 9 + 3\times 9 + 4\times 9 = 90$，

$a_1 \le 22$

(6) 綜合以上，a_1的最大值為 24，

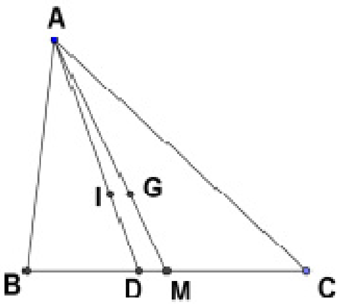
例子：只要讓 a_1, a_2, a_3 平均分配 1,3,4，a_4, a_5盡量平均分配 2,5，其它人依序全得 6，全得 7，...，全得 12。

【解題評析】
這樣的題目主要的方法是對極端數值做討論，因為是求最小量的最大值，所以從 1 開始討論起，加上總量的限制，可以討論出 1 的可分配人數，再針對各可能狀況討論，最後必須給出一種可能的分配，才能支持最小值的答案。大部分的同學都能找到討論的重點，表達也都非常詳盡，頗令人驚豔，希望各位同學能繼續努力，在數學中找到樂趣。

問題編號
11405

設 ΔABC 中，

$\overline{AB}=8, \overline{BC}=10, \overline{AC}=12$。若 G 與 I 分別為 ΔABC 之重心與內心，則 $\overline{GI}$ 之值為何？



簡答：$\frac{2}{3}$

參考解答：

(1) 先證明 $\overline{IG} // \overline{BC}$。

因為 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線，

故 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$。

因此，$\overline{BD}=4$、$\overline{CD}=6$。

因為 $\overline{BI}$ 是 $\angle ABC$ 的角平分線，

故 $\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=2:1$，

又 G 為 ΔABC 之重心，

故 $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1=\overline{AI}:\overline{ID}$。

從而 $\overline{IG} // \overline{BC}$。

(2) 由(1)知 $\overline{IG} // \overline{BC}$，

且 $\overline{AG}:\overline{AM}=2:3=\overline{AI}:\overline{AD}$，

故知 $\overline{GI}=\frac{2}{3}\overline{DM}=\frac{2}{3}(\overline{BM}-\overline{BD})$

$=\frac{2}{3}(5-4)=\frac{2}{3}$。

【解題評析】

本題同學解題分為兩種想法。第一種是先考慮火柴較少的狀況，去分析必勝法則，再去推論一般的情況，很可惜過程寫的不夠清楚。第二種是就解答給的方法，直接考慮一般化的結果，再去考慮必勝法則，可惜的是同學的解法在解答第二步的情況出了一點問題。