已知 $a_i \in N$， $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \cdots \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$ ，不定方程 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$ 正整數解的探討

李輝濱

嘉義市輔仁中學退休教師

壹、前言

這是一則自然數數論範疇的等式命題：一序列漸增自然數的總和恰等於它們的連乘積。以數學語言來描述即為； 已知任一 $a_i \in N$（自然數）， $1 \le i \le n$ ， $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \cdots \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$ ，且滿足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$ ，此處等式命題中的符號： $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$ 表示 n 個自然數 a_i 的連乘積，現在將其縮寫成 $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n$ 的表示式，在以下全文整體演繹推理敘述過程中都會引用這樣的縮寫表示式。

現在請觀察下述初步開始尋求這等式命題有序數對解的演算思維過程，首先依序規劃由 $n=1$ 至 $n=5$ 嚴謹逐次推理試算起；

1) 當 $n=1$， $a_1 = a_1$ ，這是必然。任意正整數都是它的解。

2) 當 $n=2$， $a_1 + a_2 = a_1 \times a_2$ ，由這等式方程式的對稱性，可設定 $a_1 \le a_2$ ，則

$a_1 + a_2 = a_1 \times a_2 \le 2a_2 \Rightarrow a_1 \le 2$ 得 $a_1 = 1$ 或 2 ；

(i) 當 $a_1 = 1$ 代入等式，得 $1 + a_2 = a_2$ ，此為矛盾。故 $a_1 \ne 1$ 。

(ii 取 $a_1 = 2$ 代入等式，得 $2 + a_2 = 2a_2$ ，化簡，得 $a_2 = 2$ ；因此有序數對 $(a_1, a_2) =$ (2,2) 為其唯一正整數解。且 $2+2=2\times 2=4$。

3) 當 $n=3$， $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 = a_1 a_2 a_3$ ，同樣地，可設定 $a_1 \le a_2 \le a_3$ ，則

$$a_1 = a_1 a_2 a_3 - a_2 - a_3 = a_3(a_1 a_2 - 1) - a_2 = a_3(a_1 a_2 - 1) - \frac{1}{a_1}(a_1 a_2 - 1) - \frac{1}{a_1}$$

$$\Rightarrow a_1 + \frac{1}{a_1} = a_3(a_1 a_2 - 1) - \frac{1}{a_1}(a_1 a_2 - 1) = (a_1 a_2 - 1)(a_3 - \frac{1}{a_1})$$

$\Rightarrow\ a_1^{\ 2}+1=(a_1a_2-1)(a_1a_3-1)$ .... (T)

因 $a_1 \le a_2 \le a_3 \Rightarrow a_1^{\ 2} \le a_1a_2 \le a_1a_3 \Rightarrow a_1^{\ 2}-1 \le a_1a_2-1 \le a_1a_3-1$，

故 $(a_1^{\ 2}-1)^2 \le (a_1a_2-1)(a_1a_3-1)=a_1^{\ 2}+1 \Rightarrow a_1^{\ 4}-2a_1^{\ 2}+1 \le a_1^{\ 2}+1$

$\Rightarrow\ a_1^{\ 4}-3a_1^{\ 2} \le 0 \Rightarrow a_1^{\ 2}-3 \le 0 \Rightarrow a_1^{\ 2} \le 3$，得 $a_1=1$ 代入 (T)式，得

$2=1\times 2=(a_2-1)(a_3-1) \Rightarrow a_2-1=1$ 且 $a_3-1=2 \Rightarrow a_2=2$ 且 $a_3=3$，

綜合上述運算分析，可知有序數對（a_1, a_2, a_3)=(1,2,3) 為其唯一正整數解。同時也得到 n=3 時，1+2+3 =$1\times 2\times 3$= 6 為等式運算的值。

4) 當 n=4，$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1a_2a_3a_4$(表示四個正整數的連乘積)，同樣地，由比較分析前述 2).與 3).節的運算過程及結果，可設定 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$；先從 $a_1=1$分析起，隨後再看 $a_1 \ge 2$的情形；

(4a) 首先探討 $a_1=1$ 的情形；

由 $1+a_2+a_3+a_4=a_2a_3a_4$，則 $1+a_2=a_2a_3a_4-a_4-a_3=a_4(a_2a_3-1)-a_3$

$\Rightarrow\ a_2+a_2^{\ 2}=a_2a_4(a_2a_3-1)-a_2a_3 \Rightarrow 1+a_2+a_2^{\ 2}$

$=a_2a_4(a_2a_3-1)-a_2a_3+1 \Rightarrow 1+a_2+a_2^{\ 2}=(a_2a_3-1)(a_2a_4-1)$ ...... (F-1)

由 $a_2 \le a_3 \le a_4 \Rightarrow a_2^{\ 2} \le a_2a_3 \le a_2a_4 \Rightarrow a_2^{\ 2}-1 \le a_2a_3-1 \le a_2a_4-1$，

故 $(a_2^{\ 2}-1)^2 \le (a_2a_3-1)(a_2a_4-1)=1+a_2+a_2^{\ 2}$

$\Rightarrow\ 1-2a_2^{\ 2}+a_2^{\ 4} \le 1+a_2+a_2^{\ 2}$

得 $-a_2-3a_2^{\ 2}+a_2^{\ 4} \le 0 \Rightarrow -1-3a_2+a_2^{\ 3} \le 0 \Rightarrow 2-3a_2+a_2^{\ 3} \le 3 \Rightarrow$

得不等式： $(a_2-1)^2(a_2+2) \le 3$ .... (F-2)

取 $a_2=1$ 符合不等式(F-2)，而取 $a_2 \ge 2$ 則不合，故 $a_1=a_2=1$ 。

將 $a_1=a_2=1$ 代入(F-1)式，得 $3=(a_3-1)(a_4-1) \Rightarrow a_3-1=1$ 且 $a_4-1=3$

$\Rightarrow\ a_3=2$ 且 $a_4=4$，因此（a_1, a_2, a_3, a_4)= (1,1,2,4) 為其唯一正整數解。

同時也得到 $n=4$ 時，$1+1+2+4=1\times1\times2\times4=8$ 為等式的運算值。

(4b) 其次討論分析 $a_1 \ge 2$ 的情形； 當 $2 \le m = a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$，

由 $m + a_2 + a_3 + a_4 = ma_2 a_3 a_4 \Rightarrow m + a_2 = ma_2 a_3 a_4 - a_3 - a_4$ $\Rightarrow$等號兩側同

