拉格朗日的奧義：插值多項式的展開式係數

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

現行高中課程的多項式除法，循序漸進地介紹了除法原理、餘式定理、因式定理。大家都知道：多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式是 $f(a)$。

進一步地，試問：設 a,b,c 全相異，則多項式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的餘式為何？此一問題，課程中已給出了回答：

設餘式為 $R(x)$，即 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot Q(x)+R(x)$

$\Rightarrow R(a)=f(a)$， $R(b)=f(b)$， $R(c)=f(c)$，且 $\deg R(x)\le 2$，

由「拉格朗日插值多項式」，可得

$$R(x)=f(a)\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\text{。}$$

以上的事實，不妨稱為「**推廣的餘式定理**」，以此而言，呈現出了拉格朗日插值多項式在代數上的意義與重要性，在多項式的體系中，是不可或缺的一環。

另一方面，在「商式定理」[1]一文中，探討多項式除法所得的商式係數，特別地，可得如下的事實： x^{n+3} 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的商式係數，正是 a,b,c 三變數構成的完全齊次對稱多項式 $h_j(a,b,c)$，其中下標 j 由 0 到 n。也可用算式表達：

$$x^{n+3}=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot\left[h_0(a,b,c)\cdot x^n+h_1(a,b,c)\cdot x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}(a,b,c)\cdot x+h_n(a,b,c)\right]$$

$$+a^{n+3}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\text{。}$$

在本篇文章，將聚焦於餘式，令

$$R_3(x)=a^{n+3}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=Ax^2+Bx+C\text{。}$$

由於 $R_3(x)$ 對於三個變數 a,b,c 是對稱的，可以想像 $R_3(x)$ 的展開式係數 A,B,C，應該能

用 a,b,c 的「對稱多項式」加以表達。問題：A,B,C 如何用對稱多項式加以表達？

更一般地，由參考資料[1]，設 $p\ge 2$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 為 p 個兩兩相異的變數。當 x^{n+p} 除以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_p)$ 時，有

$$x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p}{a_j}^{n+p}\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}\text{。}$$

將其中的餘式 $R_p(x)=\sum_{j=1}^{p}{a_j}^{n+p}\cdot\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}$ 展開，可令

$R_p(x)=A_1x^{p-1}+A_2x^{p-2}+\cdots+A_{p-1}x+A_p$。試問：將 $A_1,A_2,\cdots,A_{p-1},A_p$ 用 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 的對稱多項式加以表達，則表達式為何？經過一番探索之後，得到如下的答案：

當 $n\ge 0$，$p\ge 2$ 時，$A_j=\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i}$，其中 $j=1,2,\cdots,p$，且

e_{j+i} 代表 $e_{j+i}(a_1,a_2,\cdots,a_p)$，$h_{n-i}$ 代表 $h_{n-i}(a_1,a_2,\cdots,a_p)$。

貳、本文

一、記號、定義與已知公式：

1. 完全齊次對稱多項式(Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)：

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}({a_1}^{\lambda_1}{a_2}^{\lambda_2}\cdots{a_n}^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，有 $h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，與 $h_k(a)=a^k$。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0}}({a_1}^{\lambda_1}{a_2}^{\lambda_2}{a_3}^{\lambda_3})={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$h_n(\alpha,\beta)=\sum\limits_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}}(\alpha^i\beta^j)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。

2. 拉格朗日插值型式

定義：$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\,k}}{\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次拉格朗日插值型式」。

註：以分子的次方來定義 L 的下標。

例：$L_6(a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i^{\,6}}{\prod_{\substack{1\le j\le 2\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^{\,6}}{a_1-a_2}+\frac{a_2^{\,6}}{a_2-a_1}$，

$$L_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^{\,2}}{\prod_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^{\,2}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^{\,2}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^{\,2}}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$ 。

例：$L_6(a,b,c,d)=\frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^6}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^6}{(c-a)(c-b)(c-d)}$

$+\frac{d^6}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ 。

3. $h-L$ **轉換公式：** $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $n\ge 2$，$k\ge 0$ 。

(參考資料[2])

說明：此一公式，可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。

由於 L 與 h 的下標之差，恰為變數個數減 1，因此 $h-L$ 轉換公式，也可寫成：

$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $k\ge n-1$ 。

例：$L_{11}(a_1,a_2,a_3,a_4)=h_{11-(4-1)}(a_1,a_2,a_3,a_4)=h_8(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 。

