中學生通訊解題第 111-113 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11101

將所有滿足『任意相鄰兩位數碼所組成的數均是非零的完全平方數』的正整數從大到小排列，並記此數列為 M ，其第 k 個數為 b_k 。試求 b_2-b_4 之值。

簡答：6515

詳解：

一位數中為完全平方數有1,4,9，兩位數中為完全平方數有16,25,36,49,64,81。

對 M 中每個數，考慮其最左邊的兩個數。

(1) 最左邊兩位數為 16 的數為 1649 、164、16。

(2) 最左邊兩位數為 25 的數為 25 。

(3) 最左邊兩位數為 36 的數為 3649 、364、36。

(4) 最左邊兩位數為 49 的數為 49 。

(5) 最左邊兩位數為 64 的數為 649 、64。

(6) 最左邊兩位數為 81 的數為 81649 、8164、816、81。

將上述各數從大到小排序後為 81649, 8164, 3649, 1649, 816, 649, 364, 164, 81,64, 49, 36, 25, 16, 知 $b_2=8164$, $b_4=1649$ ，故 $b_2-b_4=6515$ 。

問題編號
11102

已知 $f(x)=12x-32+24\sqrt{9-3x}, x\le 3$ ，求 $f(x)$ 的最大值。

簡答： 40

詳解：

令 $\sqrt{9-3x}=t$ ，則

$$\begin{aligned} f(x)&=12x-32+24\sqrt{9-3x}\\ &=-4(9-3x)+4+24\sqrt{9-3x}\\ &=-4t^2+24t+4=-4(t^2-6t)+4\\ &=-4(t-3)^2+40\le 40 \end{aligned}$$

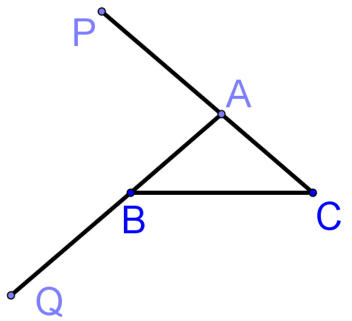
當 $t=3$ 時，即 $x=0$ 時取得等號， 故 $f(x)$ 的最大值為 40。

【解題評析】

此題為簡易的變數變換及基本的配方問題。少數同學用代值的方式看出遞增、遞減的區間，非常不嚴謹！少部分同學配方配錯了，寄過來之前請記得驗算。有些同學得 6 分是因為沒說明等號會成立。

問題編號
11103

如圖，在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$。任意延長 $\overline{CA}$ 到 P 點，再延長 $\overline{AB}$ 到 Q 點，使得 $\overline{AP}=\overline{BQ}$，求證：$\Delta ABC$ 的外心 O 與 A,P,Q 四點共圓。



詳解：

[方法 1]

連接 $\overline{OA},\overline{OC},\overline{OP},\overline{OQ}$，在 ΔOCP 和 ΔOAQ 中，$\overline{OC}=\overline{OA}$，由已知，$\overline{CA}=\overline{AB},\overline{AP}=\overline{BQ}$。所以，$\overline{CP}=\overline{AQ}$。

又因為 O 是 ΔABC 的外心，所以 $\angle OCP=\angle OAC$，由於等腰三角形的外心必在頂角的平分線上，所以 $\angle OAC=\angle OAQ$，從而 $\angle OCP=\angle OAQ$。

因此，$\Delta OCP\cong\Delta OAQ$，於是，$\angle CPO=\angle AQO$，所以，$O,A,P,Q$ 四點共圓。

[方法 2]

連接 $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OP},\overline{OQ}$，類似於[方法 1]可得 $\Delta OAP\cong\Delta OBQ$，於是，$\angle APO=\angle BQO$，即 $\angle APO=\angle AQO$，所以，O,A,P,Q 四點共圓。

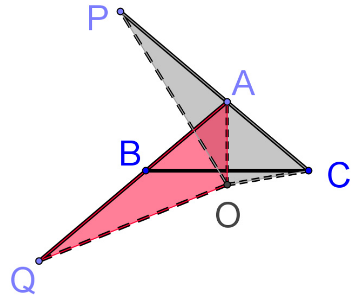
[方法 3]