乘以 ma_2 再同加 1，得 $ma_2(\mathrm{m} + a_2)+1 = m^2 a_2^2 a_3 a_4 - ma_2 a_3 - ma_2 a_4 + 1$

$= (\mathrm{m}\, a_2 a_3 - 1)(\mathrm{m}\, a_2 a_4 - 1) \ge (\mathrm{m}\, a_2^2 - 1)^2$，繼續化簡 $\Rightarrow m + a_2 \ge m\, a_2^3 - 2a_2$

$\Rightarrow m \ge a_2(m\, a_2^2 - 3)$，因 $2 \le m = a_1 \le a_2 \Rightarrow$ $m\, a_2^2 - 3 > 1$ 且 $m \le a_2$，

得知此時 $m \ge a_2(m\, a_2^2 - 3)$ 必為矛盾！故當 $a_1 \ge 2$ 時，不存在解。

(4c) 因此綜合上述分析，在 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ 條件下 $a_1 \ge 2$ 的情形不會存在！只有在 $a_1 = 1$ 的情形，$1+1+2+4=1\times1\times2\times4=8$ 的正整數值才能唯一存在。而其自然數有序數對解為 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1,1,2,4)$。

5) 當 $n=5$，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$，仿照步驟 4).先探討不存在的下述幾種情形;

(5a) 首先探討 $a_1 = 1 < 2 \le a_2 = m \le a_3 \le a_4 \le a_5$ 的情形；

由 $1 + m + a_3 + a_4 + a_5 = ma_3 a_4 a_5 \Rightarrow 1 + m + a_3 = ma_3 a_4 a_5 - a_4 - a_5$

$\Rightarrow ma_3(1 + m + a_3) = ma_3 a_5(ma_3 a_4 - 1) - ma_3 a_4 + 1 - 1$

$\Rightarrow ma_3(1 + m + a_3) + 1 = (ma_3 a_4 - 1)(ma_3 a_5 - 1) \ge (ma_3^2 - 1)^2$

$\Rightarrow 1 + m + a_3 \ge m\, a_3^3 - 2a_3 \Rightarrow 0 \ge m\, a_3^3 - 3a_3 - (1 + m)$.............(G-1)

取 $a_3 = m$ (最小值) 帶入(G-1)式，得 $0 \ge m^4 - 4m - 1$........................(G-2)

但因 $m \ge 2$，$m^2 \ge 4 \Rightarrow m^3 \ge 4m \Rightarrow m^3 + 1 \ge 4m + 1 \Rightarrow$ 再由
$m^4 \ge 2m^3 = m^3 + m^3 > m^3 + 1 \ge 4m + 1 \Rightarrow m^4 - 4m - 1 > 0$.............(G-3)
這(G-3)式結果與不等式(G-2)式完全不符，故此條件情形必不存在。

(5b) 其次探討 $2 \le m = a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ 的情形；

由$m + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = m\, a_2\, a_3\, a_4 a_5 \;\Rightarrow\; m + a_2 + a_3 = ma_2 a_3\, a_4 a_5 - a_4 - a_5$

$\Rightarrow ma_2a_3(m + a_2 + a_3) + 1 = (ma_2a_3\, a_4 - 1)(ma_2a_3\, a_5 - 1) \ge (ma_2a_3^{\,2} - 1)^2 \Rightarrow$

$m + a_2 + a_3 \ge ma_2\, a_3^{\,3} - 2\, a_3 \Rightarrow m \ge a_3(m\, a_2a_3^{\,2} - 3) - a_2 \ge a_3(m\, a_2^{\,3} - 3) - a_2$

$\ge a_2(m\, a_2^{\,3} - 3) - a_2 = a_2(m\, a_2^{\,3} - 4) \Rightarrow m \ge a_2(m\, a_2^{\,3} - 4)$.................(G-4)

因$2 \le m = a_1 \le a_2 \Rightarrow m\, a_2^{\,3} - 4 \ge 12$ 且$m \le a_2$，則$a_2(m\, a_2^{\,3} - 4) \ge 12\, m$

得知此時(G-4)之$m \ge a_2(m\, a_2^{\,3} - 4)$ 必為矛盾！故當 $a_1 \ge 2$ 時，不存在解。

(5c) 根據上述推理結果可知$a_1 \ge 2$及$a_1 = 1 < 2 \le a_2$ 的情形皆必不存在。所以，
當n=5，即可設定$a_1 = 1 = a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$，則原等式命題變成：
$1 + 1 + a_3 + a_4 + a_5 = a_3a_4a_5 \Rightarrow$
$2 + a_3 = a_3a_4a_5 - a_4 - a_5 = a_5(a_3a_4 - 1) - a_4 \Rightarrow$

$2a_3 + a_3^{\,2} = a_3a_5(a_3a_4 - 1) - a_3a_4$

$\Rightarrow 1 + 2a_3 + a_3^{\,2} = (a_3a_4 - 1)(a_3a_5 - 1)$ ....(V)

同理，$1 + 2a_3 + a_3^{\,2} = (a_3a_4 - 1)(a_3a_5 - 1) \ge (a_3^{\,2} - 1)^2 \;\Rightarrow\; 0 \ge a_3^{\,3} - 3a_3 - 2$

$\Rightarrow\; 0 \ge (a_3 + 1)^2(a_3 - 2)$，得 $a_3 \le 2$，

(a) 先取 $a_3 = 1$。
將$a_3 = 1$代入(V)式，得
(i) $4 = (a_4 - 1)(a_5 - 1) \;\Rightarrow 1 = a_4 - 1$ 且 $4 = a_5 - 1 \Rightarrow a_4 = 2$ 且 $a_5 = 5$。
(ii) $4 = 2 \times 2 = (a_4 - 1)(a_5 - 1) \;\Rightarrow\; a_4 = 3$ 且 $a_5 = 3$。
(b) 再取 $a_3 = 2$。將$a_3 = 2$代入(V)式，得$9 = (2a_4 - 1)(2a_5 - 1) = 1 \times 9 = 3 \times 3$
(i) $(2a_4 - 1) = 1$且 $(2a_5 - 1) = 9 \Rightarrow a_4 = 1$ 且$a_5 = 5$。但$a_4 = 1 < a_3 = 2$，不合。
(ii) $(2a_4 - 1) = (2a_5 - 1) = 3 \;\Rightarrow a_4 = 2 = a_5 = a_3$。

(5d) 綜合上述的完整分析，即當 $n=5$，恰有 3 種相異組合。因此得等式命題；

(i) 1+1+1+2+5 $=1\times1\times1\times2\times5=10$ 與 (ii). 1+1+1+3+3 $=1\times1\times1\times3\times3=9$ 及