在 $L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中，取 $n=3$，$a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=c$，
得 $L_{k+2}(a,b,c)=h_k(a,b,c)$，再令 $k=n$，可得 $L_{n+2}(a,b,c)=h_n(a,b,c)$ 。

4. 基本對稱多項式 **(Elementary Symmetric Polynomial)**

定義：$e_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\le 1}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次基本對稱多項式」。

例：$e_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}a_3{}^{\lambda_3})=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$e_0(a,b,c)=1$，$e_1(a,b,c)=a+b+c$，$e_2(a,b,c)=ab+bc+ca$，$e_3(a,b,c)=abc$。

例：$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-e_1(a,b,c)x^2+e_2(a,b,c)x-e_3(a,b,c)$。

例：$\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_p)=x^p-e_1x^{p-1}+\cdots+(-1)^je_jx^{p-j}+\cdots+(-1)^pe_p$

$=\sum_{j=0}^{p}(-1)^je_jx^{p-j}$，其中 $e_j=e_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)$。

5. 對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」：(參考資料[3])

$\sum_{k=0}^{m}(-1)^ke_k\cdot h_{n-k}=0$，其中 $n\ge m$，

亦即 $h_n-e_1h_{n-1}+\cdots+(-1)^ke_kh_{n-k}+\cdots+(-1)^me_mh_{n-m}=0$。

(其中 $e_k=e_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$h_k=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$)

說明：此式刻劃了基本對稱多項式與完全齊次對稱多項式的關聯性。

例：當 $m=3$，$n=3$時，有 $\sum_{k=0}^{3}(-1)^ke_k\cdot h_{3-k}=0$，即

$h_3(a,b,c)-e_1(a,b,c)h_2(a,b,c)+e_2(a,b,c)h_1(a,b,c)-e_3(a,b,c)h_0(a,b,c)=0$。

二、主要工作：

(一) 直接展開求 $R_3(x)=a^{n+3}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

令 $R_3(x)=A_1x^2+A_2x+A_3$，事實上，透過直接展開 $R_3(x)$，可得

$$A_1=\frac{a^{n+3}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+3}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+3}}{(c-a)(c-b)}$$

$$=L_{n+3}(a,b,c)=h_{n+1}(a,b,c) \qquad (\text{由 } h-L \text{ 恆等式})$$

$$A_2=-[\frac{a^{n+3}(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+3}(a+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+3}(a+b)}{(c-a)(c-b)}]$$

$$=-\frac{a^{n+3}[(a+b+c)-a]}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^{n+3}[(a+b+c)-b]}{(b-a)(b-c)}-\frac{c^{n+3}[(a+b+c)-c]}{(c-a)(c-b)}$$

$$=-(a+b+c)\cdot[\frac{a^{n+3}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+3}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+3}}{(c-a)(c-b)}]$$

$$+[\frac{a^{n+4}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+4}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+4}}{(c-a)(c-b)}]$$

$$=-e_1(a,b,c)\cdot L_{n+3}(a,b,c)+L_{n+4}(a,b,c) \qquad (\text{由 } h-L \text{ 恆等式})$$

$$=-e_1(a,b,c)\cdot h_{n+1}(a,b,c)+h_{n+2}(a,b,c)$$

$$A_3=\frac{a^{n+3}\cdot bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+3}\cdot ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+3}\cdot ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$=abc\cdot[\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+2}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}]$$

$$=e_3(a,b,c)\cdot L_{n+2}(a,b,c)$$

$$=e_3(a,b,c)\cdot h_n(a,b,c) \qquad (\text{由 } h-L \text{ 恆等式})$$

至此，得 $A_1=h_{n+1}$， $A_2=-e_1\cdot h_{n+1}+h_{n+2}$， $A_3=e_3\cdot h_n$ ，已將 A_1,A_2,A_3 用 a,b,c 的「基本對稱多項式」與「完全齊次對稱多項式」加以表達。

討論：在上述的過程中，雖然順利求得答案，但是系統性不足，各項係數只能各個擊破，看不出共通模式，當變數個數增加時，此方法就難以為繼了。是否有不同的作法呢？讓我們換個角度思考看看。