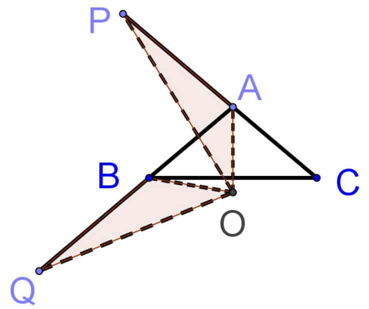
作 ΔAPQ 的外接圓與 A,O 的連線交於 O'。

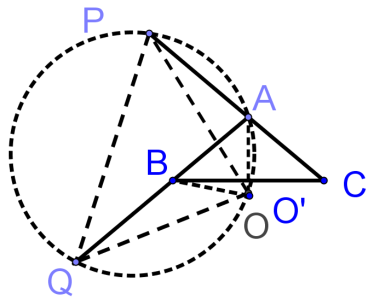
連接 $\overline{O'A},\overline{O'B},\overline{O'P},\overline{O'Q}$，則有 $\angle PQO'=\angle O'AC=\angle O'AQ=\angle O'PQ$，從而，$\overline{O'P}=\overline{O'Q}$。

又由，$\overline{AP}=\overline{BQ}$ 及 $\angle APO'=\angle BQO'$ 得 $\Delta APO'\cong\Delta BQO'$。

從而，$\overline{O'A}=\overline{O'B}$，這說明 O' 是 ΔABC 的外心，但 ΔABC 的外心是唯一的，故 O' 與 O 重合，於是證得 O,A,P,Q 四點共圓。







【解題評析】

本題要證明四點共圓可利用對同弧的圓周角相等或對角互補等特性，因此只要適當的作輔助線，再找出相應的全等三角形即

可得證，所有徵答同學都有掌握本題重點。詳解提供 3 種作法給各位同學參考。

問題編號
11104

8 人參加演出，共演 m 場，每場 4 人登台，要求 8 人中任兩人同台的次數相同，求 m 的最小值。

簡答： 14

詳解：

設每兩個人同台演出 k 次，則所有「兩人組」一共出現 $C_2^8 k = 28k$ 次，另一方面，每次演出出現 $C_2^4 = 6$ 個「兩人組」，所以「兩人組」共出現 $6m$ 次，所以 $28k = 6m$，$14k = 3m$，所以 $m \geq 14$，故 m 的最小值為 14。

將 $m = 14$ 之情形舉例如下，以 1，2，…，8 表示這 8 個人：

(1234)，(1256)，(1278)，(1357)，(1468)，(1367)，(1458)，(2368)，(2457)，(3456)，(3478)，(5678)，(2358)，(2467)，則此時任兩人同台 3 次，共演出 14 場。

【解題評析】

1. 先說明此題如何由題意思考解法：
   (1) 由於 $\boxed{8\text{ 人}}$中任$\boxed{\text{兩人}}$同台的次數均為$\boxed{k\text{ 次}}$，所以「兩人組」共 $C_2^8 k=28k$ 次，再由共演$\boxed{m\text{ 場}}$，每場$\boxed{4\text{ 人}}$登台，「兩人組」共 $C_2^4 m$ 次，從這兩個方向所得的「兩人組」的次數相同。得知 $m \geq 14$。
   (2) 舉一個例子說明 $m = 14$ 可以成立。
2. 一些參與徵答的同學缺少舉例說明 $m = 14$ 可以成立。

問題編號
11105

有 10 位小朋友，每個人都有 10 個彈珠，今每兩個人都猜拳比輸贏，輸的人給贏的人一顆彈珠，結束後把十個人分成甲乙兩組，已知甲組小朋友的所有彈珠比乙組所有彈珠多 28 個，試問，乙組的小朋友當中，擁有最多彈珠的小朋友，最多有幾個？最少又有幾個？

簡答：最多 19 個；最少 7 個。

詳解：

全部有 100 個，所以甲組最後有 64，乙有 36 個。假設甲組有 x 人，乙組有 $(10-x)$ 人，兩組之間總共會有 $x(10-x)$ 次的交手，假設其中甲勝了 y 次，乙勝了 $x(10-x)-y$ 次，

則 $10x + y - [x(10-x) - y] = 64$，

則 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 32$，所以 x 為偶數，

由 $0 \leq y \leq x(10-x)$，則

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+32\ge 0 \\ x(10-x)\ge -\frac{1}{2}x^2+32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2\le 64 \\ (x-10)^2\le 36 \end{cases} \Rightarrow 4\le x\le 8,$$

