平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式

李輝濱

嘉義市輔仁中學退休教師

壹、前言

首先來探討一個受規範的圓內接七邊形的特例情況：即任意給定一個圓內接七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令其各邊線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_1}=V_7$，見下圖 1.，在圖形中央任意選定兩相鄰交叉對角線長 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_2A_5}=d_{25}$ 的組合，也還有其它多種組合；如；$\overline{A_2A_5}=d_{25}$，$\overline{A_3A_6}=d_{36}$ 的組合及 $\overline{A_3A_6}=d_{36}$與 $\overline{A_4A_7}=d_{47}$的組合，……等。

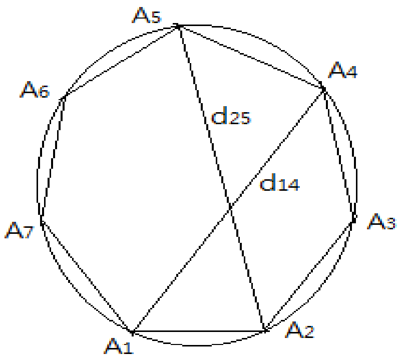

圖 1

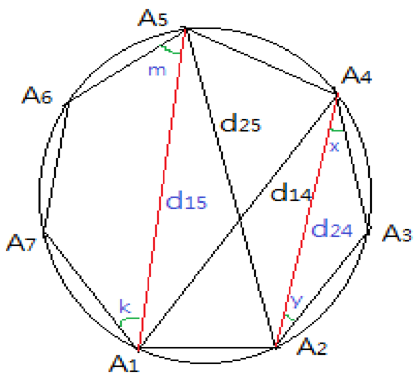

圖 2.

(a) 連接對角線長 $\overline{A_1A_5}=d_{15}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，使形成一圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，見上圖 2.，由托勒密定理 Ptolemy theorem 得 $d_{14}d_{25}=V_1V_4+d_{24}d_{15}$ (1)

(b) 圖 2.中，令角度 $m=\angle A_1A_5A_6$，角度 $k=\angle A_7A_1A_5$，對四邊形 $A_1A_5A_6A_7$ 言

可得； $d_{15}=V_5\cos m+V_6\cos[m-(\pi-A_6)]+V_7\cos k$

$$=V_5\cos(\pi-A_7)+V_6\cos[(\pi-A_7)-(\pi-A_6)]+V_7\cos(\pi-A_6)$$

$$=-V_5\cos A_7+V_6\cos(A_6-A_7)-V_7\cos A_6 \qquad \text{(b-1)}$$

再令角度 $x=\angle A_3A_4A_2$，角度 $y=\angle A_4A_2A_3$，對三角形 $A_2A_3A_4$ 言可得；

$d_{24} = V_2 \cos y + V_3 \cos x$ ，因對六邊形 $A_1A_2A_4A_5A_6A_7$ 言，可得下列頂角關係；

$$A_1 + (A_4 - x) + A_6 = 2\pi = A_7 + (A_2 - y) + A_5 \quad \Rightarrow$$

$A_1 + A_4 + A_6 = 2\pi + x$ 且 $A_2 + A_5 + A_7 = 2\pi + y$ ，代入 d_{24} 中，得

$$d_{24} = V_2 \cos(A_2 + A_5 + A_7) + V_3 \cos(A_1 + A_4 + A_6) \qquad \text{(b-2)}$$

將方程式(b-1)與(b-2)一起代入方程式(1)，經演算後，整理，得下列方程式；

$$\begin{aligned} d_{14}d_{25} = {} & V_1V_4 - V_2V_5 \cos A_7 \cos(A_2 + A_5 + A_7) + V_2V_6 \cos(A_6 - A_7)\cos(A_2 + A_5 + A_7) \\ & - V_2V_7 \cos A_6 \cos(A_2 + A_5 + A_7) - V_3V_5 \cos A_7 \cos(A_1 + A_4 + A_6) \\ & + V_3V_6 \cos(A_6 - A_7)\cos(A_1 + A_4 + A_6) - V_3V_7 \cos A_6 \cos(A_1 + A_4 + A_6) \qquad (2) \end{aligned}$$

(c) 再對四邊形 $A_1A_5A_6A_7$ 言，有下列的邊長與頂角正弦值關係式；

$$0 = V_5 \sin m + V_6 \sin[m - (\pi - A_6)] - V_7 \sin k = V_5 \sin m - V_6 \sin(m + A_6) - V_7 \sin k$$

$$\Rightarrow \quad 0 = V_5 \sin A_7 + V_6 \sin(A_6 - A_7) - V_7 \sin A_6 \qquad \text{(c-1)}$$

又對三角形 $A_2A_3A_4$ 言，可得； $0 = V_2 \sin y - V_3 \sin x \quad \Rightarrow$

$$0 = V_2 \sin(A_2 + A_5 + A_7) - V_3 \sin(A_1 + A_4 + A_6) \qquad \text{(c-2)}$$

將方程式(c-1)與 (c-2)式相乘，經演算後，整理，得下列方程式；

$$\begin{aligned} 0 = {} & V_2V_5 \sin A_7 \sin(A_2 + A_5 + A_7) + V_2V_6 \sin(A_6 - A_7)\sin(A_2 + A_5 + A_7) \\ & - V_2V_7 \sin A_6 \sin(A_2 + A_5 + A_7) - V_3V_5 \sin A_7 \sin(A_1 + A_4 + A_6) \\ & - V_3V_6 \sin(A_6 - A_7)\sin(A_1 + A_4 + A_6) + V_3V_7 \sin A_6 \sin(A_1 + A_4 + A_6) \qquad (3) \end{aligned}$$

(d) 將方程式(2)減去方程式(3)，再經運算，化簡整理後，得下列方程式；

$$\begin{aligned} d_{14}d_{25} = {} & V_1V_4 - V_2V_5 \cos(A_2 + A_5) + V_2V_6 \cos(A_2 + A_5 + A_6) \\ & - V_2V_7 \cos(A_2 + A_5 + A_6 + A_7) - V_3V_5 \cos(A_1 + A_4 + A_6 + A_7) \\ & + V_3V_6 \cos(A_1 + A_4 + A_7) - V_3V_7 \cos(A_1 + A_4) \qquad (4) \end{aligned}$$

這方程式(4)就是圓內接七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的面積型量綱公式，因為公式裡的各項量綱都是長度的平方。

(e) 再將方程式(b-2)與 (c-1)式相乘，得下列方程式；

$$\begin{aligned} 0 = {} & V_2V_5 \sin A_7 \cos(A_2 + A_5 + A_7) + V_2V_6 \sin(A_6 - A_7)\cos(A_2 + A_5 + A_7) \\ & - V_2V_7 \sin A_6 \cos(A_2 + A_5 + A_7) + V_3V_5 \sin A_7 \cos(A_1 + A_4 + A_6) \\ & + V_3V_6 \sin(A_6 - A_7) \cos(A_1 + A_4 + A_6) - V_3V_7 \sin A_6 \cos(A_1 + A_4 + A_6) \qquad \text{(e-1)} \end{aligned}$$

再將方程式(b-1)與 (c-2)式相乘，得下列方程式；

$$\begin{aligned} 0 = {} & - V_2V_5 \cos A_7 \sin(A_2 + A_5 + A_7) + V_2V_6 \cos(A_6 - A_7) \sin(A_2 + A_5 + A_7) \\ & - V_2V_7 \cos A_6 \sin(A_2 + A_5 + A_7) + V_3V_5 \cos A_7 \sin(A_1 + A_4 + A_6) \\ & - V_3V_6 \cos(A_6 - A_7) \sin(A_1 + A_4 + A_6) + V_3V_7 \cos A_6 \sin(A_1 + A_4 + A_6) \qquad \text{(e-2)} \end{aligned}$$