(二)　將 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)$ 乘開，其中 $n\geq 3$：

注意到 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)$

$$=(e_0x^3-e_1x^2+e_2x-e_3)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)$$

可由如下方式乘開：

$$
\begin{array}{llllll}
e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & & \\
\hline
h_0 & & & & & \Rightarrow (e_0h_0)x^{n+3} \\
h_1 & h_0 & & & & \Rightarrow (e_0h_1 - e_1h_0)x^{n+2} \\
h_2 & h_1 & h_0 & & & \Rightarrow (e_0h_2 - e_1h_1 + e_2h_0)x^{n+1} \\
\hline
h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & & \Rightarrow (e_0h_3 - e_1h_2 + e_2h_1 - e_3h_0)x^n \\
h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & & \Rightarrow (e_0h_4 - e_1h_3 + e_2h_2 - e_3h_1)x^{n-1} \\
\vdots & & \vdots & & & \\
\vdots & & \vdots & & & \\
h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & & \Rightarrow (e_0h_{n-1} - e_1h_{n-2} + e_2h_{n-3} - e_3h_{n-4})x^4 \\
h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & & \Rightarrow (e_0h_n - e_1h_{n-1} + e_2h_{n-2} - e_3h_{n-3})x^3 \\
\hline
 & h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & & \Rightarrow (-e_1h_n + e_2h_{n-1} - e_3h_{n-2})x^2 \\
 & & h_n & h_{n-1} & & \Rightarrow (e_2h_n - e_3h_{n-1})x \\
 & & & h_n & & \Rightarrow -e_3h_n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (e_0x^3 - e_1x^2 + e_2x - e_3)\cdot(h_0x^n + h_1x^{n-1} + \cdots + h_{n-1}x + h_n) \\
&= [(e_0h_0)x^{n+3} + (e_0h_1 - e_1h_0)x^{n+2} + (e_0h_2 - e_1h_1 + e_2h_0)x^{n+1}] \\
&+[(e_0h_3 - e_1h_2 + e_2h_1 - e_3h_0)x^n \\
&+(e_0h_4 - e_1h_3 + e_2h_2 - e_3h_1)x^{n-1} \\
&+ \qquad \vdots \\
&+(e_0h_n - e_1h_{n-1} + e_2h_{n-2} - e_3h_{n-3})x^3] \\
&+[(-e_1h_n + e_2h_{n-1} - e_3h_{n-2})x^2 + (e_2h_n - e_3h_{n-1})x - e_3h_n] \\
&= [(e_0h_0)x^{n+3} + (e_0h_1 - e_1h_0)x^{n+2} + (e_0h_2 - e_1h_1 + e_2h_0)x^{n+1}] + [0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^3] \\
&+[(-e_1h_n + e_2h_{n-1} - e_3h_{n-2})x^2 + (e_2h_n - e_3h_{n-1})x - e_3h_n] \qquad \text{(由 } e-h \text{ 恆等式)}
\end{aligned}
$$

註：以上算式亦可寫成：$(e_0x^3-e_1x^2+e_2x-e_3)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)$

$$=\sum_{j=0}^{2}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_ih_{j-i})x^{n+3-j}+\sum_{j=0}^{n-3}(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i e_ih_{3+j-i})x^{n-j}+\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=0}^{3-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{3-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{2}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_ih_{j-i})x^{n+3-j}+\sum_{j=0}^{n-3}0x^{n-j}+\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=0}^{3-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{3-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{2}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_ih_{j-i})x^{n+3-j}+\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=0}^{3-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{3-j}\text{ 。}$$

(三)　再求 $R_3(x)=a^{n+3}\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$，其中 $n\geq 3$：

一方面，由上一段的乘開，可知

$$(e_0h_0)x^{n+3}+(e_0h_1-e_1h_0)x^{n+2}+(e_0h_2-e_1h_1+e_2h_0)x^{n+1}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)+[(e_1h_n-e_2h_{n-1}+e_3h_{n-2})x^2$$

$$+(-e_2h_n+e_3h_{n-1})x+e_3h_n]$$

另一方面，由[1]，有

$$x^{n+3}=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot(h_0x^n+h_1x^{n-1}+\cdots+h_{n-1}x+h_n)$$