$x=4$時，$y=24$，乙組對甲組全輸，所以每個人都先損失 4 個，而乙組內部每個人都要再猜 5 次，最多的人總和至少勝一次。因此，乙組的小朋友當中，擁有最多彈珠的小朋友，最少有 7 個(此時，乙的人對內部若是勝者，都是三勝二負)，而最多有 11 個(此時, 此人對內全勝)。$x=6$時，$y=14$，乙組對甲組勝 10 次，此時乙組的小朋友當中，擁有最多彈珠的小朋友，不可能低於 7 個，最多可以有 19 個（此時，此人對所有人全勝）。同理，$x=8$時，$y=0$，乙組的小朋友當中，擁有最多彈珠的小朋友，不可能低於 7 個，最多可以有 19 個，綜合以上，乙組的小朋友當中，擁有最多彈珠的小朋友，最少是 7 個，最多可以有 19 個。

【解題評析】

這樣的題目主要的方法是能假設未知數，依題意列關係式，並利用自然限制求出範圍，再針對範圍內的值討論，逐一完整的推出可能情形，大部分同學或多或少都能找到一些可能的極值，但沒有完整的說明這就是最大或最小的可能，就無法保證結果是對的。這個問題大部分的人得分偏低，可能的原因是對題意的了解不夠清楚，或不善用未知數來幫助作嚴謹的計算與證明，往後，希望同學對於這類題目的處理，除了純文字的說明之外，也能善用符號及計算。

問題編號
11201

正整數 $N=1007\times1008\times1009\times\cdots\times2009$，$\times2010\times2011\times2012\times2013\times2014$若 $N=2^P\times Q$ 且Q為正奇數，試求正整數P的值。

簡答：1007。

詳解：

$$\begin{aligned}
N&=1007\times1008\times1009\times\cdots\times2008\times2009 \\
&\quad\times2010\times2011\times2012\times2013\times2014 \\
&=\frac{1\times2\times3\times\cdots1004\times1005\times1006\times1007\times\cdots2013\times2014}{1\times2\times3\times.\cdots\times1004\times1005\times1006} \\
&=(1\times3\times5\times\cdots\times2009\times2011\times2013) \\
&\quad\times\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2006\times2008\times2010\times2012}{1\times2\times3\times.\cdots\times1004\times1005\times1006}\times2014 \\
&=(1\times3\times5\times7\cdots\times2009\times2011\times2013)\times2^{1006}\times2014 \\
&=(1\times3\times5\times7\cdots\times2009\times2011\times2013)\times2^{1006} \\
&\quad\times2\times1007 \\
&=2^{1007}\times(1\times3\times5\times7\cdots\times2009\times2011\times2013) \\
&\quad\times1007=N=2^P\times Q,
\end{aligned}$$

故正整數P的值為1007。

【解題評析】

1. 本題屬於較簡易的數論問題，同學只要透過對於因數性質的掌握及瞭解就能計

算出正確的數值，並利用數學符號完整表達論證計算的過程。

2. 其餘未獲滿分同學主要是書寫方式與計算考慮不周延，或者是在計算中忘記考慮某些條件導致錯誤推論。整體而言參與徵答學生的數學論證與思考表達方法均十分優異，特別是有幾位同學已經會使用高斯符號來協助計算。

問題編號 11202

若 x 為實數，且

$\sqrt{x^3+2560}-\sqrt{2344-x^3}=68$，試求

$28\sqrt{x^3+2560}+27\sqrt{2344-x^3}$ 的值。

簡答：2014。

詳解：

設 $x^3+2560=a$ 、 $2344-x^3=b$ ，可得 $a+b=4904$ 。

由題目的條件知

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=68 \Rightarrow 2\sqrt{ab}=a+b-68^2=4904-4624=280$ 。故

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=4904+280=5184$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}=72$

所以 $\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}=72\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=68\end{cases} \Rightarrow \sqrt{a}=70$ 、 $\sqrt{b}=2$ 。

因此，

$28\sqrt{x^3+2560}+27\sqrt{2344-x^3}=28\sqrt{a}+27\sqrt{b}=2014$ 。

【解題評析】

本題屬於較容易的代數題，若解題的過程中，能適當的換元，則能大大降低計算的量。部分同學利用平方法去根號來解題，也因此多算了一個答案。在平方去根號時要特別注意，此時會有增根的情況發生，一定要代回原方程式檢查。

問題編號 11203

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ABC=60°$，$\angle ACB=40°$，若 P 點為 $\triangle ABC$ 內部一點，使得 $\angle PBC=20°$，$\angle PCB=30°$，試求 $\angle APB$ 之度量。