將方程式(e-1)與 (e-2)式兩式相加，經演算後，整理，得下列方程式；

$$0=-V_2V_5\sin(A_2+A_5)+V_2V_6\sin(A_2+A_5+A_6)-V_2V_7\sin(A_2+A_5+A_6+A_7)$$
$$+V_3V_5\sin(A_1+A_4+A_6+A_7)-V_3V_6\sin(A_1+A_4+A_7)+V_3V_7\sin(A_1+A_4) \quad (5)$$

(f) 比較方程式 (4)式與 (5)式，見到兩者的 cos 項與 sin 項的係數與角度組合均對應相同，可將兩者相組合；今將兩式的等號兩側各自完全平方後，再相加，並經一連串三角函數角度的和差轉換公式運算，化簡，先得到下列方程式；

$$d_{14}{}^2d_{25}{}^2=V_1{}^2V_4{}^2+V_2{}^2V_5{}^2+V_2{}^2V_6{}^2+V_2{}^2V_7{}^2+V_3{}^2V_5{}^2+V_3{}^2V_6{}^2+V_3{}^2V_7{}^2-2V_2V_3V_5{}^2\cos A_3$$
$$-2V_2V_3V_6{}^2\cos A_3-2V_2V_3V_7{}^2\cos A_3-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)$$
$$+2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_5+A_6)-2V_1V_2V_4V_7\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)$$
$$-2V_1V_3V_4V_5\cos(A_1+A_4+A_6+A_7)+2V_1V_3V_4V_6\cos(A_1+A_4+A_7)$$
$$-2V_1V_3V_4V_7\cos(A_1+A_4)-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_2{}^2V_5V_7\cos(A_6+A_7)$$
$$-2V_2V_3V_5V_6\cos(A_1+A_2+A_4+A_5+A_7)+2V_2V_3V_5V_7\cos(A_1+A_2+A_4+A_5)$$
$$-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7+2V_2V_3V_5V_6\cos(A_6-A_3)+2V_2V_3V_6V_7\cos(A_3+A_7)$$
$$-2V_2V_3V_5V_7\cos(A_6+A_7-A_3)+2V_2V_3V_6V_7\cos(A_7-A_3)$$
$$-2V_3{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_3{}^2V_5V_7\cos(A_6+A_7)-2V_3{}^2V_6V_7\cos A_7 \quad (6)$$

對(6)式再作角度轉換，繼續運算化簡，並重新整理排列後，得下列方程式；

$$d_{14}{}^2d_{25}{}^2=V_1{}^2V_4{}^2+[V_2{}^2V_5{}^2+V_3{}^2V_5{}^2-2V_2V_3V_5{}^2\cos A_3]$$
$$+[V_2{}^2V_6{}^2+V_3{}^2V_6{}^2-2V_2V_3V_6{}^2\cos A_3]+[V_2{}^2V_7{}^2+V_3{}^2V_7{}^2-2V_2V_3V_7{}^2\cos A_3]$$
$$-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)+2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_5+A_6)$$
$$-2V_1V_2V_4V_7\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)+2V_1V_3V_4V_5\cos(A_2+A_3+A_5)$$
$$-2V_1V_3V_4V_6\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)-2V_1V_3V_4V_7\cos(A_1+A_4)$$
$$+[-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_2{}^2V_5V_7\cos(A_6+A_7)-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7]$$
$$+[-2V_3{}^2V_5V_6\cos A_6+2V_3{}^2V_5V_7\cos(A_6+A_7)-2V_3{}^2V_6V_7\cos A_7]$$
$$+4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6-4V_2V_3V_5V_7\cos A_3\cos(A_6+A_7)$$
$$+4V_2V_3V_6V_7\cos A_3\cos A_7 \quad (7)$$

這方程式(7)就是圓內接七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的面積平方型量綱公式，因為公式裡的各項量綱都是長度的四次方。事實上，方程式(7)與方程式(4)是等價方程式，兩者都是同樣在描述圓內接七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。又因為圓內接七邊形各內角的任意加法組合無特定關係值，除了七個內角和恰為5π外，所以根據此觀點可以作一個猜想：即此方程式(7)應當也是平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的面積平方型量綱公式。

再重新檢視方程式(6)的原型式，將其與平面八邊形面積型餘弦公式作一個項式相對應的比對，可發覺到兩者之間呈現極高度融合相關性，這微妙特徵令人思索到可用餘弦定理公式與新構圖出的平面八邊形之間作一個完美縝密的連結！進而應用此關連性嚴謹的推導出平面凸七邊形方程式(7)式。

接下來，要尋求適切方法特以證明出這預想的平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的面積平方型量綱公式。並將推證出的公式與方程式(7)作一個完整的對照比較，即能呼應出先自圓內接七邊形的規則特例思考起較容易，然後逐步規劃分析擴展到繁複的一般化平面凸七邊形的研究情形。

貳、本文

在研析推導廣義的平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式之前，為了要完整且有條理地導證出應得的型態關係式，則必在下列撰文推理演繹的運算過程中，需應用或對照到下述已知的幾個數學應用性質；

一、數學應用性質—引理

引理 1.　平面四邊形餘弦定理 ：在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，如圖 3。

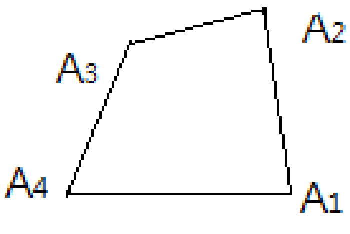

圖 3

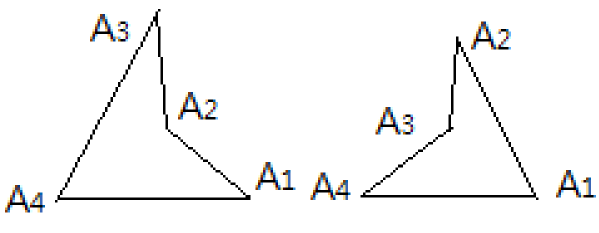

圖 4

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$， $\overline{A_2A_3}=V_2$， $\overline{A_3A_4}=V_3$， $\overline{A_4A_1}=V_4$，

則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

$$V_4^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) \qquad \text{(L-1)}$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：幾何作圖；連接圖 3.的兩個頂點 A_1 與 A_3 形成一對角線 A_3A_1。

(1) 見下圖 3A. 令 $\angle A_1A_3A_4 = m$，對角線長 $\overline{A_1A_3} = d$，對 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，可得三角形餘弦定理；$d^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos A_2$，又對 $\Delta A_1A_3A_4$ 言，可得餘弦公式為 $V_4^2 = d^2 + V_3^2 - 2V_3 d\cos m \Rightarrow V_4^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_3 d\cos m$ (1-1)

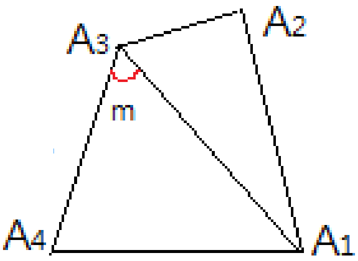

圖 3A

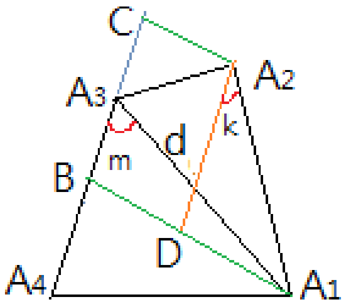

圖 3B

(2) 現在要證明方程式(1-1)的最末項中 $d\cos m$ 在圖形上的幾何意義；上圖 3B。

(i) 延長線段 A_3A_4，使成直線 A_4A_3C，通過頂點 A_2 作一直線 A_2D 平行直線 A_4A_3C。

(ii) 通過頂點 A_2 作一直線 A_2C 垂直於直線 A_4A_3C，使 C 點為垂足點。

(iii) 再通過頂點 A_1 作一直線 A_1B 垂直於直線 A_4A_3C，使 B 點、D 點為垂足點。

(iv) 由直角 ΔA_1A_3B 性質知 $d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_3B，同理 V_2 在直線 A_4A_3C 上的投影線段長為 A_3C，而線段長 A_3C 恰等於 $V_2\cos(\pi - A_3) = -V_2\cos A_3$。

