中學生通訊解題第 109-110 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10901

若正整數 n 的除了 n 本身以外所有正因數的和為 $s(n)$

例如：

$s(8)=1+2+4=7$, $s(10)=1+2+5=8$,
$s(20)=1+2+4+5+10=22$ 。,

如果 $s(n)>n$ ，我們可以稱 n 為**超因數**，例如 20 為超因數，但 8 與 10 不是。

(1) 試問最小的超因數為何？

(2) 求證當 $n=pq$ 時，n 不為**超因數**。（這裡的 p,q 為不相等的質數）

(3) 試證明：如果 m 為超因數且 p 是質數，並且 p 不是 m 的公因數時，$s(pm)>(2+p)m$ 成立。

簡答：(1) 12　(2)略　(3)略

參考解答：

(1) 最小的超因數為 12
($\because s(12)=1+2+3+4+6=16$)。

(2) 由於 p,q 為不相等的質數，所以 $n=pq$ 這個數必有 $1,p,q$
不失其一般性 我們可假設 $p<q$ 且
可得 $p\geq 2,q\geq 3$
又 $n=pq\geq q+q\geq 1+p+q$
所以 $s(pq)\leq pq$
故得證 n 不為超因數，另外可以利用

$$pq-s(pq)=pq-p-q-1$$
$$=(p-1)(q-1)-2\geq 0$$

(3) 如果 m 所有正因數 $1,m_1,m_2\cdots m_k$ 和 m
則 $s(m)=1+m_1+m_2\cdots+m_k$ 並且 m 為超因數
所以 $1+m_1+m_2\cdots+m_k>m$ 。
可得 pm,m 這兩數有相同的因數且 $s(pm)>(2+p)m$ 。
且 pm 還有其他的正因數為 $p,pm_1,pm_2\cdots,pm_k$ 和 m
（因為 p 為質數且不是 m 的因數，因此上述這些都是新的正因數）
故綜合上述結果可得

$$\begin{aligned}s(pm)&=1+m_1+m_2+\cdots+m_k+p\\&+pm_1+pm_2+\cdots pm_k+m\\&=(1+p)(1+m_1+m_2+m_3+\cdots m_k)\\&+m>(1+p)m+m>(2+p)m\end{aligned}$$

得證。

【解題評析】

本題屬於難度較高的數論問題，同學不只要能計算出正確的數值，更需要透過對於因數性質的掌握及瞭解，並利用數學符號完整表達論證推理的過程。本題徵答人數共有 15 人，其中僅有 3 位獲 7 分滿

分，其餘未獲滿分同學主要是書寫方式與表達不完整，或者是在計算中忘記考慮某些條件導致錯誤推論。整體而言參與徵答學生的數學論證與思考表達方法，均有待數學老師在課堂教學時給予適切的指導，以有效提升同學數學論證的素養。

問題編號

10902

已知 x 的方程式

$$(a^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-(2a+7)\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=0$$

有實數根。求實數 a 的取值範圍？

簡答： $a\geq-\frac{53}{28}$

參考解答：

設 $\frac{x}{x-1}=t$ ，則 $t\neq1$。原方程式可化為 $(a^2-1)t^2-(2a+7)t+1=0$ 。

當 $a^2-1=0$ ，即 $a=\pm1$ 時，方程式為 $-9t+1=0$ 或 $-5t+1=0$ ，即 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{9}$ 或 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{5}$，解得 $x=-\frac{1}{8}$ 或 $x=-\frac{1}{4}$ 。

故當 $a=\pm1$ 時，原方程有實數根。

當 $a\neq\pm1$ 時，則當 $\Delta\geq0$ 時，原方程式有實數根。由

$\Delta=\left[-(2a+7)\right]^2-4\left(a^2-1\right)\geq0$，解得

$a\geq-\frac{53}{28}$ 。

綜上所知，當 $a\geq-\frac{53}{28}$ 時，原方程式有實數根。

【解題評析】

1. 本題徵答人數共 11 人，全部答對得滿分 7 分者只有 1 人，是臺中市衛道國中高暐竣同學。
2. 因為當 $a^2-1=0$ 時，非二次方程式，無判別式公式的情況，故需要另外討論。但大多數同學直接使用二次方程式的判別式公式，即將 a 的範圍作為最後答案，其論述過程中未討論 $a^2-1=0$ 的情形，雖然答案正確但論證有所疏漏，而獲得部分分數。