(iii) 1+1+2+2+2$=1\times1\times2\times2\times2=8$ 的 3 組相異正整數值存在。而有 3 組相異的自然數有序數對解為 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,1,1,2,5)$, $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,1,1,3,3)$, $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,1,2,2,2)$。

從上述自 $n=2$ 至 $n=5$ 推理試算歷程中，隱然可見到有序數對解中數字元素 1 出現的個數愈來愈多；而伴隨著 n 值增大，元素數字及位置也呈現更趨規律性。以下正文敘述即翔實印證解集合的一致規律性特徵,請延續充分閱讀並親自經歷演算以理解本文完整文意的實質內涵。

貳、本文

已知任一 $a_i \in N$，$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \cdots \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$，且滿足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$，試找出這等式命題中所有 a_i 的自然數元素有序數對排列成的解？

接著持續自 $n=6$ 至 $n=50$ 實際依序再逐次詳明計算以尋求滿足這等式命題有序數對解的元素排列內容，再觀察比對各解的元素內涵結構，就元素數字與元素位置出現的相對排列關係進行對照分析，最後將全體歸納出前後連續的每一個有序數對解之間所共同持守的規律秩序特質。以下敘述內文是將運算完成的所有資料數據統整並發掘出多項共同一致規律法則的探討演算過程與結果。

一、分析彙整並歸納出解集合的共同規律秩序性質：

由觀察比對所有詳盡的計算結果數據資料中，發現到這等式命題的自然數有序數對解內容裡其數字元素與數字位置同時出現下列規律性；

(a) 任一解的最末兩位置元素的自然數數值都大於或等於 2，即 $2 \le a_{n-1} \le a_n$，而其餘各位置元素數值都恰等於 1，將此類的解歸納為末 2 位類型有序數對解。

(b) 末 3 位類型有序數對解：此類型中任一解的最末 3 個位置元素自然數數值都大於或等於 2，即 $2 \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$，而其餘各位置元素數值都恰等於 1。

(c) 末 4 位類型有序數對解：此類型中任一解的最末 4 個位置元素數值都大於或等於 2，即 $2 \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$，而其餘各位置元素數值都恰等於 1。

(d) 末 5 位類型有序數對解：此類型中任一解最末 5 個位置元素數值都大於或等於 2，即 $2 \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$，而其餘各位置元素數值都恰等於 1。

⋮

(m) 末 m 位類型有序數對解：此類型中任一解的最末 m 個位置元素自然數數值都大於或等於 2，即 $2 \le a_{n-m} \le a_{n-m+1} \le a_{n-m+2} \le \cdots \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$，$m \ge 2$，而其餘各位置元素數值都恰等於 1 。

⋮

以此類推，即可得到無限多種不同類型有序數對解。而且每一種類型解裡面也都包含有無限多個相異的有序數對解。這所有的解都可依著順序一一找出來！尋求這等式命題有序數對解可能有許多不同見解，本文則提供一種思考操作方法，下列敘述就是找出每一種類型有序數對解的原則與要領；

1) 末 2 位類型： $1 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-3} = a_{n-2} < 2 \le a_{n-1} \le a_n$

因為 $1+1+\cdots+1+a_{n-1}+a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = a_1a_2a_3\cdots a_n = a_{n-1}a_n \Rightarrow$

$$n-2+a_{n-1}+a_n = a_{n-1}a_n \Rightarrow n-2 = a_{n-1}a_n - a_{n-1} - a_n = a_{n-1}(a_n-1) - a_n \Rightarrow$$

$$n-1 = (a_{n-1}-1)(a_n-1) \quad \text{.......(1)}$$

$$\Rightarrow \quad n = (a_{n-1}-1)(a_n-1)+1 \ge 2 \quad \text{.......(2)}$$

方程式(2)式表示出 n 為末 2 位類型中任一有序數對解內的元素個數。

方程式(1)式明確地顯示：當自然數 $n \ge 2$，則 $n-1$ 必可分解成僅有 1 組或 1 組以上的 2 個因數乘積，故 $n-1 = (a_{n-1}-1)(a_n-1) = f_1 \times f_2$，且 $f_1 \le f_2$，f_1 與 f_2 俱為 $n-1$ 的因數。再經運算得 $a_{n-1} = f_1+1$ 且 $a_n = f_2+1$。因此得一組正整數解為 1+1+1+ ⋯+ 1+(f_1+1)+(f_2+1)= $1\times1\times1\times\cdots\times1\times(f_1+1)\times(f_2+1)$ = $n+f_1+f_2$ $=(f_1+1)\times(f_2+1)$，此處等式中等號兩側各有 $n-2$ 個 1 相連加與相連乘。而這組有序數對解為 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1,1,\cdots,1, f_1+1, f_2+1)$ 且等式的運算值為 $n+f_1+f_2 = (f_1+1)\times(f_2+1)$。當 $n-1$ 為質數則恰僅有一組有序數對解。當 $n-1$ 為合數則至少有兩組有序數對解。

例：取 n=6 $\Rightarrow$ $n-1 = 5 = 1\times5$，則其解為 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$= (1,1,1,1,2,6)而其等式的運算值為 1+1+1+1+2+6=$1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot6$=6+1+5=(1+1)$\cdot(5+1)=12$ 。

例：取 n=16 $\Rightarrow$ $n-1 = 15 = 1\times15 = 3\times5$，則有 2 組不同的有序數對解分別為；

$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16})$= (1,1,1,⋯,1,2,16) 而其等式的值為 32 。

$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16})$= (1,1,1,⋯,1,4,6) 而其等式的值為 24，

n=16 的兩有序數對解內都各有 14 個 1 。

只要選定 a_{n-1} 與 a_n 的值，代入方程式(2)就得出所有 n 的元素數目值。

n 為有序數對解內的元素數目，接著要在這末 2 位類型及所有末 m 位類型的各條件

下確認 n 的一系列數值；而在符號 * 的位置處代表 a_n 的所有變動數值；

(2*型)： $2=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=a_n$=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ⋯ 出現一系列持續增大無盡以首項為 2 的所有連續自然數。此型的有序數對解為($a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,1,2, a_n) ，而其等式的運算值為 $2a_n$ 。值得注意的是：任意 n 值($n\ge 2$)必擁有這一型的有序數對解。

例： $a_n=61=n$，其解為 ($a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{58},a_{59},a_{60},a_{61}$)=(1,1, ⋯ ,1,2,61) 。

(3*型)： $3=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=2a_n-1$=5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 ,27,⋯ 出現首項為 5，公差為 2 的無盡自然數奇數等差數列。此型的解為($a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,1,3, a_n)，而其等式的運算值為 $3a_n$ 。

例： $a_n=12$， $n=23$，則解為 (1,1, … ,1,3,12) 。其中前 21 個元素值均為 1 .