(v) V_1 在直線 A_4A_3C 上的投影線段長為 $A_2D = CB$ 線段；因 A_2D 平行 CB，令 $\angle A_1A_2D = k$，則頂角 A_3 與 A_2 的關係為 $A_3 + (A_2 - \mathrm{k}) = \pi \Rightarrow A_3 + A_2 = \pi + \mathrm{k}$，而線段長 A_2D 恰等於 $V_1\cos k$，但由 $V_1\cos(A_2 + A_3) = V_1\cos(\pi + k) = -V_1\cos k$，得線段長 $A_2D = V_1\cos k = -V_1\cos(A_2 + A_3)$。

(vi) 因此，由 $A_3B + A_3C = CB = A_2D$，得 $d\cos m = V_2\cos A_3 - V_1\cos(A_2 + A_3)$。

(3) 最後將此 $d\cos m$ 的值代入方程式(1-1)，即得證出方程式(L-1)。

事實上，方程式(L-1)不僅適用於圖 3.凸四邊形，也適用於如圖 4.的凹四邊形；只

要仿效上述構圖要領即可完整證明出平面凹四邊形餘弦定理為方程式(L-1)。

引理 2. 平面五邊形餘弦定理：先參考下圖 5.的平面凹五邊形。

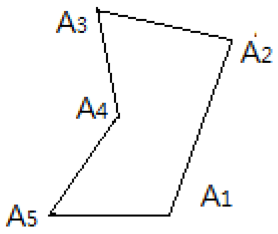

圖 5

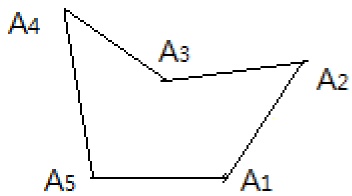

圖 6

任給一個平面凹五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，假設選取 A_4 頂角為優角，優角意指其角度是大於 π 但小於 2π，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，則此五邊形的面積型餘弦公式為

$$V_5^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3-2V_3V_4\cos A_4$$
$$+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)+2V_2V_4\cos(A_3+A_4)-2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4) \qquad \text{(L-2)}$$

證明：下圖 7 連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成對角線長 $\overline{A_1A_4}=d$，令 $\angle A_1A_4A_5=m$，

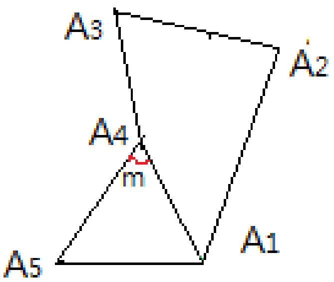

圖 7

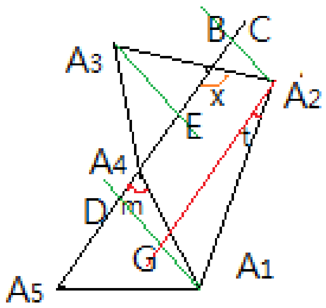

圖 8

(1) 對圖 7 中的部份四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，由引理 1.有平面四邊形餘弦公式為

$$d^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)$$

又對 $\Delta A_1A_4A_5$ 言，可得三角形餘弦公式為 $V_5^2=d^2+V_4^2-2V_4d\cos m \;\Rightarrow$

$$V_5^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3)$$
$$-2V_4 d\cos m \qquad (2\text{-}1)$$

(2) 仿效引理 1.的幾何作圖法，作出圖 8.，即延長線段 A_4A_5 使形成一直線 CA_4A_5，另作三綠色直線 A_3E、A_2B 與 A_1D 相互平行且皆與直線 CA_4A_5 相垂直。使得 B、D、E 三點都是垂足點。再通過頂點 A_2 作一直線 A_2G 平行直線 CA_4A_5，使 G 點為垂足點。

(3) 圖 8 中，由直角 ΔA_1A_4D 性質知 $d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_4D，同理 V_3 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 A_4E，恰等於 $V_3\cos(A_4-\pi) = -V_3\cos A_4$。

(4) V_2 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 BE，恰等於 $V_2\cos[\pi - A_3 - (A_4 - \pi)] = V_2\cos(A_3 + A_4)$。

(5) V_1 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 $BD = A_2G$ 線段長，因 BD 平行 A_2G，令 $\angle A_1A_2G = t$，由圖 8.中知 x= A_3+（$A_4-\pi$) 且 x+（$A_2 - t) = \pi$，則 $A_2 + A_3 + A_4 = 2\pi + t \Rightarrow V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4) = V_1\cos(2\pi + t) = V_1\cos t = A_2G = BD$。

(6) 在直線 CA_4A_5 上，線段長 BD =線段長 $A_4D + A_4E + BE$，故得 $A_4D = BD - A_4E - BE$ $\Rightarrow d\cos m = V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4) - V_2\cos(A_3 + A_4) + V_3\cos A_4$。

(7) 將此 $d\cos m$ 關係式直接代入方程式(2-1)中，即得證出方程式(L-2)。

事實上，方程式(L-2)不僅適用於凹五邊形，也適用於凸五邊形；只要仿效上述引理 1.與引理 2.構圖要領即可完整證明出平面凸五邊形餘弦定理為方程式(L-2)。若換成選取頂角 A_3 為優角如圖 6.，則同樣可推證得方程式(L-2)。

引理 3. 平面六邊形餘弦定理：在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令線段長 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_5} = V_4$，$\overline{A_5A_6} = V_5$，$\overline{A_6A_1} = V_6$，則此六邊形的面積型餘弦公式為：

$$V_6^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4$$
$$-2V_4V_5\cos A_5 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3 + A_4)$$
$$+2V_3V_5\cos(A_4 + A_5) - 2V_1V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$-2V_2V_5\cos(A_3 + A_4 + A_5) + 2V_1V_5\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \qquad (\text{L-3})$$

證明：方程式(L-3)也適用於凹六邊形，以頂角 A_3 為優角的凹六邊形來推證之；參見下圖 9. 連接兩頂點 A_1 與 A_5 形成一對角線，使對角線長度 $\overline{A_1A_5} = d$，

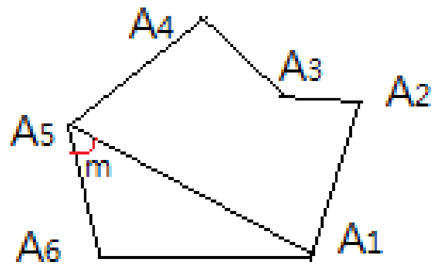

圖 9

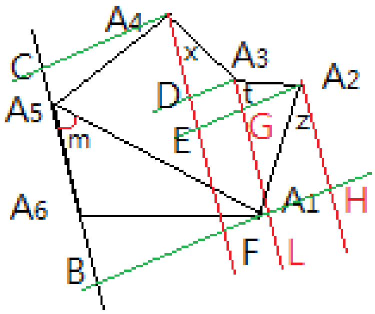

圖 10

(1) 令 $\angle A_1A_5A_6 = m$ ，對圖 9.中的部份凹五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 言，有餘弦公式為

$$d^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4$$
$$+2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3 + A_4) - 2V_1V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4)$$