問題編號

10903

設 I 是 $\triangle ABC$ 內部一點，且滿足

$\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\angle AIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ABC$，證明：$I$ 是 $\triangle ABC$ 的內心。

詳解：

[方法 1]

作 $\triangle ABC$ 的外接圓 Γ，並延長 $\overrightarrow{AI}$ 交 Γ 於點 D。

在 $\triangle BDI$ 中，

$\angle BDI = \angle ACB$（同弧所對的圓周角相等)，且

$\angle BID = 180° - \angle AIB = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle ACB)$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle ACB)$，

則 $\angle DBI = 180° - \angle BDI - \angle BID$

$= 180° - \angle ACB - (90° + \frac{1}{2}\angle ACB)$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$

可知 $\angle BID = \angle DBI$，

則 $\overline{DB} = \overline{DI}$ ……..(1)。

在 $\triangle CDI$ 中，

$\angle CDI = \angle ABC$（同弧所對的圓周角相等)，

且 $\angle CID = 180° - \angle AIC$

$= 180° - (90° + \frac{1}{2}\angle ABC) = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$

，則 $\angle CID = 180° - \angle CDI - \angle CID$

$= 180° - \angle ABC - (90° + \frac{1}{2}\angle ABC)$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$，

可知 $\angle CID = \angle DCI$，

則 $\overline{DC} = \overline{DI}$ ……..(2)。

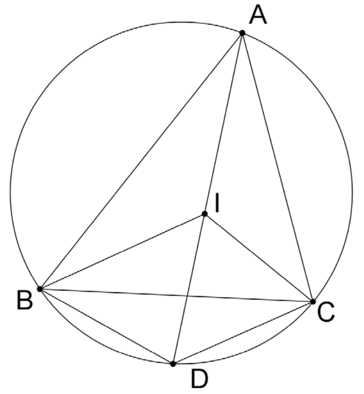
由(1)、(2)可知 $\overline{DB} = \overline{DC}$，則

$\angle DAB = \angle DAC$（同弦長所對的圓周角相等)，即 $\overline{AI}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線。又

$\angle BIC = 360° - \angle AIB - \angle AID$

$= 360° - (90° + \frac{1}{2}\angle ABC) - (90° \frac{1}{2}\angle ABC)$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$，仿上述討論也可知 $\overline{BI}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，所以 I 是 $\triangle ABC$ 的內心。



[方法 2]

設 I' 是 $\triangle ABC$ 的內心，且 $I \neq I'$，在 $\triangle AI'B$ 中，

$\angle AI'B = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle BAC$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$

$= \angle AIB$，故 A, I, I', B 四點共圓。

在 $\triangle AI'C$ 中，

$\angle AI'C = 180° - \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle BAC$

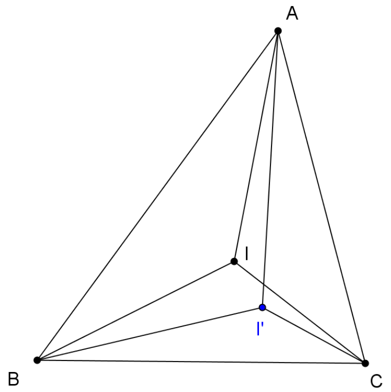
$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$

$= \angle AIC$，

故 A,I,I',C 四點共圓。

因 A,I,I' 三點可以確定一個圓，故 B,C 都在圓上，換句話說 A,I,I',B,C 五點共圓，也就是說 I,I' 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，顯然矛盾！

由反證法知 $I=I'$，即 I 是 $\triangle ABC$ 的內心。



【解題評析】

現在國中練習寫證明題的機會已經不多了，老師對於同學能夠提起勇氣挑戰此題給予肯定及鼓勵！不過有些同學還是犯了某些錯誤，例如：

(1) 倒因為果，把結論當成條件來使用。
(2) 訓練不足，推理過程不夠細膩嚴謹。
(3) 跳躍性思考，還沒推理到某個推論卻把不確定的推論拿來使用。

其中高暐竣同學整體而言已經抓到核心重點，但是犯了細部的邏輯錯誤，差一點就能滿分，相當可惜！而凃皓雲同學的證明無可挑剔，相當值得嘉許！

問題編號
1094

一對主人夫婦，邀請五對夫婦來吃飯，除了不跟自己的另一半握手外，每個人都與若干個人握手（可能不握），若除了女主人之外的十一個人，與之握手的人數都不相同，請問女主人與多少個人握手？