$$+a^{n+3}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

比較係數之後，即可得

$(e_0h_0)x^{n+3}+(e_0h_1-e_1h_0)x^{n+2}+(e_0h_2-e_1h_1+e_2h_0)x^{n+1}=x^{n+3}$ 以及

$$R_3(x)=a^{n+3}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^{n+3}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=(e_1h_n-e_2h_{n-1}+e_3h_{n-2})x^2+(-e_2h_n+e_3h_{n-1})x+e_3h_n$$

$$=e_0h_{n+1}x^2+(e_0h_{n+2}-e_1h_{n+1})x+e_3h_n=h_{n+1}x^2+(-e_1h_{n+1}+h_{n+2})x+e_3h_n$$ (由 $e-h$ 恆等式)

至此，已得到和直接展開所得一模一樣的答案。可以看出，此模式可推廣到多個變數的一般情形。

(四)　一般情形：求 $R_p(x)=\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n+p}\cdot\dfrac{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}$，其中 $n\ge p$：

注意到 $\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n} h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]$

$$=[\sum_{j=0}^{p}(-1)^j e_j x^{p-j}]\cdot(\sum_{j=0}^{n} h_j x^{n-j}) \qquad \text{(乘開方式置於「附錄」)}$$

$$=\sum_{j=0}^{p-1}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_i h_{j-i})x^{n+p-j}+\sum_{j=0}^{n-p}(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i e_i h_{p+j-i})x^{n-j}+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{p-1}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_i h_{j-i})x^{n+p-j}+\sum_{j=0}^{n-p}0x^{n-j}+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j} \qquad \text{(由 } e-h \text{ 恆等式)}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{p-1}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_i h_{j-i})x^{n+p-j}$$

$$=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot(\sum_{j=0}^{n} h_j x^{n-j})+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

又已知 $x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n} h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n+p}\cdot\dfrac{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}$

比較係數之後，即可得 $\sum_{j=0}^{p-1}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i e_i h_{j-i})x^{n+p-j}=x^{n+p}$ 以及

$$A_1x^{p-1}+\cdots+A_jx^{p-j}+\cdots+A_p=R_p(x)=\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n+p}\cdot\frac{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}=\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

於是有 $A_j=\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i}$，其中 $j=1,2,\cdots,p$。

(五)　當 $0\le n<p$：

以上的討論，已得到當 $n \ge p$ 時，

設 $R_p(x)=\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n+p}\cdot\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}=A_1x^{p-1}+\cdots+A_jx^{p-j}+\cdots+A_p$，則有

$A_j=\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i}$，其中 $j=1,2,\cdots,p$。

下一個問題是：當 $0\le n<p$ 時，情形如何？以上的方法是否可行？

舉個例子：設 $p=5$，$n=2$，令 $R_5(x)=\sum_{j=1}^{5} a_j^{\,2+5}\cdot\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le 5\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le 5\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}=A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5$，

求 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5？

注意到 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\cdot(h_0x^2+h_1x+h_2)$

$=(e_0x^5-e_1x^4+e_2x^3-e_3x^2+e_4x-e_5)\cdot(h_0x^2+h_1x+h_2)$

可由如下方式乘開：

$$
\begin{array}{cccccccl}
e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & & \\
\hline
h_0 & & & & & & & \Rightarrow (e_0h_0)x^7 \\
h_1 & h_0 & & & & & & \Rightarrow (e_0h_1-e_1h_0)x^6 \\
h_2 & h_1 & h_0 & & & & & \Rightarrow (e_0h_2-e_1h_1+e_2h_0)x^5 \\
 & h_2 & h_1 & h_0 & & & & \Rightarrow (-e_1h_2+e_2h_1-e_3h_0)x^4 \\
 & & h_2 & h_1 & h_0 & & & \Rightarrow (e_2h_2-e_3h_1+e_4h_0)x^3 \\
 & & & h_2 & h_1 & h_0 & & \Rightarrow (-e_3h_2+e_4h_1-e_5h_0)x^2 \\
 & & & & h_2 & h_1 & & \Rightarrow (e_4h_2-e_5h_1)x \\
 & & & & & h_2 & & \Rightarrow -e_5h_2
\end{array}
$$