又對 $\Delta A_1A_5A_6$ 言，可得三角形餘弦公式為 $V_6^2 = d^2 + V_5^2 - 2V_5 d\cos m \Rightarrow$

$$V_6^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4$$
$$-2V_5 d\cos m + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3 + A_4)$$
$$-2V_1V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4) \tag{3-1}$$

(2) 仿效引理 1.與 2.的幾何作圖法，作出圖 10.，其中四直線 A_2H 、 A_3GL 、 A_4F 與 CA_5A_6B 相互平行，另四綠色直線 A_4C 、 A_3D 、 A_2GE 與 HA_1FB 相互平行且皆與直線 A_2H 、 A_3GL 、 A_4F 與 CA_5A_6B 相垂直。而 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 七點都是垂足點。故四邊形 A_4CBF 、 A_3DEG 、 A_2EFH 皆為長方形。

(3) 對直角 ΔA_1A_5B 言，$d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_5B，同理 V_4 在直線 CA_5A_6B 上的投影線段長為 A_5C，恰等於 $V_4\cos(\pi - A_5) = -V_4\cos A_5 = A_5C$ 。

(4) 由 A_4F 平行 CA_5A_6B，令 $\angle A_3A_4D = x$，得 $A_4 + A_5 = \pi + x$，而 V_3 在直線 A_4F 上的投影線段長為 A_4D，恰等於 $V_3\cos x = -V_3\cos(A_4 + A_5) = A_4D$ 。

(5) 由 A_4F 平行 A_3GL ，令 $\angle A_2A_3G = t$ ，得 $x + A_3 - t = \pi$ ，故 $A_3 + A_4 + A_5 = 2\pi + t$ ，而 V_2 在直線 A_3GL 上的投影線段長為 $A_3G = DE$ ，恰等於 $V_2\cos t = V_2\cos(A_3 + A_4 + A_5) = A_3G = DE$ 。

(6) 由 A_2H 平行 A_3GL ，令 $\angle A_1A_2H = z$ ，得 $z + A_2 + t = \pi$ ，故 $z = 3\pi - (A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$ ，而邊長 V_1 在直線 A_2H 上的投影線段長為 A_2H 。再由圖 10 知 $A_2H = EF = V_1\cos z = -V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$ 。

(7) 因四邊形 A_4CBF 為長方形，得 $A_5C + A_5B = CB = A_4F = A_4D + DE + EF$ ，故 $A_5B = d\cos m = A_4D + DE + EF - A_5C = -V_3\cos(A_4 + A_5) + V_2\cos(A_3 + A_4 + A_5) - V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) + V_4\cos A_5$ 。至此找到 $d\cos m$ 的完整值。

(8) 將此 $d\cos m$ 的完整值直接代入方程式(3-1)中，即得證出方程式(L-3)。方程式(L-3)不僅適用於凹六邊形，也適用於凸六邊形；只要仿效上述引理 1.與引理 2.及引理 3.構圖要領即可完整證明出平面凸六邊形餘弦定理為方程式(L-3) 。凹六邊形有各樣不同型態；如另有頂角 A_2 是單一優角情形，頂角 A_4 是單一優角情形， A_2 與 A_4 同為優角情形(其餘頂角為劣角)，…等。只需仿效上述作圖要領，這所有型態的凹六邊形其具有的餘弦定裡皆為方程式(L-3) 。

引理 4. 平面七邊形餘弦定理：在平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令其各邊線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_1}=V_7$ ，見下圖 11.，則此七邊形的面積型餘弦公式為：

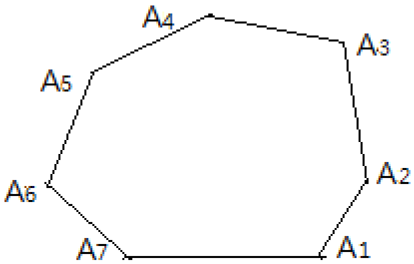

圖 11

$$\begin{aligned}V_7^2 = {} & V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3-2V_3V_4\cos A_4\\ & -2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)+2V_2V_4\cos(A_3+A_4)\\ & +2V_3V_5\cos(A_4+A_5)+2V_4V_6\cos(A_5+A_6)-2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)\\ & -2V_2V_5\cos(A_3+A_4+A_5)-2V_3V_6\cos(A_4+A_5+A_6)\\ & +2V_1V_5\cos(A_2+A_3+A_4+A_5)+2V_2V_6\cos(A_3+A_4+A_5+A_6)\\ & -2V_1V_6\cos(A_2+A_3+A_4+A_5+A_6) \qquad \text{(L-4)}\end{aligned}$$

證明：略。方程式(L-4)不僅適用於凸七邊形，也適用於凹七邊形；只要仿效上述引理 3.構圖要領即可完整證明出所有平面七邊形餘弦定理為方程式(L-4)。

引理 5. 平面八邊形餘弦定理：在平面上給定一個凸八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，令線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_8}=V_7$ ，$\overline{A_8A_1}=V_8$，見下圖 12a.，則此八邊形的面積型餘弦公式為：

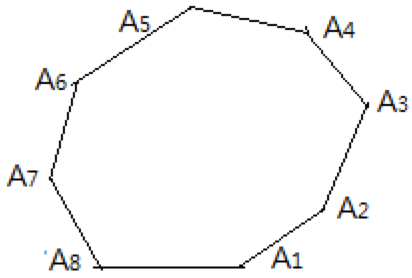

圖 12a

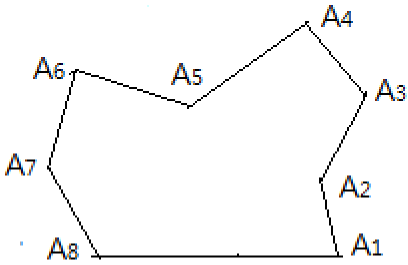

圖 12b

$$
\begin{aligned}
V_8^2 = & V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2+V_7^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3-2V_3V_4\cos A_4 \\
& -2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6-2V_6V_7\cos A_7+2V_1V_3\cos(A_2+A_3) \\
& +2V_2V_4\cos(A_3+A_4)+2V_3V_5\cos(A_4+A_5)+2V_4V_6\cos(A_5+A_6) \\
& +2V_5V_7\cos(A_6+A_7)-2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)-2V_2V_5\cos(A_3+A_4+A_5) \\
& -2V_3V_6\cos(A_4+A_5+A_6)-2V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7)+2V_1V_5\cos(A_2+A_3+A_4+A_5) \\
& +2V_2V_6\cos(A_3+A_4+A_5+A_6)+2V_3V_7\cos(A_4+A_5+A_6+A_7) \\
& -2V_1V_6\cos(A_2+A_3+A_4+A_5+A_6)-2V_2V_7\cos(A_3+A_4+A_5+A_6+A_7) \\
& +2V_1V_7\cos(A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7) \qquad \text{(L-5)}
\end{aligned}
$$

證明：略。方程式(L-5)不僅適用於凸八邊形，也適用於圖 12b.凹八邊形；只要仿效引理 3.構圖要領即可完整證明出所有平面八邊形餘弦定理為方程式(L-5)。

二、平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_1}=V_7$，見下圖 13，在圖形中央選定兩相鄰交叉對角線長 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_2A_5}=d_{25}$ 的組合，則此平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式為下列型 (7a)式；