簡答：女主人共握了 5 次手

參考解答：

令主人夫婦的握手數是(H1, H0)，而五對客人的握手數分別為(A1, A0), (B1, B0), (C1,C0), (D1, D0), (E1, E0)

每個人可能的握手數為 0, 1, 2, ..., 10，

所以除了女主人的十一個人的握手數剛好就是 0, 1, 2, ..., 10，

考慮握最多的人，不妨設 E1=10，如此一來，除 E0 外，不可能有人是 0，所以 E0=0

把此對夫婦拿掉，則其它人每個人握手數都少一(含女主人)，

所以除了女主人的九個人的握手數剛好就是 0, 1, 2, ..., 8，

同樣的方法，再拿掉一對夫婦，則其它人每個人握手數都少一，

如此，除了女主人的七個人的握手數剛好就是 0, 1, 2, ..., 6，

一直用相同的手法，直到把最後一對客人夫婦拿掉，女主人共少了 5 次，故女主人共握了 5 次手。

【解題評析】

這樣的題目主要的方法是邏輯的推導，利用極端值出發，針對最大值或最小值的討論，逐一完整的推出可能情形，大部分同學夠細心，都可以完整作答，值得嘉獎，但有些許的同學只把一種情形寫出，並沒有說明，這無法保證這是否是唯一的情形。另外，希望同學除了完整回答這個問題之外，也可以想想，如果推廣到 100 對夫婦會怎樣，或 對夫婦會怎樣？

問題編號
10905

設$f(x)=ax^2+bx+c$是整係數多項式，其中a是正整數。若方程式$f(x)=0$有兩個相異實根，而此兩根都大於1且都小於2，(1)求正整數a的最小值；(2)並找出a最小時的$f(x)$。

簡答：(1) 5；(2) $f(x)=5x^2-15x+11$。

詳解：

設 α、β 是 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 的兩個根，$1<\alpha<\beta<2$，a,b,c 都是整數，$a>0$，

則 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，得

$f(1)=a+b+c=a(1-\alpha)(1-\beta)$，$f(2)=4a+2b+c=a(2-\alpha)(2-\beta)$

都是正整數，故

$1\leq f(1)f(2)=a^2(1-\alpha)(1-\beta)(2-\alpha)(2-\beta)=a^2[(\alpha-1)(2-\alpha)][(\beta-1)(2-\beta)]$。

$\because(\alpha-1)(2-\alpha)=-\alpha^2+3\alpha-2$

$=-(\alpha-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$，同理，

$\beta-1)(2-\beta)\leq\frac{1}{4}$，

$\therefore[(\alpha-1)(2-\alpha)][(\beta-1)(2-\beta)]\leq\frac{1}{16}$，等號於 $\alpha=\beta=\frac{3}{2}$時成立，但 $\alpha<\beta$，而有

$a^2[(\alpha-1)(2-\alpha)][(\beta-1)(2-\beta)]<\frac{a^2}{16}$，得 $1<\frac{a^2}{16}$，正整數 a 的最小值可能是 5。

若 $a=5$，則 $\alpha+\beta=-\frac{b}{5}$，$\alpha\beta=\frac{c}{5}$，

而 $1<\alpha<\beta<2$，故 $2<-\frac{b}{5}<4$，$b^2-20c>0$，

$\because f(1)=5+b+c$、$f(2)=20+2b+c$、$-b$、c 都是正整數，

$\therefore c\geq-4-b$，$c\geq-19-2b$，$11\leq-b\leq19$，$b^2>20c$，得

$b^2>-80-20b$，$b^2>-380-40b$，整理為 $(b+10)^2>20$，$(b+20)^2>20$，

解得 $b=-15$，$c=11$。

綜合以上所述，可知

(1)正整數 a 的最小值為 5；(2) a 最小時，$f(x)=5x^2-15x+11$。

【解題評析】

本題以上解法，主要應用了一元二次方程式根之性質(韋達定理)與二次函數之求極值(配方法)，完全是代數方法，解題概念相當的基本，解題設計則利用了一點

巧思。同學之答題，關於數值 a，大多以窮舉法檢視，幸好 a 之最小值不大，總算能有所得，但從數學研究之觀點來看，還是先設法找出 a 之範圍為宜。

當然，本題之求解也可以引用幾何方法，幫助釐清思路。依題意，在坐標平面上，拋物線 $y = ax^2+bx+c$ 上之 $A(1, a+b+c)$、$B(2, 4a+2b+c)$兩點都是第一象限內的格子點，而其極小點則在第四象限內，即 $b^2-4ac>0$，如此，也可找到整數 a,b,c 間之關係。應答同學中有三位應用了類此之幾何圖解，只是相關的討論與說明還有待精進。