可以看出，乘開的結構出現了三個斜排的 h_0 ， h_1 與 h_2 ，與 $n \ge p$ 時的結構不盡相同。
特別地，可以只聚焦於乘開所得的「後段」(註)來比較：
當 $n \ge p$ 時，例如： $p = 3$ 時， h_n 的排列呈現倒三角形：

$$
\begin{array}{llllll}
e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & & \\
\hline
h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & & & \Rightarrow (-e_1 h_n + e_2 h_{n-1} - e_3 h_{n-2}) x^2 \\
 & h_n & h_{n-1} & & & \Rightarrow (e_2 h_n - e_3 h_{n-1}) x \\
 & & h_n & & & \Rightarrow -e_3 h_n
\end{array}
$$

而當 $0 \le n < p$ 時，例如： $p = 5$ ， $n = 2$ 時，若補上 h_{-1} 與 h_{-2} ，則 h_n 的排列也呈現倒三角形：

$$
\begin{array}{lllllll}
e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & \\
\hline
h_2 & h_1 & h_0 & \color{red}{h_{-1}} & \color{red}{h_{-2}} & & \Rightarrow (-e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0) x^4 \\
 & h_2 & h_1 & h_0 & \color{red}{h_{-1}} & & \Rightarrow (e_2 h_2 - e_3 h_1 + e_4 h_0) x^3 \\
 & & h_2 & h_1 & h_0 & & \Rightarrow (-e_3 h_2 + e_4 h_1 - e_5 h_0) x^2 \\
 & & & h_2 & h_1 & & \Rightarrow (e_4 h_2 - e_5 h_1) x \\
 & & & & h_2 & & \Rightarrow -e_5 h_2
\end{array}
$$

因此，可令 $h_{-1} = h_{-2} = 0$，則 $n \ge p$ 與 $0 \le n < p$ 時的「後段」，就可以有相同的結構。

註：此處所謂的「後段」，指的是 $\left[\prod_{1 \le i \le p} (x - a_i)\right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} h_j(a_1, a_2, \cdots, a_p) \cdot x^{n-j}\right]$ 乘開的展開式

中， x 的次方小於 p 的項的總和。

例如： $(e_0 x^3 - e_1 x^2 + e_2 x - e_3) \cdot (h_0 x^n + h_1 x^{n-1} + \cdots + h_{n-1} x + h_n)$

$= [(e_0 h_0) x^{n+3} + (e_0 h_1 - e_1 h_0) x^{n+2} + (e_0 h_2 - e_1 h_1 + e_2 h_0) x^{n+1}] + [0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^3]$

$+ [(-e_1 h_n + e_2 h_{n-1} - e_3 h_{n-2}) x^2 + (e_2 h_n - e_3 h_{n-1}) x - e_3 h_n]$ 之中，「後段」為

$[(-e_1 h_n + e_2 h_{n-1} - e_3 h_{n-2}) x^2 + (e_2 h_n - e_3 h_{n-1}) x - e_3 h_n]$ 。

現在考慮當 $0 \le n < p$ 時的一般情形：

注意到 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_p)\cdot\left[\sum_{j=0}^{n} h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]$

$$=[\sum_{j=0}^{p}(-1)^j e_j x^{p-j}]\cdot(\sum_{j=0}^{n} h_j x^{n-j})$$

可由如下方式乘開：

$$\begin{array}{llllllllll}
e_0 & \underline{-e_1} & \cdots\cdots & \underline{(-1)^{n+1}e_{n+1}}\cdots\cdots & \underline{(-1)^{p-n}e_{p-n}}\cdots & \underline{(-1)^j e_j}\cdots & \underline{(-1)^{j+i}e_{j+i}}\cdots & (-1)^{p-1}e_{p-1} & (-1)^p e_p &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
h_0 & & & & x^{n+p} \\
h_1 & h_0 & & & x^{n+p-1} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
h_n & h_{n-1} & \cdots\cdots & h_0 & x^p
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{h_n}\ \ h_{n-1}\cdots h_1\ \ \underline{h_0}\ \ h_{-1}\ \ h_{-2}\ \ \cdots\cdots\ \ h_{-(p-n-2)}\ \ h_{-(p-n-1)}\ \ x^{p-1} \\
\quad h_n\ \ h_{n-1}\cdots h_1\ \ h_0\ \ h_{-1}\ \ \cdots\cdots\ \ h_{-(p-n-3)}\ \ h_{-(p-n-2)}\ \ x^{p-2} \\
\qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\
\qquad\qquad h_n\ \ h_{n-1}\ \ \cdots\cdots\ \ h_0\ \ h_{-1}\ \ x^{n+1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{h_n}\ \ h_{n-1}\ \ \cdots\cdots\ \ h_1\ \ h_0\ \ x^n \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{h_n}\ \ h_{n-1}\cdots\cdots \underline{h_{n-i}}\cdots\ \ h_{n-(p-j-1)}\ \ h_{n-(p-j)}\ \ x^{p-j} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad h_n\ \ h_{n-1}\ \ x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h_n\ \ 1
\end{array}$$