簡答：$\angle APB=70°$。

詳解：

以線段 $\overline{BP}$ 為邊作正三角形 $\triangle PBD$，如下圖。

$\because \angle ABC=60°$，$\angle ACB=40°$，

$\angle PBC=20°$，

$\therefore \angle BAC=80°$，$\angle ABD=100°$，

而知 $\overline{DB}$ 平行 $\overline{CA}$ ……(1)；

$\because \angle BDP=60°$，$\angle BCP=30°$，

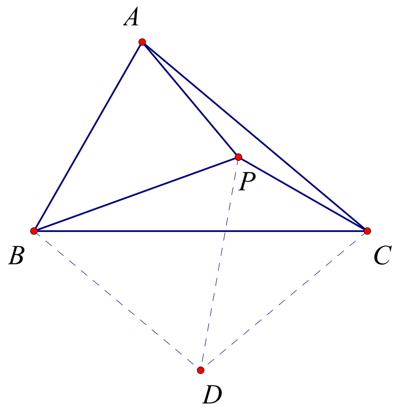
即 $\angle BDP=2\angle BCP$ ，且 D 在線段 $\overline{BP}$ 的中垂線上，

$\therefore$ 點 D 是 $\triangle PBC$ 的外心，而知

$\overline{DC}=\overline{DB}=\overline{BP}$，得 $\angle DCA=80°=\angle BAC$……(2)。

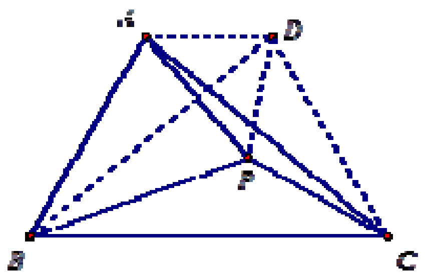
由(1)(2)可知：四邊形 $BDCA$ 為等腰梯形，即 $\overline{BA}=\overline{DC}$，得 $\overline{BA}=\overline{BP}$。

因此，$\triangle BAP$ 是頂角 $\angle ABP = 40°$ 的等腰三角形，故知 $\angle APB = 70°$。



【另解】

以 $\overline{BC}$ 之中垂線為軸，作$\triangle ABC$ 之鏡射三角形，得$\triangle DCB$，如下圖，連結 $\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DP}$、$\overline{DC}$。



$\because \angle ABC = 60°$，$\angle ACB = 40°$，\

$\angle PBC = 20°$，

$\therefore \angle ABD = \angle PBD = \angle PBC = 20°$；

$\angle ABD = \angle PBD = \angle PBC = 20°$……(1)；

$\because \angle BCD = 60°$，$\angle BCP = 30°$，

$\therefore \angle BCP = \angle DCP = 30°$……(2)，

由(1)(2)可知點 P 為$\triangle DBC$ 之內心。又，

$\because \overline{AD}$ 平行 $\overline{BC}$，$\angle DBC = 40°$，

$\angle DCB = 60°$，

$\therefore \angle ADB = \angle PDB = \angle PDC = 40°$……(3)。

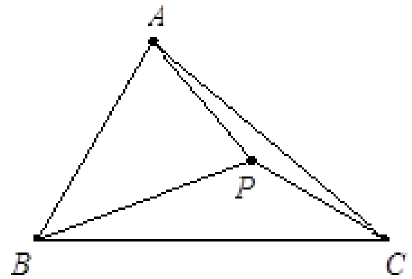
由(1)(3)可知：$\angle ABD = \angle PBD$，$\angle ADB = \angle PDB$，又，$\overline{BD}=\overline{BD}$，因此，$\triangle ABD$ 與 $\triangle PBD$ 全等，故 $\overline{DA}=\overline{DP}$，$\overline{BA}=\overline{BP}$，而知四邊形 $ABPD$ 為鳶形，$\triangle BAP$ 是頂角 $\angle ABP = 40°$ 的等腰三角形，

故 $\angle APB = 70°$。

※(這是新北市江翠國中劉建亨同學所提供的做法，謝謝劉建亨同學。)

【再解】

如下圖。



$\triangle ABC$ 中，設 $\angle CAP=\theta$，則

由 $\angle ABC = 60°$，$\angle ACB = 40°$，$\angle PBC = 20°$，$\angle PCB = 30°$，可知 $\angle ABP = 40°$，$\angle ACP = 10°$，$\angle BAP = 80°-\theta$。因此，

若$\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CAP$ 之面積分別為 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$，則

$2\triangle_1 = \overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin(80°-\theta)$

$\quad = \overline{AB}\times\overline{BP}\times\sin 40°$；

$2\triangle_2 = \overline{BC}\times\overline{BP}\times\sin 20°$

$\quad = \overline{BC}\times\overline{CP}\times\sin 30°$；

$2\triangle_3 = \overline{CA}\times\overline{CP}\times\sin 10°$

$=\overline{CA}\times\overline{AP}\times\sin\theta$，而有

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\times\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\times\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin(80^\circ-\theta)}\times\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\times\frac{\sin\theta}{\sin 10^\circ}$$