問題編號
11001

三個互異正整數 a,b,c 構成等比數列，已知 $a<b<c$ ，且 $a+b+c=91$，試求序組 (a,b,c)。

簡答：

$(a,b,c)=(25,30,36),(1,9,81),(7,21,63),(13,26,52)$

詳解：

設數列 a,b,c 之公比為 q ，因為 $a<b<c$，所以 $q>1$，

則 $b=aq, c=aq^2, q=\dfrac{b}{a}$ 為有理數，將其化為最簡分數，

令 $q=\dfrac{n}{m}\left(m<n,且m,n互質\right)$，

由 $c=aq^2=a\left(\dfrac{n^2}{m^2}\right)$為正整數，可得 m^2 為 a 的因數，

令 $a=km^2,(k$ 為正整數)，

則 $b=kmn, c=kn^2$ ，

此時 $91=1\times 91=7\times 13=a+b+c$

$=k\left(m^2+mn+n^2\right)$， $m<n,且m,n互質$

(1) $k=1$ 時， $m^2+mn+n^2=91$ ，則 $n\le 9$，可得 $(m,n)=(5,6),(1,9)$，則序組 $(a,b,c)=(25,30,36),(1,9,81)$

(2) $k=7$ 時， $m^2+mn+n^2=13$ ，則 $n\le 3$ ，可得 $(m,n)=(1,3)$ ，則序組 $(a,b,c)=(7,21,63)$

(3) $k=13$時，$m^2+mn+n^2=7$ 則 $n\le 2$ ，可得 $(m,n)=(1,2)$，則序組 $(a,b,c)=(13,26,52)$，故序組 $(a,b,c)=(25,30,36),(1,9,81)$，$(7,21,63),(13,26,52)$。

【解題評析】

得 5 分的同學有 39 人，都少算一組

$\left(a,b,c\right)=\left(25,30,36\right)$，此時公比 $\dfrac{6}{5}$，大部分錯在以下的推論：

設數列 a,b,c 之公比為 q，因為 $a<b<c$，所以 $q>1$，

$\Rightarrow\ \ b=aq,c=aq^2$

$\Rightarrow\ \ a+b+c=a\left(1+q+q^2\right)=91$，

$\Rightarrow\ \ 1+q+q^2$ 為 91 的因數　　(錯誤推論)

公比不一定為整數，若以少算的 $\left(a,b,c\right)=\left(25,30,36\right)$ 這組來看，此時

$$a\left(1+q+q^2\right)=25\left[1+\frac{6}{5}+\left(\frac{6}{5}\right)^2\right]=91，$$

但 $1+\dfrac{6}{5}+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{91}{25}$ 不為 91 的因數。