(4*型)： $4=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=3a_n-2$=10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, ⋯ 出現首項為 10，公差為 3 的無盡自然數等差數列。此型的解為($a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,1,4, a_n) ，

而其等式的運算值為 $4a_n$ 。

(5*型)： $5=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=4a_n-3$=17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73,⋯出現首項為 17，公差為 4 的無盡自然數等差數列。此型的解為($a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,1,5, a_n)，等式的運算值為 $5a_n$。

(6*型)： $6=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=5a_n-4$=26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66,71,76,81,86, ⋯ 出現首項為 26 ，公差為 5 的無盡自然數等差數列。此型的解

為$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,1,\cdots,1,6,a_n)$，等式的運算值為$6a_n$ 。

(7*型)：$7=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得$n=6a_n-5$=37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 103, 109, 115, …出現首項為 37，公差為 6 的無盡自然數等差數列。此型的解為$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,1,\cdots,1,7,a_n)$，等式的運算值為 $7a_n$。

例：$a_n=12$，$n=67$，則解為 (1,1, … ,1,7,12)。

(8*型)：$8=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得$n=7a_n-6$=50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, 113, 120, 127, 134, 141, …出現首項為 50，公差為 7 的無盡自然數等差數列。解為$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,1,\cdots,1,8,a_n)$，等式的運算值為 $8a_n$ 。

(9*型)：$9=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得$n=8a_n-7$=65, 73, 81, 89, 97, 105, 113, 121, 129, 137, 145, 153, …出現首項為 65，公差為 8 的無盡自然數等差數列。此型的解為$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,1,\cdots,1,9,a_n)$，等式的運算值為 $9a_n$ 。

(10*型)：$10=a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(1)式，得 $n=9a_n-8$=82, 91, 100, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, …出現首項為 82，公差為 9 的無盡自然數等差數列。此型解為$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,1,\cdots,1,10,a_n)$，等式的運算值為 $10a_n$ 。

⋮

2) 末 3 位類型：$1=a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-4}=a_{n-3}<2\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$

$$\Rightarrow n-3+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=a_{n-2}a_{n-1}a_n \;\Rightarrow\; n-3+a_{n-2}=a_{n-2}a_{n-1}a_n-a_{n-1}-a_n$$

$$\Rightarrow n-3+a_{n-2}=a_n(a_{n-2}a_{n-1}-1)-a_{n-1}\Rightarrow$$

$$(n-3)a_{n-2}+a_{n-2}{}^2+1=a_{n-2}a_n(a_{n-2}a_{n-1}-1)-a_{n-2}a_{n-1}+1=(a_{n-2}a_{n-1}-1)(a_{n-2}a_n-1)$$

$$\Rightarrow (n-3)a_{n-2}+a_{n-2}{}^2+1=(a_{n-2}a_{n-1}-1)(a_{n-2}a_n-1)\ge(a_{n-2}{}^2-1)^2 \quad\Rightarrow$$

取a_{n-2} 的最小值 2 代入，得 $n\ge 5$ ，$n=a_{n-2}a_{n-1}a_n-a_{n-2}-a_{n-1}-a_n+3$ ..... (3)

將條件 $2\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 中的a_{n-2} ，a_{n-1} ，a_n的各值一起代入方程式(3)就得出所有 $(1,1,\ldots,1,1,a_{n-2},a_{n-1},a_n)$型裡 n的元素數目值。仿效末 2 位類型，得

(22*型)：$2=a_{n-2}=a_{n-1}\le a_n$代入n的方程式(3)式，得 $n=3a_n-1$=5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, … 出現首項為 5，公差為 3 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n)=$

(1, 1, 1,⋯, 2, 2, a_n)，而其等式的運算值為 $4a_n$ 。

(23*型)：$2=a_{n-2}<3=a_{n-1}\le a_n$ 代入 n 的方程式(3)式，得 $n=5a_n-2$=13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, 83, 88, 93, 98, 103, 108, 113, 118, 123, 128, 133, 138, ⋯出現首項為 13 ,公差為 5 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為

($a_1,a_2, a_3,\cdots ,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,2,3, a_n) ，而其等式的運算值為 $6a_n$ 。

(24*型)： $2=a_{n-2}<4=a_{n-1}\le a_n$ 代入 n 的方程式(3)式，得 $n=7a_n-3$=25, 32, 39, 46, 53, 60, 67, 74, 81, 88, 95, 102, 109, 116, ⋯出現首項為 25，公差為 7 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為($a_1,a_2, a_3,\cdots ,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,2,4, a_n)，而其等式的運算值為 $8a_n$ 。

例： $a_n=10$， $n=67$ ，則解為 (1,1, ⋯ ,1,2,4,10) 。

(25*型)： $2=a_{n-2}<5=a_{n-1}\le a_n$ 代入 n 的方程式(3)式，得 $n=9a_n-4$=41, 50, 59, 68, 77, 86, 95, 104, 113, 122, 131, 140, ⋯出現首項為 41，公差為 9 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 ($a_1,a_2, a_3,\cdots ,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,2,5, a_n) ，等式的運算值為 10 a_n 。

(26*型)：$2=a_{n-2}<6=a_{n-1}\le a_n$ 代入 n 的方程式(3)式，得 $n=11a_n-5$=61, 72, 83, 94, 105, 116, 127, 138, 149, 160, 171, 182, ⋯出現首項為 61，公差為 11 的無盡自然數等差數列數值。此解為 ($a_1,a_2, a_3,\cdots ,a_{n-2},a_{n-1},a_n$)=(1,1,1,⋯,2,6, a_n) ，而其等式的運算值為 12 a_n 。

⋮

3) 末 4 位類型： $1=a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-5}=a_{n-4}<2\le a_{n-3}\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$

由 $n-4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$\Rightarrow$ $n=a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n-a_{n-3}-a_{n-2}-a_{n-1}-a_n+4$ ....(4)

將條件 $2\le a_{n-3}\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 中 a_{n-3} ， a_{n-2} ， a_{n-1} ， a_n 的各值一起代入方程式(4)就得出所有 (1, 1, ⋯ , 1, 1, a_{n-3} , a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)型裡 n 的元素數目值。