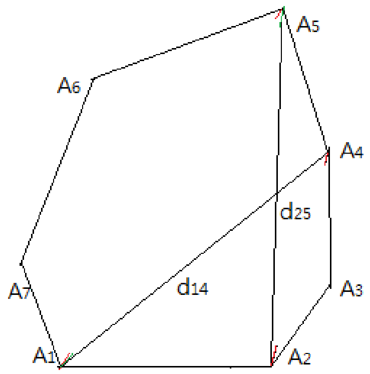

圖 13

$$\begin{aligned}
d_{14}{}^2 d_{25}{}^2 = \ & V_1{}^2V_4{}^2 + [V_2{}^2V_5{}^2 + V_3{}^2V_5{}^2 - 2V_2V_3V_5{}^2\cos A_3] \\
& + [V_2{}^2V_6{}^2 + V_3{}^2V_6{}^2 - 2V_2V_3V_6{}^2\cos A_3] + [V_2{}^2V_7{}^2 + V_3{}^2V_7{}^2 - 2V_2V_3V_7{}^2\cos A_3] \\
& - 2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) + 2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2 + A_5 + A_6) \\
& - 2V_1V_2V_4V_7\cos(A_2 + A_5 + A_6 + A_7) + 2V_1V_3V_4V_5\cos(A_2 + A_3 + A_5) \\
& - 2V_1V_3V_4V_6\cos(A_2 + A_3 + A_5 + A_6) - 2V_1V_3V_4V_7\cos(A_1 + A_4) \\
& + [-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_2{}^2V_5V_7\cos(A_6 + A_7) - 2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7] \\
& + [-2V_3{}^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_3{}^2V_5V_7\cos(A_6 + A_7) - 2V_3{}^2V_6V_7\cos A_7] \\
& + 4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6 - 4V_2V_3V_5V_7\cos A_3\cos(A_6 + A_7) \\
& + 4V_2V_3V_6V_7\cos A_3\cos A_7 \qquad (7a)
\end{aligned}$$

證明：連接兩頂點 A_1 與 A_5 形成對角線長 $\overline{A_1A_5} = d_{15}$，再連接另兩頂點 A_2 與 A_4 形成對角線長 $\overline{A_2A_4} = d_{24}$，於此建立四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，如下圖 14.，透過幾何作圖法在此四邊形邊長 A_1A_5 內部作一個三角形 ΔA_1A_5T，使得 $\Delta A_1A_5T \approx \Delta A_2A_5A_4$ (互為相似形) 且 $\angle A_5TA_1 = \angle A_5A_4A_2$。並繼續連接 T 與 A_4 兩點，使形成線段 TA_4，得一新三角形構圖的 ΔTA_1A_4，現在要找出線段長 TA_1 與 TA_4 所表示的內涵意義；

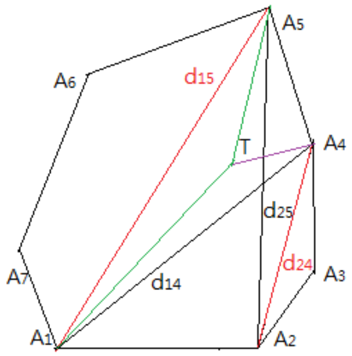

圖 14

(1) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係，得 $d_{15} : d_{25} = \overline{A_1T} : d_{24} = \overline{A_5T} : V_4$

$\Rightarrow$ 可得 $d_{15} : \overline{A_5T} = d_{25} : V_4$，再由 $\angle A_1A_5A_2 = \angle TA_5A_4$ 及兩對應邊長成正比例與其夾角相等的相似形性質，可得知另兩相似形關係 $\Delta A_1A_5A_2 \approx \Delta TA_5A_4$，因此可得 $\angle A_5A_1A_2 = \angle A_5TA_4$，且有另一組正比例關係為 $d_{15} : \overline{A_5T} = d_{25} : V_4 = V_1 : \overline{A_4T}$。

(2) 在上述(1).的兩組正比例關係式中可求得輔助三角形 ΔTA_1A_4 的兩個邊長；

由 $d_{15}:d_{25}=\overline{A_1T}:d_{24}=\overline{A_5T}:V_4 \;\Rightarrow\; \overline{A_1T}=(d_{15}d_{24})/d_{25}$ (8)

及 $d_{15}:\overline{A_5T}=d_{25}:V_4=V_1:\overline{A_4T} \;\Rightarrow\; \overline{A_4T}=(V_1V_4)/d_{25}$ (9)

，而另外在頂點 T 處四周圍的角度關係可知；$\angle A_1TA_4=2\pi-\angle A_5TA_4-\angle A_1TA_5$

$=2\pi-\angle A_5A_1A_2-\angle A_5A_4A_2=\angle A_1A_2A_4+\angle A_1A_5A_4$

$\Rightarrow\quad \angle A_1TA_4=\angle A_1A_2A_4+\angle A_1A_5A_4$ (10)

，此處對四邊形 $A_1A_2A_4A_5$ 言，其四個頂角總和為 2π ，

(3) 繼續要使圖 14.中的 $\Delta A_2A_3A_4$ 以相似形結構黏附在 ΔTA_1A_4 的邊長 TA_1 上；此需藉由下述幾合作圖法來完成此首要目標三角形輔助相似形的製作；在圖 14 的三角形邊長 TA_1 外側作一個三角形 ΔBA_1T ，使 $\Delta BA_1T\approx\Delta A_3A_4A_2$ (互為相似形)，且 $\angle TBA_1=\angle A_2A_3A_4$ ，如下圖 15，三角形中令 角度 r= $\angle A_3A_2A_4=\angle BTA_1$ ，且角度 t= $\angle A_3A_4A_2=\angle BA_1T$ ，則得出

$\overline{BT}:V_2=\overline{A_1T}:d_{24}=\overline{A_1B}:V_3 \;\Rightarrow\; \overline{BT}=(V_2\cdot\overline{A_1T})/d_{24}=(V_2\cdot d_{15})/d_{25}$ (11)

和 $\overline{A_1B}=(\overline{A_1T}\cdot V_3)/d_{24}=(V_3\cdot d_{15})/d_{25}$ (12)

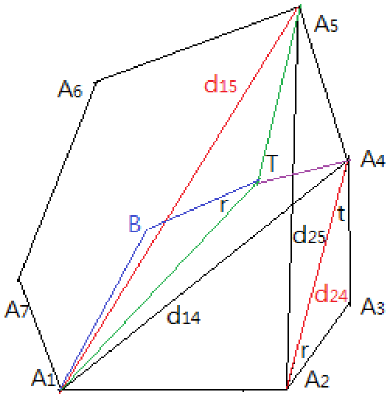

圖 15

(4) 接下來要將七邊形(圖 15.)中另外部份四邊形 $A_1A_5A_6A_7$ 以相似形結構分別黏附在 ΔTBA_1 的兩邊長 TB 與 BA_1 上；此仍需藉由下列幾合作圖法來完成輔助相似形的構圖製作；令角度 z= $\angle A_6A_5A_1$ ，角度 w= $\angle A_7A_1A_5$ ，如下圖 16。