，因為 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 40^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ$，

$$\sin(80^\circ-\theta)=\sin(90^\circ-(10^\circ+\theta))=\cos(10^\circ+\theta)，$$

整理得 $\frac{\cos 20^\circ\sin\theta}{\cos(10^\circ+\theta)\sin 10^\circ}=1$，而知 $\theta=10^\circ$，即 $\angle CAP=10^\circ$，$\angle BAP=70^\circ$，故知 $\angle APB=70^\circ$。

※(本法大致是台北市麗山國中朱友祈同學的做法，謝謝朱友祈同學。)

(最後 $\theta=10^\circ$ 之求知，不難觀察而得，亦可演算如下：

$$\because \frac{\cos 20^\circ\sin\theta}{\cos(10^\circ+\theta)\sin 10^\circ}=1，$$

$$\therefore \frac{\sin(20^\circ+\theta)-\sin(20^\circ-\theta)}{\sin(20^\circ+\theta)-\sin\theta}=1，$$ 化簡為

$\sin(20^\circ-\theta)=\sin\theta$，而知 $20^\circ-\theta=\theta$，即得 $\theta=10^\circ$。)

【又解】

$\triangle ABC$ 中，由 $\angle ABC=60^\circ$，$\angle ACB=40^\circ$，$\angle PBC=20^\circ$，$\angle PCB=30^\circ$，可知，$\angle BPC=130^\circ$，$\angle BAC=80^\circ$。因此，根據正弦定理，在 $\triangle BCP$ 中，有 $\frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 130^\circ}$；在 $\triangle ABC$ 中，有 $\frac{\overline{BA}}{\sin 40^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 80^\circ}$，兩式相除，得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}}=\frac{\sin 30^\circ\sin 80^\circ}{\sin 130^\circ\sin 40^\circ}=\frac{\sin 30^\circ\sin 80^\circ}{\sin 130^\circ\sin 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}=1，$$

而知 $\overline{BP}=\overline{BA}$，即 $\triangle BAP$ 是頂角 $\angle ABP=40^\circ$ 的等腰三角形，故 $\angle APB=70^\circ$。

【解題評析】

幾何證明有時需要增添輔助線，才能有利探究各相關物件之間的關係。如何添作輔助線常常不易索解，但也並非無跡可尋，我們應再多下工夫。本題劉建亨同學的做法，找到了使 P 點成為 $\triangle DBC$ 之內心的 D 點，從而推知四邊形 $ABPD$ 為鳶形，求得 $\angle APB$ 之度量。此法構思精巧，值得推介。謝謝劉同學。

本題如果利用三角函數解題，可以不必添作輔助線，這本非我們有意強調的課題，不過，朱友祈同學的解法觸及了相關的領域，我們也樂於參加討論。謝謝朱同學。【又解】中用到了正弦定理、倍角公式與餘角關係，前者可以用面積求法替代，後兩者為三角函數基本性質，有意藉此解題者必須理解。

問題編號
11204

今有 5 個學生 A、B、C、D、E 參加一項比賽，有人試圖猜測比賽結果。小建猜測的名次順序為 BEDAC，結果他沒猜中任何一個學生的名次，也沒能猜中任何一對相鄰名次學生的順序關係。小國猜測的名

次順序為 ABCDE，結果他猜中了兩個學生的名次，又猜中了兩對相鄰名次學生的順序關係(這兩對相鄰名次學生的順序關係沒有重疊到共同名次)。試問這項比賽結果的名次為何？

簡答：CABDE。

詳解：

若在一對被猜中的相鄰名次學生的順序關係中，有一個名次被猜中，則顯然兩個名次全部被猜中。所以小國所猜中的兩個名次必是他所猜中兩對順序關係中的其中一對。

如果是第二、三名 BC(或第三、四名 CD)被猜中，則另一對被猜中的順序關係必是第四、五名 DE(或第一、二名 AB)，於是就造成全猜中了，不合。

而剩下的可能情形有下列兩種：

(1) 第一、二名 AB 被猜中在此情形下，可能的名次如下：ABDEC， ABDCE，ABEDC， ABCED， ABECD，ABCDE。經檢驗皆不合題述。

(2) 第四、五名 DE 被猜中在此情形下，除了 ABCDE 已被討論過不合外，其餘可能的名次如下：BACDE，BCADE，ACBDE， CABDE，CBADE。只有 CABDE 合於題述，故為此次比賽結果的名次。