在其中令 $h_{-1}=h_{-2}=\cdots=h_{-(p-n-2)}=h_{-(p-n-1)}=0$，

即可得 $[\sum_{j=0}^{p}(-1)^j e_j x^{p-j}]\cdot(\sum_{j=0}^{n} h_j x^{n-j})$

$$=\sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}e_{i}h_{j-i})x^{n+p-j}+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}e_{i}h_{j-i})x^{n+p-j}=[\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}e_{j}x^{p-j}]\cdot(\sum_{j=0}^{n}h_{j}x^{n-j})+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

另一方面，由參考資料[1]，仍然有

$$x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_{i})\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}h_{j}(a_{1},a_{2},\cdots,a_{p})\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p}{a_{j}}^{n+p}\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_{i})}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_{j}-a_{i})}$$

比較係數後，再次得到

$$A_{1}x^{p-1}+\cdots+A_{j}x^{p-j}+\cdots+A_{p}=R_{p}(x)=\sum_{j=1}^{p}{a_{j}}^{n+p}\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_{i})}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_{j}-a_{i})}=\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$$

因此有 $A_{j}=\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i}$ ，其中 $j=1,2,\cdots,p$ 。

(六)　總結

至此，已證明了當 $n\ge p$ 與 $0\le n<p$ 時， $R_{p}(x)$ 的展開式，有著一模一樣的形式。因此，可總結為：

當 $n\ge 0$ 時，設 $R_{p}(x)=\sum_{j=1}^{p}{a_{j}}^{n+p}\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_{i})}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_{j}-a_{i})}=A_{1}x^{p-1}+\cdots+A_{j}x^{p-j}+\cdots+A_{p}$ ，則有

$A_{j}=\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i}$ ，其中 $j=1,2,\cdots,p$ 。

(七)　多項式除法根本定理

回顧「商式定理」(參考資料[1])一文，可知：

設 $p\ge 2$，且 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{p}$ 為 p 個兩兩相異的變數。當 x^{n+p} 除以 $(x-a_{1})(x-a_{2})\cdots(x-a_{p})$ 時，

有 $x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p}a_j^{\,n+p}\cdot\dfrac{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}$ 。

此一事實，說明了當 x^{n+p} 除以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_p)$ 時，所得的商式的係數，恰為 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)$，其中次數 j 由 0 到 n 。

而在本文的工作中，進一步地，得到餘式的展開式：

$\sum_{j=1}^{p}a_j^{\,n+p}\cdot\dfrac{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(x-a_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne j}}(a_j-a_i)}=\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$ ，因此有

$x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}$ ，在此式中，

已將 x^{n+p} 除以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_p)$ 所得的商式與餘式，皆用 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 與「基本對稱多項式」$e_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 加以表示，特將此一事實，稱為「**多項式除法根本定理**」。

參、結語：

在現階段的高中數學課程中，「牛頓插值多項式」與「拉格朗日插值多項式」，是求餘式的兩大方法，互相輝映。在參考資料[4][5][6]中，已有關於牛頓插值多項式的係數的討論；在本篇文章中，研究拉格朗日插值多項式的展開式係數，最後得到「**多項式除法根本定理**」：設 $n\ge 0$ ， $p\ge 2$ ，且 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 為 p 個兩兩相異的變數，則有

$$x^{n+p}=\left[\prod_{1\le i\le p}(x-a_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}h_j(a_1,a_2,\cdots,a_p)\cdot x^{n-j}\right]+\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=0}^{p-j}(-1)^{j+i-1}e_{j+i}h_{n-i})x^{p-j}\ ,$$

其中 e_{j+i} 代表 $e_{j+i}(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ ， h_{n-i} 代表 $h_{n-i}(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 。