(222*型)：$2 = a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} \le a_n$ 代入n的方程式(4)式，得$n = 7a_n - 2$=12, 19, 26, 33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96, 103, 110, 117, 124, 131, 138, 145, 152, 159, 166, 173, 180, …出現首項為 12，公差為 7 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 $(1,1,\cdots,1,1,a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$=$(1,1,1,\cdots,1,2,2,2,a_n)$，其等式的運算值為 $8a_n$ 。

(223*型)：$2 = a_{n-3} = a_{n-2} < 3 \le a_{n-1} \le a_n$ 代入n的方程式(4)式，得$n = 11a_n - 3$=30, 41, 52, 63, 74, 85, 96, 107, 118, 129, 140, 151, 162, 173, 184, 195, 206, 217, 228, 239, …出現首項 30 ,公差為 11 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 $(1,1,\cdots,1,1,a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$=$(1,1,1,\cdots,1,2,2,3,a_n)$，其等式的運算值為 $12a_n$ 。

(224*型)：$2 = a_{n-3} = a_{n-2} < 4 \le a_{n-1} \le a_n$ 代入n的方程式(4)式，得 $n = 15a_n - 4$=56, 71, 86, 101, 116, 131, 146, 161, 176, 191, 206, 221, 236, 251, 266, 281, 296, 311, 326,… 出現首項為 56，公差為 15 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 $(1,1,\cdots,1,1,a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$=$(1,1,1,\cdots,1,2,2,4,a_n)$，其等式的運算值為 $16a_n$。

⋮

4) 末 5 位類型：$1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-5} < 2 \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$

由 $n - 5 + a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$\Rightarrow$ $n = a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n - a_{n-4} - a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1} - a_n + 5$ ....(5)

將條件 $2 \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$ 中 a_{n-i} ($0 \le i \le 4$)的各值一起代入方程式(5)就得出所有 $(1,1,\ldots,1,1,a_{n-4},a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$型裡 n的元素數目值。

(2222*型)：$2 = a_{n-4} = a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} \le a_n$ 代入n的方程式(5)式，得 $n = 15a_n - 3$=27, 42, 57, 72, 87, 102, 117, 132, 147, 162, 177, 192, 207, 222, 237, 252, 267, 282, 297, 312, 327, 342, 357, 372, 387, 402, 417, 432, 447, 462, 477, 492, 507, 522, 537, 552, …出現首項為 27，公差為 15 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為$(1,1,\cdots,1,1,a_{n-4},a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n) = (1,1,1,\cdots,1,2,2,2,2,a_n)$ ，而其等式的運算值為 $16a_n$。

(2223*型)：$2 = a_{n-4} = a_{n-3} = a_{n-2} < 3 = a_{n-1} \le a_n$ 代入n的方程式(5)式，得 $n = 23a_n - 4$ =65, 88, 111, 134, 157, 180, 203, 226, 249, 272, 295, 318, 341, 364, 387, 410, 433, 456, 479, 502, 525, 548, …出現首項為 65，公差為 23 的無盡自然數等差數列數值。此型解為 $(1,1,\cdots,1,1,a_{n-4},a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n) = (1,1,1,\cdots,1,2,2,2,3,a_n)$，其等式的運算值為 $24a_n$ 。

⋮

5) 末 6 位類型：$1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-6} < 2 \le a_{n-5} \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$

由 $n - 6 + a_{n-5} + a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_{n-5}a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$\Rightarrow$ $n = a_{n-5}a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n - a_{n-5} - a_{n-4} - a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1} - a_n + 6$ ....(6)

將條件 $2 \le a_{n-5} \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$ 中 a_{n-i} ($0 \le i \le 5$) 的各值一起代入方程式(6)就得出所有 $(1,1, \ldots ,1,1, a_{n-5}, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$型裡 n的元素數目值。

(22222*型)： $2 = a_{n-5} = a_{n-4} = a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} \le a_n$ 代入 n 的方程式(6)式，得 $n = 31a_n - 4$=58, 89, 120, 151, 182, 213, 244, 275, 306, 337, 368, 399, 430, 461, 492, 523, 554, 585, 616, 647, 678, ⋯出現首項為 58，公差為 31 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為 $(1,1, \cdots,1,1, a_{n-5}, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$= $(1,1,1, \cdots,1,2,2,2,2,2, a_n)$，其等式的運算值為 32 a_n 。

(22223*型)： $2 = a_{n-5} = a_{n-4} = a_{n-3} = a_{n-2} < 3 = a_{n-1} \le a_n$ 代入 n 的方程式(6)式，得 $n = 47a_n - 5$=136, 183, 230, 277, 324, 371, 418, 465, 512, 559, 606, 653, 700, 747, 794, 841, 888, 935, 982, ⋯出現首項為 136，公差為 47 的無盡自然數等差數列數值。此型解為 $(1,1, \cdots ,1,1, a_{n-5}, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ = $(1,1,1,\cdots,1,2,2,2,2,3, a_n)$，其等式的運算值為 48 a_n 。

⋮

(22233*型)： $2 = a_{n-5} = a_{n-4} = a_{n-3} < 3 = a_{n-2} = a_{n-1} \le a_n$ 代入 n 的方程式(6)式，得 $n = 71a_n - 6$=207, 278, 349, 420, 491, 562, 633, 704, 775, 846, 917, 988, 1059, 1130, 2201, 2272, 2343, 2414, 2485, 2556, ⋯出現首項為 207，公差為 71 的無盡自然數等差數列數值。此型的解為$(1,1, \cdots ,1,1, a_{n-5}, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ = $(1,1,1, \cdots,1,2,2,2,3,3, a_n)$，其等式的運算值為 72 a_n 。

⋮

6) 末 7 位類型： $1 = a_1 = \cdots = a_{n-7} < 2 \le a_{n-6} \le a_{n-5} \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$

由 $n - 7 + a_{n-6} + a_{n-5} + a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_{n-6}a_{n-5}a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$\Rightarrow n = a_{n-6}a_{n-5}a_{n-4}a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n - a_{n-6} - a_{n-5} - a_{n-4} - a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1} - a_n + 7$ ....(7)

將條件 $2 \le a_{n-6} \le a_{n-5} \le a_{n-4} \le a_{n-3} \le a_{n-2} \le a_{n-1} \le a_n$ 中 a_{n-i} ($0 \le i \le 6$)的各值一起代入方程式(7)就得出所有 $(1,1, \ldots ,1,1, a_{n-6}, a_{n-5}, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$型裡 n的元素數目值。

⋮

仿效上列所有敘述可持續尋找到各末 m 位類型在各型條件下所呈現的一系列無盡的 n 值，同時也經常看到某一個 n 值會出現在不同類型條件下的系列數值中，意指這個 n 值必同時具有許多組相異的有序數對解！