【解題評析】

本題屬中等難易度之組合操作題，同學只要謹慎地分組(情況)討論、細心地列舉並汰除不合理的狀況，應不難答對。

問題編號
11205

試求所有可能的整數 a ，使得 x 的方程式 $x^2 - x\sqrt{5a^2-6a+18} - (a^2-9a-26) = 0$ 的兩根皆為整數。

簡答： $a=-3$ 。

詳解：

設方程式的兩根為 x_1, x_2 ，

於是 $x_1 + x_2 = \sqrt{5a^2-6a+18}$ 為整數，即方程式為整係數一元二次方程式，其根為整數，則其判別式必為完全平方數。

設 $D=(5a^2-6a+18)+4(a^2-9a-26)=b^2$ ，b 為正整數，

即 $(3a-7)^2-b^2=135$ ，

故 $(3a-7-b)(3a-7+b)=135$ ，

但 $3a-7-b$ 與 $3a-7+b$ 同奇偶，且 $3a-7-b \le 3a-7+b$ ，

又 $135=1\times135=3\times45=5\times27=9\times15$

$$\begin{aligned}&=(-15)\times(-9)=(-27)\times(-5)\\&=(-45)\times(-3)=(-135)\times(-1)\end{aligned},$$

則 $\begin{cases}3a-7-b=1\\3a-7+b=135\end{cases}$ ， $\begin{cases}3a-7-b=3\\3a-7+b=45\end{cases}$ ，

$\begin{cases}3a-7-b=5\\3a-7+b=27\end{cases}$ ， $\begin{cases}3a-7-b=9\\3a-7+b=15\end{cases}$ ，

$\begin{cases}3a-7-b=-15\\3a-7+b=-9\end{cases}$ ， $\begin{cases}3a-7-b=-27\\3a-7+b=-5\end{cases}$ ，

$\begin{cases}3a-7-b=-45\\3a-7+b=-3\end{cases}$ ， $\begin{cases}3a-7-b=-135\\3a-7+b=-1\end{cases}$ ，

解得 $a=25,\frac{31}{3},\frac{23}{3},\frac{19}{3},-\frac{5}{3},-3,-\frac{17}{3},-\frac{61}{3}$，

因 a 為整數，故 $a=25,-3$，但 $a=25$ 代回不合，故 $a=-3$，

此時，方程式為 $x^2-9x-10=0$，它有兩個整數根 10 和 -1。

問題編號
11301

找出所有可能的三個正整數，使得任兩個數的和除以第三個數，餘數都是 1。

簡答：$(2,2,3)\vee(3,4,6)\vee(6,10,15)$。

詳解：

令三數為 $a\le b\le c$，

由 $a+b-1$ 為 c 的倍數且 $a+b-1<2c$，

則 $a+b-1=c$，

由 $a+c-1$ 為 b 的倍數，則 $2a+b-2$ 為 b 的倍數，則 $2a-2$ 為 b 的倍數，又 $2a-2<2b$，可知 $2a-2=b$，

由 $b+c-1$ 為 a 的倍數，則 $5a-6$ 為 a 的倍數，則 6 為 a 的倍數，

又 $a>1$，可得 $a=2,3,6$，

則 $(a,b,c)=(2,2,3)\vee(3,4,6)\vee(6,10,15)$。

【另解】(新北市文山國中的鄭容濤同學)

(1) 不失一般性，設 $a\ge b\ge c$，令 $a+b+c=n+1$，依題意可得 a,b,c 均為 n 的因數。

(2) 令 $x=\frac{n}{a},y=\frac{n}{b},z=\frac{n}{c}$，其中 x,y,z 均為正整數，且 $z\ge y\ge x$

由 $a+b+c=n+1$，可得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{n+1}{n}>1$，且任兩項之和小於 1。

(3) x,y,z 一定要有 $2(\because \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ 不夠)，且不能有兩個 $2(\because \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 不合)，一個 2 之後，一定要有 $3(\because \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ 不夠)，

最後一個數，一定不可以大於 $5(\because \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 不夠)，

經檢驗 $(x,y,z)=(2, 3, 3)$、$(2, 3, 4)$、$(2, 3, 5)$ 均符合條件，所對應的原三數為 $(3, 2, 2)$、$(6, 4, 3)$、$(15, 10, 6)$。

【解題評析】

這樣的題目主要的解法，是能不失一般性的假設未知數的順序，依題意列關係式，並利用不等式求出範圍，再針對範圍內的值討論，逐一找出各變數的相對關係，並完整的推出可能情形。大部分同學都能找到一些或全部可能的關係，並寫出一些或全部的解。