參考資料：

1. 陳建燁。商式定理。**數學傳播季刊，41(4)**，2017。
2. 陳建燁。推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)。**高中數學學科中心電子報，第 114 期**，2016。
3. 陳建燁。對稱多項式的 $e-h$ 恆等式(上)。**高中數學學科中心電子報，第 124 期**，2017。
4. 李維昌。過相異四點至多三次牛頓插值多項式的公式解法。**龍騰數亦優第 31 刊**，P16～23。
5. 葉善雲。插值多項式。**龍騰數亦優第 13 刊**，P17～22。
6. 陳建燁。牛頓插值多項式的係數。**高中數學學科中心電子報，第 120 期**，2017。

附錄：

前段：

$$e_0 \quad -e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad \underline{(-1)^i e_i} \quad \ldots (-1)^j e_j \quad \ldots \quad (-1)^{p-1} e_{p-1} \quad (-1)^p e_p$$

$$\begin{array}{lllllllll}
h_0 & & & & & & & & \Rightarrow (e_0 h_0) x^{n+p} \\
h_1 & h_0 & & & & & & & \Rightarrow (e_0 h_1 - e_1 h_0) x^{n+p-1} \\
h_2 & h_1 & h_0 & & & & & & \Rightarrow (e_0 h_2 - e_1 h_1 + e_2 h_0) x^{n+p-2} \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
h_j & h_{j-1} & h_{j-2} & \cdots & \underline{h_{j-i}} & \cdots & h_0 & & \Rightarrow (\sum_{i=0}^{j} (-1)^i e_i h_{j-i}) x^{n+p-j} \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
h_{p-1} & h_{p-2} & h_{p-3} & \cdots & \underline{h_{p-1-i}} & \cdots & \cdots & \cdots \quad h_0 & \Rightarrow (e_0 h_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} e_{p-1}) x^{n+1}
\end{array}$$

中段：

$$e_0 \quad -e_1 \quad \ldots \quad \underline{(-1)^i e_i} \quad \ldots \quad (-1)^j e_j \quad \ldots \quad (-1)^{p-1} e_{p-1} \quad (-1)^p e_p$$

$$\begin{array}{lllllllll}
h_p & h_{p-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_1 & h_0 & \Rightarrow (e_0 h_p + \cdots + (-1)^p e_p h_0) x^n \\
h_{p+1} & h_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_2 & h_1 & \Rightarrow (e_0 h_{p+1} + \cdots + (-1)^p e_p h_1) x^{n-1} \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
h_{p+j} & h_{p+j-1} & \cdots & \underline{h_{p+j-i}} & h_p & \cdots & h_{j+1} & h_j & \Rightarrow (\sum_{i=0}^{p} (-1)^i e_i h_{p+j-i}) x^{n-j} \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
h_n & h_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{n-p+1} & h_{n-p} & \Rightarrow (e_0 h_n + \cdots + (-1)^p e_p h_{n-p}) x^p
\end{array}$$

後段：

$$e_0 \quad -e_1 \quad e_2 \ \cdots \ (-1)^j e_j \ \cdots \underline{(-1)^{j+i} e_{j+i}} \cdots (-1)^{p-1} e_{p-1} \quad (-1)^p e_p$$

$$\begin{array}{l}
h_n \quad h_{n-1} \ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad h_{n-p+2} \quad h_{n-p+1} \Rightarrow (-e_1 h_n + \cdots + (-1)^p e_p h_{n-p+1}) x^{p-1} \\
\quad h_n \ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad h_{n-p+3} \quad h_{n-p+2} \Rightarrow (e_2 h_n + \cdots + (-1)^p e_p h_{n-p+2}) x^{p-2} \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad h_n \quad \cdots \quad \underline{h_{n-i}} \quad \cdots \quad h_{n-(p-j-1)} \quad h_{n-(p-j)} \quad \Rightarrow (\sum_{i=0}^{p-j} (-1)^{j+i} e_{j+i} h_{n-i}) x^{p-j} \\
\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad h_n \quad h_{n-1} \quad \Rightarrow ((-1)^{p-1} e_{p-1} h_n + (-1)^p e_p h_{n-1}) x \\
\qquad\qquad\qquad\quad h_n \quad \Rightarrow (-1)^P e_p h_n
\end{array}$$