二、條理分明具體探尋任一個n值（$n \ge 2$）對應的所有相異的有序數對解

首先給定一個n=x 值，以下* 號位置代表a_n的值，接著從上述的(2*型)條件下所顯示的等差數列數值中開始搜尋這個 x 值，尋獲了就記錄下來，然後緊接著按序搜尋(3*型)、(4*型)、...、(22*型)、(23*型)、... 要逐一條件搜索不可跳躍略過，直到某一末 m 位類型的第 1 型(222…222*型)裡等差數列數值中的首項數值大於 x 值為止，即停止搜尋。然後將所蒐集到的各型有序數對解彙整起來就建構成此n=x 值的所有相異組有序數對解。以下特藉由範例來解說如何正確完整的尋覓建構出每一個n=x 值的所有相異的有序數對解；

[範例 1]：取 $n=5$，求出n值對應的所有相異的有序數對解；

(a).由(2*型)及(3*型)的等差數列數值中搜尋到 5，記錄下來。(b).接著看到(4*型)的等差數列首項 10 已大於 5，(c).故要跳到下一類型的(22*型)，又搜尋到 5，(d).接著再看到(23*型),(24*型), ... 及之後的所有等差數列首項數值皆已大於 5，即停止搜尋。(e).將以上蒐尋出的(2*型),(3*型)及(22*型)一起建構成 $n=5$ 的 3 組相異有序數對解分別為 (a_1,a_2,a_3,a_4 , a_5)= (1,1,1,2,5) 而其等式的運算值為 10。

(a_1,a_2, a_3,a_4 , a_5)= (1,1,1,3,3) , 而其等式的運算值為 9。

(a_1,a_2, a_3,a_4 , a_5)= (1,1,2,2,2)，而其等式的運算值為 8。

[範例 2]：取 $n=26$ ，求出n值對應的所有相異的有序數對解；

(a).由(2*型)及(6*型)的等差數列數值中搜尋到 26，記錄下來。(b).接著看到(7*型)的等差數列首項 37 已大於 26，(c).故要跳到下一類型的(22*型)，又搜尋到 26，(d).接著搜尋(23*型)，(24*型)不存在 26，到(25*型)之後的所有等差數列首項數值皆已大於 26，(e).即再跳到下一類型的(222*型)，又搜尋到 26，(f).自(223*型)，(224*型)， ... 及之後的所有等差數列首項數值皆已大於 26，即停止搜尋。(g).將以上蒐尋出的(2*型)，(6*型)，(22*型)及(222*型)一起建構成$n=26$ 的 4 組相異有序數對解分別為 ($a_1,a_2,\cdots,a_{24},a_{25},a_{26}$)= (1,1, ... ,1,2,26) , 其等式的運算值為 52。

($a_1,a_2,\cdots,a_{24},a_{25},a_{26}$)= (1,1, ... ,1,6,6) , 而其等式的運算值為 36。

($a_1,a_2,\cdots,a_{23},a_{24},a_{25},a_{26}$)= (1,1, ... ,1,2,2,9)，而其等式的運算值為 36。

($a_1,a_2,\cdots,a_{22},a_{23},a_{24},a_{25},a_{26}$)= (1,1, ... ,1,2,2,2,4)，而其等式的運算值為 32。

此範例看到有 2 組相同的等式運算值 36。

[範例 3]：取 $n=29$ ，求出n值對應的所有相異的有序數對解；

(a).由(2*型),(3*型)及(5*型)的等差數列數值中搜尋到 29，(6*型)沒出現，(7*型)之後

的首項值皆大於 29，(b).要跳到下一類型的(22*型)，又搜尋到 29，(23*型)之後沒出現，(c).再跳到下一類型的(33*型)，又搜尋到 29，(d).之後不再出現 29，(e).將以上蒐集到的(2*型),(3*型),(5*型)及(22*型),(33*型)一起建構成 $n=29$ 的 5 組相異有序數對解分別為下列；

$(a_1,a_2,\cdots,a_{27},a_{28},a_{29})=(1,1,\ldots,1,2,29)$，而其等式的運算值為 58。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{27},a_{28},a_{29})=(1,1,\ldots,1,3,15)$，而其等式的運算值為 45。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{27},a_{28},a_{29})=(1,1,\ldots,1,5,8)$，而其等式的運算值為 40。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{26},a_{27},a_{28},a_{29})=(1,1,\ldots,1,2,2,10)$，而其等式的運算值為 40。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{26},a_{27},a_{28},a_{29})=(1,1,\ldots,1,3,3,4)$，而其等式的運算值為 36。

此範例看到有 2 組相同的等式運算值 40。

[範例 4]：取 $n=40$，求出 n 值對應的所有相異的有序數對解；

(a).由(2*型),(4*型)的等差數列數值中搜尋到 40，一直到(8*型)及之後都無出現 40，(b).要跳到下一類型的(34*型)，又搜尋到 40，(c). (35*型)之後的首項值皆大於 40，再跳到下一類型的(222*型)，又搜尋到 40，(d).(223*型)之後不再出現 40，(224*型)以後的首項值皆大於 40，(e).將以上蒐集到的(2*型),(4*型),(34*型)及(222*型)一起建構成 $n=40$ 對應的 4 組相異有序數對解分別為下列；

$(a_1,a_2,\cdots,a_{38},a_{39},a_{40})=(1,1,\ldots,1,2,40)$, 而其等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{38},a_{39},a_{40})=(1,1,\ldots,1,4,14)$，而其等式的運算值為 56。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{37},a_{38},a_{39},a_{40})=(1,1,\ldots,1,3,4,4)$，而其等式的運算值為 48。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{36},a_{37},a_{38},a_{39},a_{40})=(1,1,\ldots,1,2,2,2,6)$，而其等式的運算值為 48。

此範例看到有 2 組相同的等式運算值 48。

[範例 5]：取 $n=67$，求出 n 值對應的所有相異的有序數對解；

(a). 見方程式 (1) 式 $n-1=(a_{n-1}-1)(a_n-1)=f_1\times f_2$，且 $f_1\le f_2$，所以 $n-1=66=1\times 66=2\times 33=3\times 22=6\times 11=f_1\times f_2$，共有 4 組末 2 位類型相異的組合。其有序數對解為 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)=(1,1,\cdots,1,f_1+1,\ f_2+1)$ 且等式的值為 $n+f_1+f_2=(f_1+1)\times(f_2+1)$。此 4 組相異有序數對解為下列；