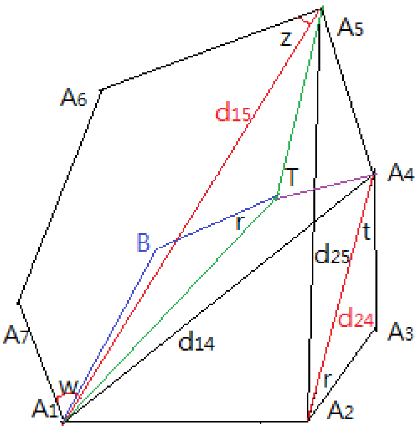

圖 16

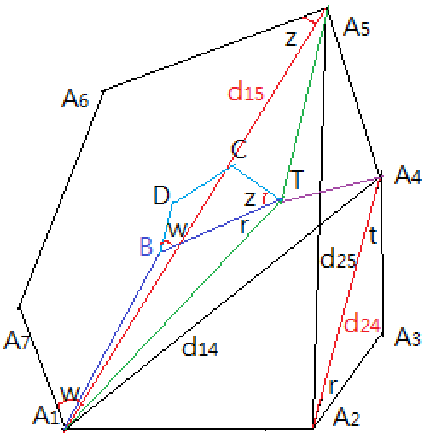

圖 17

(i)　.在邊長 TB 的上方向外側作四邊形 $A_1A_5A_6A_7$ 的相似四邊形 $BTCD$，如上圖 17，由相似四邊形對應邊長成正比例性質得 $\overline{TC}:V_5=\overline{CD}:V_6=\overline{DB}:V_7=\overline{BT}:d_{15}$ 且各對應角必相等；頂角 C=頂角 A_6，頂角 D=頂角 A_7，角度 z 與 w 標註於圖形內。則

$$\overline{TC}=(V_5\cdot\overline{BT})/d_{15}=(V_2\cdot V_5)/d_{25} \tag{13}$$

$$\overline{CD}=(V_6\cdot\overline{BT})/d_{15}=(V_2\cdot V_6)/d_{25} \tag{14}$$

$$\overline{DB}=(V_7\cdot\overline{BT})/d_{15}=(V_2\cdot V_7)/d_{25} \tag{15}$$

(ii)　同理，在圖 17 裡自線段 BA_1 左外側再作出四邊形 $A_1A_5A_6A_7$ 對應的第二個相似四邊形 A_1BEF，如下圖 18.，再由兩相似四邊形對應邊長成正比例性質得；

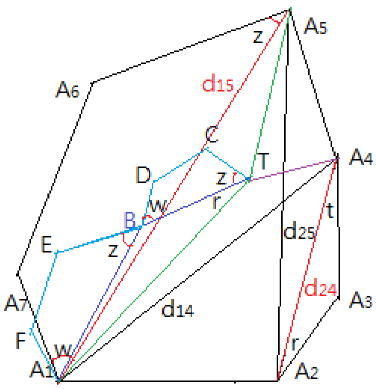

圖 18

$\overline{BE}:V_5=\overline{EF}:V_6=\overline{FA_1}:V_7=\overline{A_1B}:d_{15}$ 且各對應角必相等；頂角 E=頂角 A_6，頂角 F=頂角 A_7，角度 z 標註於圖形內。則此四邊形相似形的各邊長內涵；

$$\overline{BE}=(V_5\cdot\overline{A_1B})/d_{15}=(V_3\cdot V_5)/d_{25} \tag{16}$$

$$\overline{EF}=(V_6\cdot\overline{A_1B})/d_{15}=(V_3\cdot V_6)/d_{25} \tag{17}$$

$$\overline{FA_1}=(V_7\cdot\overline{A_1B})/d_{15}=(V_3\cdot V_7)/d_{25} \tag{18}$$

到這裡，兩相似四邊形外圍的六個邊長內涵名目都一一全數有序的被尋獲了。它們的長度數值明顯地分別由原凸七邊形的各邊長以比例式關係構成！

(5) 經由以上幾何作圖推證，已成功地將原凸七邊形的七個邊長以比例式關係縮減成圖 18 中的平面凹八邊形 $A_1A_4TCDBEF$ 裡七個邊長的新構圖！這新構的凹八邊形有兩個頂角 $\angle A_4TC$ 與 $\angle DBE$ 同為優角，如下圖 19.，這兩優角的值為；

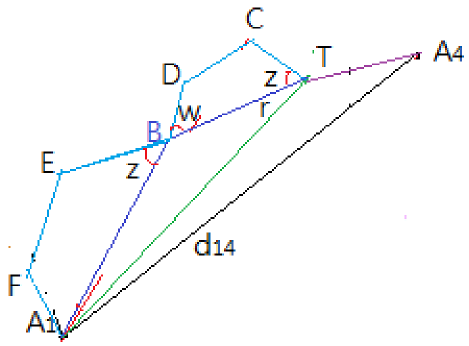

圖 19

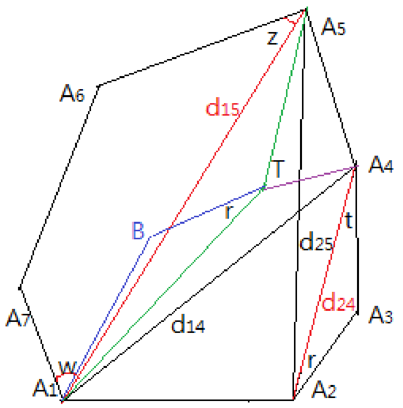

圖 16

優角 $\angle A_4TC=\angle A_4TA_1+\angle A_1TB+\angle CTB=\angle A_4TA_1+$ r + z ，而(10)式；$\angle A_1TA_4$ = $\angle A_1A_2A_4+\angle A_1A_5A_4$ ，再參考圖 16.，得優角 $\angle A_4TC=\angle A_1A_2A_4+\angle A_1A_5A_4+$ r + z= A_2(頂角)+ A_5(頂角) 。另一優角 $\angle DBE$ = w + $\angle TBA_1$+ z = $A_3+2\pi-A_6-A_7$。

(6) 另外由四邊形相似形性質知；相似形的各對應角必完全相等，所以得下列關係；頂角 C=頂角 A_6，頂角 D=頂角 A_7，頂角 E=頂角 A_6，頂角 F=頂角 A_7。

(7) 參考新構圖 19.是有兩優角的凹八邊形；新構的平面凹八邊形 $A_1A_4TCDBEF$ 裡，各邊長與所需的各頂角都推求到了，應用引理 5.平面凹八邊形的餘弦定理方程式(L-5)，可完整敘述出此凹八邊形 $A_1A_4TCDBEF$ 所屬的餘弦定理公式，得

$$\overline{A_1A_4}^2=\overline{TA_4}^2+\overline{TC}^2+\overline{DC}^2+\overline{DB}^2+\overline{BE}^2+\overline{EF}^2+\overline{FA_1}^2-2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{TC}\cos(\angle A_4TC)$$

$$-2\,\overline{TC}\cdot\overline{CD}\cos C-2\,\overline{CD}\cdot\overline{DB}\cos D-2\,\overline{DB}\cdot\overline{BE}\cos(\angle DBE)$$

$$-2\,\overline{BE}\cdot\overline{EF}\cos E-2\,\overline{EF}\cdot\overline{FA_1}\cos F+2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{CD}\cos(\angle A_4TC+C)$$
$$+2\,\overline{TC}\cdot\overline{DB}\cos(C+D)+2\,\overline{CD}\cdot\overline{BE}\cos(D+\angle DBE)+2\,\overline{DB}\cdot\overline{EF}\cos(\angle DBE+E)$$
$$+2\,\overline{BE}\cdot\overline{FA_1}\cos(E+F)-2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{DB}\cos(\angle A_4TC+C+D)$$
$$-2\,\overline{TC}\cdot\overline{BE}\cos(C+D+\angle DBE)-2\,\overline{CD}\cdot\overline{EF}\cos(D+\angle DBE+E)$$
$$-2\,\overline{DB}\cdot\overline{FA_1}\cos(\angle DBE+E+F)+2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{BE}\cos(\angle A_4TC+C+D+\angle DBE)$$
$$+2\,\overline{TC}\cdot\overline{EF}\cos(C+D+\angle DBE+E)+2\,\overline{CD}\cdot\overline{FA_1}\cos(D+\angle DBE+E+F)$$
$$-2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{EF}\cos(\angle A_4TC+C+D+\angle DBE+E)$$
$$-2\,\overline{TC}\cdot\overline{FA_1}\cos(C+D+\angle DBE+E+F)$$
$$+2\,\overline{TA_4}\cdot\overline{FA_1}\cos(\angle A_4TC+C+D+\angle DBE+E+F) \qquad (19)$$