問題編號
11002

設 x,y 為正實數，且滿足 $x+y=xy-3$，求 x^2+y^2 的最小值。

簡答： 18

參考解答：

設 $x+y=z$，則 $xy=z+3$，且 $z>0$，

注意到 x,y 是二次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$ 的兩根，

則 $t^2-zt+z+3=0$，

由判別式可知

$z^2-4(z+3)=z^2-4z-12=(z-6)(z+2)\geq 0$，

因 $z>0$，故 $z+2>0$，即 $z\geq 6$，

$x^2+y^2=(x+y^2)-2xy=z^2-2(z+3)$

$=z^2-2z-6=(z-1)^2-7$，

在 $z\geq 6$ 的前提下，可知 $x^2+y^2=(z-1)^2-7\geq(6-1)^2-7=18$，

所以，當 $z=6$，即 $x=y=3$ 時，有 x^2+y^2 的最小值為18。

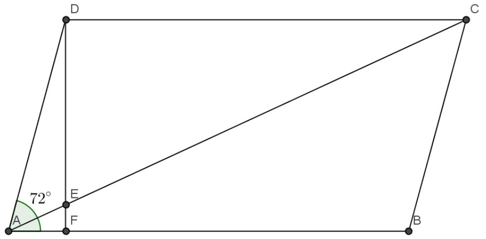
【解題評析】

此題屬於求極值問題。不少同學利用「代入數值湊答案」的方式求得最小值，或許是同學平常比較常寫選擇、填充、選填題，為了快速得分而養成如此的習慣。不過通訊解題被設定為計算、證明題，如果要代入數值湊答案則必須要把「所有可能的情況全部一一代入，代入完之後比較所有的結果」，如此才能肯定最小值為何。利用上述方法雖然也能算出正確答案，但是事實上已經犯了以偏概全的邏輯毛病，僅能得到 1 分。另外一些同學算出 $(x-1)(y-1)=4$，接著利用算幾不等式，但是卻遺漏了 $x-1$ 和 $y-1$ 必須都是正數的前提，沒有進行完整討論只能得到 4 分。

問題編號
11003

如圖，一平行四邊形 $ABCD$，若 $\angle BAD=72^\circ$，$\overline{CE}=2\overline{AD}$ 且 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$，

試求 $\angle CED$。



簡答：$\angle CED = 66°$

詳解：

取 $\overline{CE}$ 的中點為 G，連接 $\overline{DG}$，可得 $\overline{DG} = \overline{CG}$（直角三角形斜邊中點到三頂點等距）

$\because \overline{CE} = 2\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{CG} = \overline{DG}$，可知 $\angle DCG = \angle CDG, \angle AGD = \angle DAG$

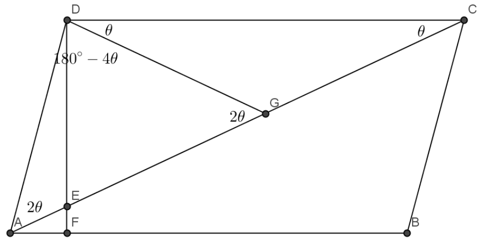
設 $\angle DCG = \theta$，則

$\angle CDG = \theta$, $\angle AGD = \angle DAG = 2\theta$,

$\angle ADG = 180° - 4\theta$

又 $\angle ADC = 108° = (180° - 4\theta) + \theta$，

得 $\theta = 24°$，故 $\angle CED = 66°$。



【解題評析】

書寫計算與證明題如同寫篇論說文，敘事必須條理分明，論理必須理由充分，文字必須通順易讀。

問題編號
11004

設平面上有 25 個點，其中任意三點中都有兩個點的距離小於 1。

證明：存在一個半徑為 1 的圓紙片至少能蓋住其中的 13 個點。

詳解：

在 25 個點中，任選一點 O，先將圓紙片的圓心置於 O。

我們分兩個情形來證明。

Case1：若圓紙片內含 13 個點，則命題成立。

Case2：若圓紙片內至多含 12 個點，則圓紙片外至少有 13 個點，其中 13 個點為 $x_1, x_2, \cdots, x_{13}$。

由於 $d(O,x_1) > 1$ 且 $d(O,x_2) > 1$，故由命題的條件可得 $d(x_1,x_2) < 1$。

由於 $d(O,x_1) > 1$ 且 $d(O,x_3) > 1$，故由命題的條件可得 $d(x_1,x_3) < 1$。

同理可得 $d(x_1,x_4) < 1$、$\cdots$、$d(x_1,x_{13}) < 1$。

因此，若圓紙片以 x_1 為圓心，則此圓紙片會至少會包含 $x_1, x_2, \cdots, x_{13}$。

所以，此時命題亦成立。

【解題評析】

1. 從題目中應該可以猜測需要使用鴿籠原理，但是需要將論證的過程敘述清楚，一部分同學考慮將這些點「分群」，將任意距離不超過 1 的點當成一

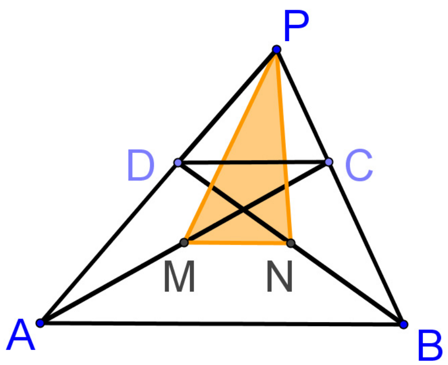
群，並說明不可能有三群，再利用鴿籠原理即可證明原命題成立，可惜的是在不能有三群的證明有瑕疵。