$(a_1,a_2,\cdots,a_{65},a_{66},a_{67})=(1,1,\cdots,1,2,67)$ 且等式的運算值為 134。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{65},a_{66},a_{67})=(1,1,\cdots,1,3,34)$ 且等式的運算值為 102。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{65},a_{66},a_{67})=(1,1,\cdots,1,4,23)$ 且等式的運算值為 92。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{65},a_{66},a_{67})=(1,1,\cdots,1,7,12)$ 且等式的運算值為 84。

(b).接著跳到下一類型的(22*型),(23*型)皆無出現 67，直到(24*型)又搜尋到 67，

(c). (25*型)之後的搜尋皆無出現 67，(d).將以上蒐集到的末 2 位類型及(24*型)一起建構成 $n=67$ 對應的 5 組相異有序數對解，而(24*型)解為下列；

$(a_1, a_2, \cdots, a_{64}, a_{65}, a_{66}, a_{67})$=(1,1, ... ,1,2,4,10)，而其等式的運算值為 80。

[範例 6]：取 $n=113$，求出n值對應的所有相異的有序數對解；

(a). 見方程式 (1) 式 $n-1=(a_{n-1}-1)(a_n-1)=f_1 \times f_2$，且 $f_1 \le f_2$，所以 $n-1=112=1\times112=2\times56=4\times28=7\times16=8\times14=f_1 \times f_2$，共有 5 組末 2 位類型相異的組合。其有序數對解為 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)=(1,1,\cdots,1, f_1+1, f_2+1)$ 且等式的值為 $n+f_1+f_2=(f_1+1)\times(f_2+1)$。此 5 組在(2*型),(3*型),(5*型),(8*型),(9*型)中皆出現 113，(b).接續著跳到下一類型的(22*型),(23*型) ,(25*型)及(36*型),(55*型)也皆出現 113，(c). (55*型)之後的所有搜尋皆無出現 113，(d).將以上蒐集的各條件*型一起建構成 $n=113$ 對應的 10 組有序數對解分別為下列；

$(a_1, a_2, \cdots, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,2,113)$ 且等式的運算值為 226 。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,3,57)$ 且等式的運算值為 171。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,5,29)$ 且等式的運算值為 145。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,8,17)$ 且等式的運算值為 136。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,9,15)$ 且等式的運算值為 135。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,2,2,38)$ 且等式的運算值為 152。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,2,3,23)$ 且等式的運算值為 138。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,2,5,13)$ 且等式的運算值為 130。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,3,6,7)$ 且等式的運算值為 126。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113})=(1,1,\cdots,1,5,5,5)$ 且等式的運算值為 125。

[範例 7]：取 $n=463$，求出n值對應的所有相異的有序數對解；

(a). 見方程式 (1) 式 $n-1=(a_{n-1}-1)(a_n-1)=f_1 \times f_2$，且 $f_1 \le f_2$，所以 $n-1=462=1\times462=2\times231=3\times154=6\times77=7\times66=11\times42=14\times33=21\times22=f_1 \times f_2$，共有 8 種相異的組合。此 8 組在(2*型), (3*型), (4*型), (7*型), (8*型), [(12)*型], [(15)*型], [(22)*型]中皆出現 463，(b).接著跳到下一類型的(23*型), [2(13)*型]皆出現 463，(c).再跳到下一類型的(256*型), (333*型), (344*型)也皆出現 463，(d).持續跳到下一類型的(2226*型)也出現最後一個 463，(e).自(2227*型)之後不再出現 463，(f).由上述將蒐集到的各條件*型一起建構成 $n=463$ 對應的 14 組相異有序數對解分別為下列；

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,2\ ,463\ )$ 且等式的運算值為 926。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,3\ ,232\ )$ 且等式的運算值為 696。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,4\ ,155\ )$ 且等式的運算值為 620。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,7\ ,78\ )$ 且等式的運算值為 546。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,8\ ,67\ )$ 且等式的運算值為 536。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,12\ ,43\ )$ 且等式的運算值為 516。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,15\ ,34\ )$ 且等式的運算值為 510。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,22\ ,23\ )$ 且等式的運算值為 506。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,2,3\ ,93\ )$ 而其等式的值為 558。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,2,13\ ,19\ )$ 而其等式的值為 494。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{459}, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,2,5,6,8\ )$ 等式的值為 480。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{459}, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,3,3,3,18\ )$ 等式的值為 486。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{459}, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,3,4,4,10\ )$ 等式的值為 480。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{458}, a_{459}, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463})=(1,1,\cdots,1,2,2,2,6,10\ )$等式的值為 480。

這 14 組相異有序數對解裡等式的運算值有相等與不相等的區別且等式運算的最大值為 $2n=926$。相等的運算值有 3 個 480，其餘 11 個皆不相等。

從這 7 個範例可看出任意 n 值的全數完整相異有序數對解裡可能有 2 或 2 個以上相等的等式運算值，這需要實際計算尋找才能得知。

參、結論

1. 此等式命題中第 1 個規律性呈現在任意自然數 $n\ (\geq 2)$ 值的第 1 類型裡具有 $n-1=f_1\times f_2$ 形式，即每一個 $n-1=f_1\times f_2$ 必可分解成至少 1 組的 2 個因數乘積，因而任意自然數 $n\ (\geq 2)$ 值必存在有至少 1 組的自然數分佈有序數對解。

   第 2 個規律性是在每一類型下的*型裡 $n(\geq 2)$ 值出現等差數列分佈；例如：

   (a) $a_{n-2}=2=a_{n-1}\leq a_n \ \Rightarrow n=3a_n-1 \ \Rightarrow n=5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ \ldots$

   (b) $a_{n-2}=2<3=a_{n-1}\leq a_n \ \Rightarrow n=5a_n-2 \ \Rightarrow n=13,18,\ 23,\ 28,\ \ldots$

   (c) $a_{n-2}=3=a_{n-1}\leq a_n \ \Rightarrow n=8a_n-3 \ \Rightarrow n=21,29,\ 37,\ 45,\ 53,\ 61,\ \ldots$

   (d) $a_{n-3}=2<5=a_{n-2}=a_{n-1}\leq a_n \Rightarrow n=49a_n-8=237,286,\ 335,\ \ldots$

   第 3 個規律性是在尋找給定一個 n 值所有有序數對解的過程中，發現在每一類型的* 型條件裡當出現那些大於或等於 2 的元素數值與元素個數增多時其對應等差數列的首項亦隨著增大，且公差亦同步增大。