方程式 (19)式共計有 28 項，今將前述方程式 (9)式，(13)式，(14)式，(15)式，(16)式，(17)式，(18)式以及各對應頂角角度一起同步代入方程式 (19)式，得；

$$d_{14}{}^2=[(V_1V_4)/d_{25}]^2+[(V_5V_2)/d_{25}]^2+[(V_6V_2)/d_{25}]^2+[(V_7V_2)/d_{25}]^2+[(V_5V_3)/d_{25}]^2$$
$$+[(V_6V_3)/d_{25}]^2+[(V_7V_3)/d_{25}]^2-2[(V_1V_4)/d_{25}][(V_5V_2)/d_{25}]\cos(A_2+A_5)$$
$$-2[(V_5V_2)/d_{25}][(V_6V_2)/d_{25}]\cos A_6-2[(V_6V_2)/d_{25}][(V_7V_2)/d_{25}]\cos A_7$$
$$-2[(V_7V_2)/d_{25}][(V_5V_3)/d_{25}]\cos(A_3+2\pi-A_6-A_7)$$
$$-2[(V_5V_3)/d_{25}][(V_6V_3)/d_{25}]\cos A_6-2[(V_6V_3)/d_{25}][(V_7V_3)/d_{25}]\cos A_7$$
$$+2[(V_1V_2V_4V_6)/d_{25}{}^2]\cos(A_2+A_5+A_6)+2[(V_5V_7V_2{}^2)/d_{25}{}^2]\cos(A_6+A_7)$$
$$+2[(V_2V_3V_5V_6)/d_{25}{}^2]\cos(A_3+2\pi-A_6)+2[(V_2V_3V_6V_7)/d_{25}{}^2]\cos(A_3+2\pi-A_7)$$
$$+2[(V_5V_7V_3{}^2)/d_{25}{}^2]\cos(A_6+A_7)-2[(V_1V_2V_4V_7)/d_{25}{}^2]\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)$$
$$-2[(V_2V_3V_5{}^2)/d_{25}{}^2]\cos A_3-2[(V_2V_3V_6{}^2)/d_{25}{}^2]\cos A_3-2[(V_2V_3V_7{}^2)/d_{25}{}^2]\cos A_3$$
$$+2[(V_1V_3V_4V_5)/d_{25}{}^2]\cos(A_2+A_3+A_5)+2[(V_2V_3V_5V_6)/d_{25}{}^2]\cos(A_3+A_6)$$
$$+2[(V_2V_3V_6V_7)/d_{25}{}^2]\cos(A_3+A_7)-2[(V_1V_3V_4V_6)/d_{25}{}^2]\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)$$
$$-2[(V_2V_3V_5V_7)/d_{25}{}^2]\cos(A_3+A_6+A_7)$$
$$+2[(V_1V_3V_4V_7)/d_{25}{}^2]\cos(A_2+A_3+A_5+A_6+A_7) \qquad \Rightarrow$$

將上式運算展開後，在等號兩側同乘以 $d_{25}{}^2$ ，再化簡，整裡，最後得下式；

$$d_{14}{}^2d_{25}{}^2=(V_1V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_3V_5)^2+(V_3V_6)^2+(V_3V_7)^2$$
$$-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7$$
$$-2V_2V_3V_5V_7\cos(A_3-A_6-A_7)-2V_3{}^2V_5V_6\cos A_6-2V_3{}^2V_6V_7\cos A_7$$

$$+2V_1V_2V_4V_6\cos\left(A_2+A_5+A_6\right)+2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)+2V_2V_3V_5V_6\cos(A_3-A_6)$$
$$+2V_2V_3V_6V_7\cos(A_3-A_7)+2V_3{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)$$
$$-2V_1V_2V_4V_7\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)-2V_2V_3V_5{}^2\cos A_3-2V_2V_3V_6{}^2\cos A_3$$
$$-2V_2V_3V_7{}^2\cos A_3+2V_1V_3V_4V_5\cos\left(A_2+A_3+A_5\right)+2V_2V_3V_5V_6\cos(A_3+A_6)$$
$$+2V_2V_3V_6V_7\cos(A_3+A_7)-2V_1V_3V_4V_6\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)$$
$$-2V_2V_3V_5V_7\cos\left(A_3+A_6+A_7\right)+2V_1V_3V_4V_7\cos(A_2+A_3+A_5+A_6+A_7) \qquad (20)$$

這方程式 (20)式裡有 3 組兩兩係數相同的項，它們就是 $V_2V_3V_5V_6$、$V_2V_3V_5V_7$、$V_2V_3V_6V_7$，將其全部分別展開運算，組合化簡，最後整理成下列方程式；

$$d_{14}{}^2d_{25}{}^2=(V_1V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2+(V_3V_5)^2+(V_3V_6)^2+(V_3V_7)^2$$
$$-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6-2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7$$
$$+2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)-2V_3{}^2V_5V_6\cos A_6-2V_3{}^2V_6V_7\cos A_7$$
$$+2V_3{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)+2V_1V_2V_4V_6\cos\left(A_2+A_5+A_6\right)$$
$$-2V_1V_2V_4V_7\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)-2V_2V_3V_5{}^2\cos A_3-2V_2V_3V_6{}^2\cos A_3$$
$$-2V_2V_3V_7{}^2\cos A_3+2V_1V_3V_4V_5\cos\left(A_2+A_3+A_5\right)-2V_1V_3V_4V_6\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)$$
$$-2V_1V_3V_4V_7\cos(A_1+A_4)+4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6$$
$$+4V_2V_3V_6V_7\cos A_3\cos A_7-4V_2V_3V_5V_7\cos A_3\cos(A_6+A_7) \qquad (21)$$

方程式 (21)式即為得證出的平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式的面積平方型量綱公式。此方程式真的由應用平面凹八邊形的餘弦定理公式推證而來。今比較(21)式與 (7a)式和 (7)式三者完全相等，也確實嚴謹的證明出此先前在前言裡所作的猜想、預測是完全正確真實的。

三、檢驗

自圓內接七邊形的特例圖形思考起，經演繹推導出方程式(7)；而 (7)式的結果又誘導出美妙的猜測與聯想，藉著應用平面多邊形餘弦定理以及適切的幾何輔助作圖法，終能將猜想與期望微妙整合而推證得方程式(21)式來對應(7)式。

方程式(21)的結構型態中每一項式內涵裡表徵的邊長與頂角排列型式都呈現出秩序、規律、條理。縱然如此，仍須透過下列詳盡的檢驗以強化其正確性。

1. 若令 $V_7=0$，使頂點 A_7 趨近於頂點 A_1，頂角 $A_7=0$，則平面凸七邊形退化成平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，如圖 20.，方程式(21)式隨即縮減退化成下式；