2. 這類的問題，需要敘述的部分比較多，希望同學在答題紙上能將過程說明清楚。

問題編號
11005

四邊形 $ABCD$ 中，M,N 分別是對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 的中點，又 $\overline{AD},\overline{BC}$ 的延長線交於 P 點，求證：ΔPMN 的面積為四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，即 $S_{\Delta PMN}=\frac{1}{4}S_{四邊形ABCD}$。

簡答：甲有必勝策略。



詳解：

[方法 1]

利用三角形的中線性質，設法將 ΔPMN 等積變換轉移到四邊形 $ABCD$ 內部，再證明之。

如圖，取 $\overline{CD}$ 的中點 Q，連接

$\overline{PQ},\overline{QM},\overline{QN},\overline{DM},\overline{CN}$，

則 $\overline{QM}//\overline{AP},\overline{QN}//\overline{BP}$，

由同底等高可得，

$S_{\Delta DMQ}=S_{\Delta PMQ},S_{\Delta CQN}=S_{\Delta PQN}$，所以，

$$\begin{aligned}S_{\Delta PMN}&=S_{\Delta PMQ}+S_{\Delta PQN}+S_{\Delta MNQ}\\&=S_{\Delta DMQ}+S_{\Delta CQN}+S_{\Delta MNQ}\\&=S_{四邊形DMNC}\cdots(1)\end{aligned},$$

連接，$\overline{MB}$，有

$S_{\Delta DMN}=\frac{1}{2}S_{\Delta DMB},S_{\Delta DNC}=\frac{1}{2}S_{\Delta DBC}$，所以，

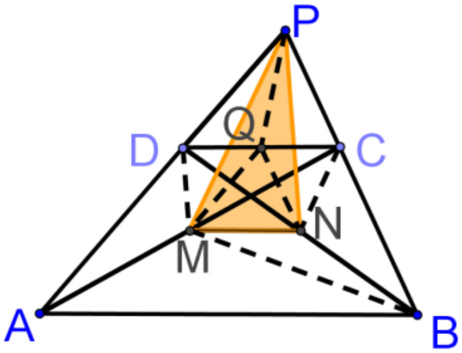
$$\begin{aligned}S_{四邊形DMNC}&=S_{\Delta DMN}+S_{\Delta DNC}\\&=\frac{1}{2}S_{\Delta DMB}+\frac{1}{2}S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}S_{四邊形DMBC}\cdots(2)\end{aligned},$$

又 $S_{\Delta CDM}=\frac{1}{2}S_{\Delta CDA},S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}S_{\Delta BCA}$，

所以，

$$\begin{aligned}S_{四邊形DMBC}&=S_{\Delta CDM}+S_{\Delta BCM}\\&=\frac{1}{2}S_{\Delta CDA}+\frac{1}{2}S_{\Delta BCA}=\frac{1}{2}S_{四邊形ABCD}\cdots(3)\end{aligned}$$

由(1),(2),(3)知，$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{4}S_{四邊形ABCD}$。



[方法 2]

連接 $\overline{DM},\overline{BM}$ ，由 M,N 分別是 $\overline{AC},\overline{BD}$ 的中點，可得

$$S_{\Delta BMP}=\frac{1}{2}S_{\Delta BAP},S_{\Delta BNP}=\frac{1}{2}S_{\Delta BDP},S_{\Delta BNM}=\frac{1}{2}S_{\Delta BDM}，$$

所以，

$$\begin{aligned}S_{\Delta PMN}&=S_{\Delta BMP}-S_{\Delta BNP}-S_{\Delta BNM}\\&=\frac{1}{2}S_{\Delta BAP}-\frac{1}{2}S_{\Delta BDP}-\frac{1}{2}S_{\Delta BDM}\\&=\frac{1}{2}\left(S_{\Delta AMD}+S_{\Delta AMB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{\Delta ACD}+\frac{1}{2}S_{\Delta ACB}\right)=\frac{1}{4}S_{\text{四邊形}ABCD}\end{aligned}，$$

因此， $S_{\Delta PMN}=\frac{1}{4}S_{\text{四邊形}ABCD}$ 。

【解題評析】

所有同學們的幾何敘述與論證都說明的很詳盡清楚，證明方法也各有巧思，值得鼓勵。