問題編號
11302

已知 $\langle a_n \rangle$ 為首項 $a_1=1$、公差 $d>0$ 的等差數列，若 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{99}a_{100}}$ 為整數，試求公差 d 最小的可能值。

簡答：$\dfrac{1}{9702}$。

詳解：

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{99}a_{100}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}}{a_2-a_1}+\frac{\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}}{a_3-a_2}+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{a_{99}}-\frac{1}{a_{100}}}{a_{100}-a_{99}}$$

$$=\frac{1}{d}\left[(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\cdots\cdots+(\frac{1}{a_{99}}-\frac{1}{a_{100}})\right]$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{100}})=\frac{1}{d}(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+99d})=\frac{99}{1+99d},$$

設 $\dfrac{99}{1+99d}=n$ 為一正整數，

則 $1+99d=\dfrac{99}{n}>1 \Rightarrow 1\le n\le 98$，

欲使 d 最小，則 n 應取最大值

$98 \Rightarrow 1+99d=\dfrac{99}{98}$,

$d=\dfrac{1}{98\times 99}=\dfrac{1}{9702}$。

【解題評析】

本題主要測試同學對等差數列定義的理解及分數的運算技巧。根據等差數列的定義，$a_{n+1}-a_n=d$ 為一定值，又由分數的通分可知，分母為 $a_n\cdot a_{n+1}$ 的分數可拆解為二個分母分別為 a_n 及 a_{n+1} 的分數相加減，進而簡化分數的形式。實際進行操作可得：

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{99}a_{100}}$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{100}})=\frac{1}{d}(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+99d})=\frac{99}{1+99d}$$

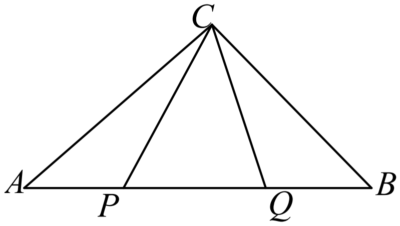
幾乎所有投稿的同學都能成功轉換出此形式，得到 4 分；但接下來則只有 25% 的同學做出正確的討論，得到滿分 7 分。

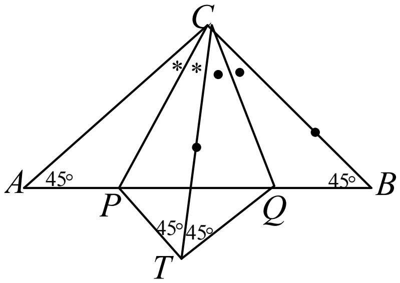
要注意「整除」這件事是發生在整數域中的，意即雖然 $\dfrac{5}{2.5}=2$ 為一整數，但我們只能說 2.5〝除盡〞5，而不能說 2.5〝整除〞5，所以 2.5 不是 5 的因數！許多同學在這裡犯了致命的錯誤，這個錯誤基於對「整除」與「除盡」的理解不夠，所以得到 $(1+99d)$ 為 99 的最小正因數 3 這個錯誤的答案！

問題編號
11303

如圖，在三角形 ABC 中，$\overline{BC}=\overline{AC}$，$\angle ACB=90°$，$P$、$Q$ 為 $\overline{AB}$ 上的兩點，

$\angle PCQ = 45°$，試證：$\overline{AP}^2+\overline{BQ}^2=\overline{PQ}^2$。





詳解：

以 $\overline{CQ}$ 為對稱軸將 $\overline{BC}$ 對稱至 $\overline{TC}$，

$\Rightarrow \overline{BQ}=\overline{TQ}$，$\angle CTQ$= 45°

以 $\overline{CP}$ 為對稱軸將 $\overline{AC}$ 對稱至 $\overline{TC}$，

$\Rightarrow \overline{AP}=\overline{TP}$，$\angle CTP$= 45°

$\therefore \angle PTQ$=90°

$\Rightarrow \overline{AP}^2+\overline{BQ}^2=\overline{TP}^2+\overline{TQ}^2=\overline{PQ}^2$。

【解題重點】

本題是屬於開放性的幾何證明題，有幾個思考方向；

1.軸對稱法。

2.旋轉法。

3.利用畢氏定理暴力解之。

4.利用餘弦定理(不鼓勵此方法)。

問題編號
11304

將 2×2 的方格紙去掉一個方格餘下的圖形稱為 L 形，用此種 L 形去覆蓋 3×7 大小的方格板，每個 L 形恰覆蓋 3 個方格，可以重疊但不能超出方格板的邊界。