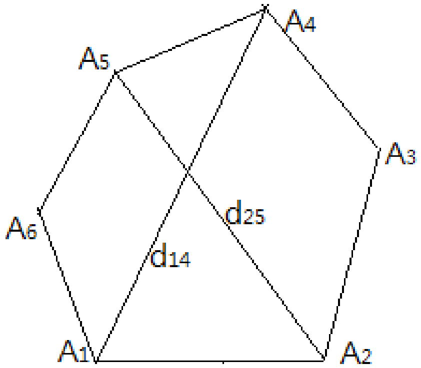

圖 20

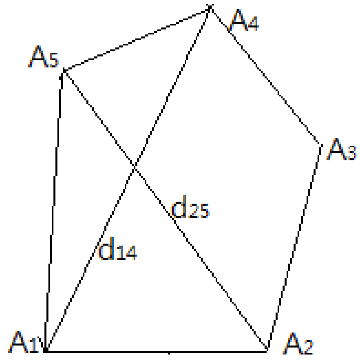

圖 21.

$$(d_{14}d_{25})^2=(V_1V_4)^2+[(V_2V_5)^2+(V_3V_5)^2-2V_2V_3V_5^{\ 2}\cos A_3]+[(V_2V_6)^2+(V_3V_6)^2-$$

$$2V_2V_3V_6^{\ 2}\cos A_3]-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)+2V_3V_4V_5V_1\cos(A_4+A_6+A_1)$$

$$+2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_5+A_6)-2V_6V_1V_3V_4\cos(A_1+A_4)-2V_2^{\ 2}V_5V_6\cos A_6$$

$$-2V_3^2V_5V_6\cos A_6+4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6 \qquad (22)$$

方程式(22)即為平面凸六邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。

2. 若圖 20.令頂點 A_6 趨近至 A_1 ，使 $V_6=0$ ，則六邊形退化成五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，見圖 21. 而使得方程式(22)縮減成下式；

$$(d_{14}d_{25})^2=(V_1V_4)^2+[(V_2V_5)^2+(V_3V_5)^2-2V_2V_3V_5^{\ 2}\cos A_3]$$
$$-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)+2V_3V_4V_5V_1\cos(A_2+A_3+A_5) \quad \Rightarrow$$

$$(d_{14}d_{25})^2=(V_1V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_3V_5)^2-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)$$

$$-2V_3V_4V_5V_1\cos(A_1+A_4)-2V_2V_3V_5^{\ 2}\cos A_3 \qquad (23)$$

此方程式(23)式就是凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式！

3. 在圖 20.六邊形方程式(22)中，若令頂點 A_6 趨近至 A_1 ，使 $V_6=0$ ，同時再令頂點 A_3 趨近至 A_4，使 $V_3=0$，則六邊形退化成四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，見下圖 22. 令 $\overline{A_2A_4}=V_2$，$\overline{A_4A_5}=V_4$ ，$\overline{A_5A_1}=V_5$ ，而使得方程式(22)縮減成下式；

$$(d_{14}d_{25})^2=(V_1V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5) \qquad (24)$$

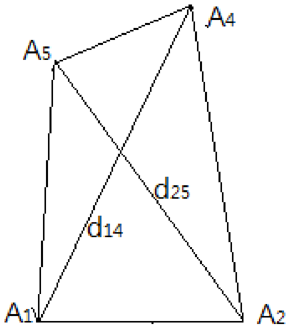

圖 22

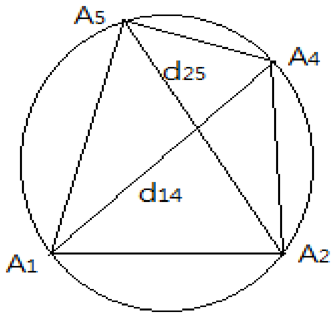

圖 23

此方程式(24)式就是凸四邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式！

4. 在圖 20.六邊形方程式(22)中，若讓此六邊形內接於一圓，並令頂點 A_6 趨近至 A_1，使 $V_6 = 0$，同時再令頂點 A_3 趨近至 A_4，使 $V_3 = 0$，則此圓內接六邊形退化成圖 23 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，且因 $A_2 + A_5 = \pi$，而使得方程式(22)

退化縮減成下式；
$$d_{14}d_{25} = V_1V_4 + V_2V_5 \tag{25}$$
此方程式(25)即為名傳遐邇的圓內接四邊形托勒密公式！

參、結論

1. 初始以圓內接多邊形特例圖形所推論出的面積形量綱方程式(4)為雛型，再以圖形配合三角函數運算而導證出另一面積平方型量綱公式(7)，並根據公式(7)與多邊形餘弦定理的奇妙關聯繼續推廣至一般凸七邊形相對應的普遍化方程式(21)式，此思路情況的分析立論明顯地在前言與本文的敘述內容中屢見一斑。所以先自圓內接圖形研究探秘起，當能更容易尋找到複雜的一般形圖形對應方程式。
2. “圖形內中央兩相鄰交叉對角線”與“圖形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線”是兩類相異的主題。就輔助幾何作圖言；前者在多邊形內所作出的新構凹多邊形必較原多邊形多出一個邊，而後者所作出的新構凹多邊形必較原多邊形減少一個邊、非常有趣！這需要實際親自演練始能深刻體會，也必有牢固心得。
3. 整篇論述中提出一套實際且亮眼的輔助線幾何作圖法；應用繪製幾何圖形法在理論推證過程中佔著一席重要且決定性的地位，藉著其直覺作為可以巧妙地證明出未知修正量與已知量的相關結合等式關係，並因此而具體地知悉這些未知量在圖形結構上的實質內涵意義，它的應用真是非常的有價值且高效率。
4. 方程式(21)式、(7)式是個廣義型公式，它統一涵蓋了平面凸七邊形、圓內接七邊形、

平面凸六邊形、圓內接六邊形、平面凸五邊形、圓內接五邊形、平面凸四邊形及托勒密定理等相對應的方程式。而所有這些方程式的型態內涵在每一項的邊長與角度組合上都呈現有秩序地規律性分佈！

5. 由證明檢驗的成果，全文提供了一套標準程序作業模式來擴展到六、七、八、九、…等所有多邊形其“中央”與“鄰近周邊”的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式之求解情形，都能以仿效本文之推證演繹處理流程來實現！自平面凸五邊形起至凸六邊形，作者先直接以幾何作圖法在圖形內依角度組合結構一一作出各邊長對應的適切輔助線，這些輔助直線段恰形成兩組相互垂直的平行線段，再由這些輔助直線段所結合成的長方形構圖中找到正確的各邊長項組合關係式，因而證明出兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。

   接著從證明出的凸五邊形、凸六邊形方程式的型態結構內涵中，發現其公式形式恰符合多邊形餘弦定理公式；因此興起了詳細檢視這些餘弦公式裡各個項式所對應的新構多邊形各邊長相關位置關係，始理解到先要自兩相鄰交叉對角線所屬的四邊形作起，再逐次先作出一個新三角形，再由此三角形的兩個新邊長外側分別作出所需要的對應相似多邊形，終而形成一滿足所有條件的新構凹多邊形。本文凸七邊形的完成即來自此精緻巧妙構想。

根據上述論點，平面凸八邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式及平面凸八邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式、凸九邊形、凸十邊形、…等等全系列 n 邊形的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式均可由上述兩作圖法證明出來。但因八邊形以後所證得的公式其項式眾多，此處不在贅述。讀者可仿效上述兩相異方法嚐試證明出凸八邊形公式。

參考文獻

李輝濱　平面凸五邊形內兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 407 期** 第 24 頁，2018 年 4 月出版發行。

李輝濱　平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 410 期** 第 10 頁，2018 年 7 月出版發行。

李輝濱　平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 413 期**，2018 年 10 月出版發行。

蔡聰明　**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源　**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義　**基礎幾何學**，2011，五南圖書出版公司。

項武義　**基礎分析學**，2012，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : A treatise on plane and Advanced trigonometry, *Dover* , 1957 .

Z.A. Melzek : Invitation to geometry, *John Wiley and Sons* , 1983 .