   第 4 個規律性是在搜尋時一直尋找到當在某類型的最小值*條件下 n 值不存在時

即無解而結束搜索。

第 5 個規律性是 n值愈大，有序數對解內的成份元素數字 1 出現的位數愈多。

第 6 個規律性是在給定任一 n值的情況下，其所有相異有序數對解組數中等式運算後出現的最大值恰為 $2n$，$n \ge 2$。如[範例 5]，當$n=67$，其等式運算的最大值為 134，[範例 7]，當$n=463$，等式運算的最大值為 926。

*** 現在證明 $2n$ 為最大值：

(1) 第 1 類型裡具有 $n-1=1\times(n-1)=f_1\times f_2$ 形式，$1<f_1\le f_2$，f_1與f_2為因數，此類型有序數對解等式的運算值分別為 $2n$ 與 $n+f_1+f_2=(f_1+1)\times(f_2+1)$。

由 $2n-(n+f_1+f_2)=n-f_1-f_2=f_1\times f_2+1-f_1-f_2=(f_1-1)\times(f_2-1)>0$

$\Rightarrow\ 2n>(n+f_1+f_2)$，得 $2n$ 為最大值。

(2) 第 2 類型：$2\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 有序數對解等式的運算值為$a_{n-2}a_{n-1}a_n$，而

$n=a_{n-2}a_{n-1}a_n-a_{n-2}-a_{n-1}-a_n+3\Rightarrow 2n=2a_{n-2}a_{n-1}a_n-2(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)+6$

$\Rightarrow\ 2n-a_{n-2}a_{n-1}a_n=a_{n-2}a_{n-1}a_n-2(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)+6$ .... (8)

(i) 將條件$2=a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 中的a_{n-2}，a_{n-1}，a_n的各值一起代入方程式(8)

$\Rightarrow\ 2n-2a_{n-1}a_n=2a_{n-1}a_n-2(a_{n-1}+a_n)+2=2(a_{n-1}-1)(a_n-1)>0$

(ii) 將條件 $3\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 代入方程式(8)，再運算由 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\le 3a_n$

$\Rightarrow\ 2n-a_{n-2}a_{n-1}a_n=a_{n-2}a_{n-1}a_n-2(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)+6\ \ge a_{n-2}a_{n-1}a_n-6a_n+6$

$\Rightarrow\ 2n-a_{n-2}a_{n-1}a_n\ \ge a_{n-2}a_{n-1}a_n-6a_n+6\ \ge\ (a_{n-2}^2-6)\,a_n+6$

因 $a_{n-2}\ge 3$，$(a_{n-2}^2-6)\ge 3$，故$2n-a_{n-2}a_{n-1}a_n\ \ge\ (a_{n-2}^2-6)\,a_n+6\ >\ 0$

因此，由(i).與(ii).的推理得出$2n$為最大值。

⋯ 以此類推 ⋯

(3) 第 m 類型：$2\le a_{n-m}\le a_{n-m+1}\le\cdots\le a_{n-2}\le a_{n-1}\le a_n$ 有序數對解的運算值為 $a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n$，而 $n=a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n-a_{n-m}-a_{n-m+1}-\cdots-a_{n-2}-a_{n-1}-a_n+m+1$，$m\ge 3$ $\Rightarrow$

$2n-a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n\ =\ a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n-2(a_{n-m}+a_{n-m+1}+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-m-1)\ge a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n-2(m+1)a_n+2(m+1)$

$\ge(a_{n-m})^m a_n-2(m+1)a_n+2(m+1)\ge[2^m-2(m+1)]a_n+2(m+1)$ $\Rightarrow$ 因 $m\ge 3$

$\Rightarrow\ 2^m\ge 2(m+1)\ \Rightarrow\ [2^m-2(m+1)]a_n+2(m+1)\ge 2(m+1)>0$，因此

$2n-a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_{n-3}a_{n-2}\ a_{n-1}a_n>0$，得 $2n$ 為最大值。

(4) 綜合上述各類型的分析證明都成立，因此 得 $2n$ 為等式運算的最大值。

2. 在分析過程中，發現當出現完全相等的等式運算值，其 n 值不盡然相等；如等式運算值為 80 時，出現的有序數對解有下列 11 組數：

$(a_1,a_2,\cdots,a_{37},a_{38},a_{39},a_{40})=(1,1,\cdots,1,2,40)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{55},a_{56},a_{57},a_{58})=(1,1,\cdots,1,4,20)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{58},a_{59},a_{60},a_{61})=(1,1,\cdots,1,5,16)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{61},a_{62},a_{63},a_{64})=(1,1,\cdots,1,8,10)$且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{56},a_{57},a_{58},a_{59})=(1,1,\cdots,1,2,2,20)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{64},a_{65},a_{66},a_{67})=(1,1,\cdots,1,2,4,10)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{65},a_{66},a_{67},a_{68})=(1,1,\cdots,1,2,5,8)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{67},a_{68},a_{69},a_{70})=(1,1,\cdots,1,4,4,5)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{64},a_{65},a_{66},a_{67},a_{68})=(1,1,\cdots,1,2,2,2,10)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{67},a_{68},a_{69},a_{70},a_{71})=(1,1,\cdots,1,2,2,4,5)$ 且等式的運算值為 80。

$(a_1,a_2,\cdots,a_{67},a_{68},a_{69},a_{70},a_{71}\ a_{72})=(1,1,\cdots,1,2,2,2,2,5)$ 且等式的運算值為 80。

只有 $n=68$ 時，有 2 個相異有序數對解。其餘的 n 值皆不相同。也可看出以等式運算值作回推解集合的元素個數反而較簡易。

3. 每次欲尋找某一 n 值的解時都須遵循自第 1 個末 2 為類型分析搜索起，然後第 2 類型、第 3 類型、… 逐步搜尋始能完整拾獲所有解集合，不致有遺漏。n 值愈大所需耗費搜尋的工程就愈複雜費時，但因已掌握到操作的正確方向，只要將所有類型公式作精準計算並清楚列出每一個*型下 n 的一系列數值，然後再仔細逐一搜尋所要的 n 值，即可徹底節省時間而快速排列出正確完整有序數對解。

4. 每一個 $n\ (\geq 2)$ 值都至少有 1 個自然數排列分佈的有序數對解。當 n 值愈大，其所對應擁有的相異有序數對解數量就愈多。

參考資料

葉東進 數學有趣問題二則 數播線上，**數學傳播季刊** 中央研究院 第 42 卷第 1 期(165)，2018 年 3 月出版。 https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/onlineMedia18.jsp?mID=201802

https://math.stackexchange.com/questions/929564/solve-the-equation-abc-abc-for-a-%20b-c-in-mathbbz