試問：能否使每個方格被覆蓋的層數都相同？理由為何？

簡答：不存在滿足題中要求的覆蓋。

詳解：

如圖，將 3×7 的方格板內填寫 -2 和 1，易知，每個 L 形所覆蓋的 3 個方格中的 3 個數之和只有可能為 0 或 3。因此，無論用多少個 L 形覆蓋多少次，蓋住的所有數字之和都是非負數且為 3 的倍數。另一方面，方格板上數字的總和為 $8\times(-2)+13\times1=-3$，當每個方格被覆蓋 k 層時，蓋住的數字之和等於 $-3k$，表示不存在滿足題中要求的覆蓋。

−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2

【評析】

本題須注意證明的完整性，在作邏輯分析時，分析要詳盡清楚，論述完整，期盼各位同學更加精進數學論述的能力。

問題編號
11305

已知 $f(x)=\dfrac{3x^4+6x^3+11x^2+8x+52}{(x^2+x+3)^2}$，求 $f(x)$之最大值與最小值。

簡答：

$f(x)$之最大值為 $\dfrac{73}{11}$，最小值為 $\dfrac{28}{11}$。

詳解：

$\because\ 3x^4+6x^3+11x^2+8x+52$

$=(x^2+x+3)(3x^2+3x-1)+55$，

$3x^2+3x-1=3(x^2+x+3)-10$，

$\therefore\ 3x^4+6x^3+11x^2+8x+52$

$=3(x^2+x+3)^2-10(x^2+x+3)+55$，得

$$f(x)=\frac{3x^4+6x^3+11x^2+8x+52}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=3-\frac{10}{x^2+x+3}+\frac{55}{(x^2+x+3)^2}，$$

令 $A=\dfrac{1}{x^2+x+3}$，

則 $f(x)=3-10A+55A^2$

$=55(A^2-\dfrac{2}{11}A+\dfrac{1}{11^2})+\dfrac{28}{11}$，

配方，得 $f(x)=55(A-\dfrac{1}{11})^2+\dfrac{28}{11}$；又

由於 $x^2+x+3=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{11}{4}\geq\dfrac{11}{4}$，

可知 $0<A\leq\dfrac{4}{11}$，得

$-\dfrac{1}{11}\leq A-\dfrac{1}{11}\leq\dfrac{3}{11}$

$\Rightarrow\ 0\leq(A-\dfrac{1}{11})^2\leq\dfrac{9}{121}$，

其中等號分別於 $A=\dfrac{1}{11}$、$A=\dfrac{4}{11}$時成立；

而 $A=\dfrac{1}{11}$，即 $x^2+x+3=11$，

化為 $x^2+x-8=0$，得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$，

$A=\dfrac{4}{11}$，$x^2+x+3=\dfrac{11}{4}$，

化為 $4x^2+4x+1=0$，得 $x=\dfrac{-1}{2}$；

因此，

$f(x)$在 $x=\dfrac{-1}{2}$時取得最大值，此最大值為

$55\times\dfrac{9}{121}+\dfrac{28}{11}=\dfrac{73}{11}$，

$f(x)$在 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$時取得最小值，此最小值為 $55\times0+\dfrac{28}{11}=\dfrac{28}{11}$。

【解題評析】

化簡代數式子有一個常用的策略，就是變數代換；尋找二次函數的最大值或最小值有一個重要的方法，就是配方法，本題是其相關的例子。

如上詳解，將 x^2+x+3 視為一體而以另一變數代換，即可化簡 $f(x)$，是明顯可見的事實，問題只在化簡 $f(x)$為二次函數

$3-10A+55A^2$ 後，其中之 A 值受到區間限制，並非任意實數。

本題共有 10 位同學應徵答題，大家所採用的方法大概都如以上詳解，差異只是敍論是否得當與計算是否正確而已。關於不等式，有一點問題請同學注意：若推論得到 $m \leqq f(x) \leqq M$，必須先確認 $f(x)$ 可以取得 m、M 值，也就是要論證確有或實際找到使得 $f(x)=m$ 與 $f(x)=M$ 時之 x 值，才可指明 $f(x)$ 的最小值為 m、最大值為 M；否則可能誤失。譬如：如果已知 x 為正整數且 $g(x)=2x \geq 5$，那麼 $g(x)$ 的最小值是 $g(3)=6$，而非 5，因為使得 $g(x)=5$ 之正整數 x 不存在。

以下是電腦繪製的本題 $y=f(x)$ 之函數圖形，提供同學參考。