完全對稱式的「變數平移展開式」

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

定義 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。例如： $h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}a_3{}^{\lambda_3})$

$=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。特別地， $h_n(a,b)=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n$ 。

在以下的文章中，將「完全齊次對稱多項式」，簡稱為「完全對稱式」。

本文從一個問題出發：對於 $h_n(a,b)$，將變數 a 與 b 同時加上 x，所得的 $h_n(x+a,x+b)$ 的展開式為何？

先來試試 $n=2$ 的特殊情形：

$$h_2(x+a,x+b)=(x+a)^2+(x+a)\cdot(x+b)+(x+b)^2=3x^2+3(a+b)x+(a^2+ab+b^2)$$

再試試 $n=3$ 的情形：

$$h_3(x+a,x+b)=(x+a)^3+(x+a)^2\cdot(x+b)+(x+a)\cdot(x+b)^2+(x+b)^3$$

$$=4x^3+6(a+b)x^2+4(a^2+ab+b^2)x+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$=C_1^4x^3+C_2^4\cdot h_1(a,b)x^2+C_3^4\cdot h_2(a,b)x+C_4^4\cdot h_3(a,b)$$

注意到 $h_3(x+a,x+b)$ 對 x 展開的各項係數，恰好出現了「二項式係數」與「完全對稱式」，這是怎麼一回事呢？一般性的規律是什麼呢？在繼續讀下去之前，建議讀者不妨先自行嘗試看看。

在本文接下來的工作中，將透過「 轉換公式」(參考資料[1])與「二項式定理」，推導出一般情形之下的公式：

$$h_n(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)=\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+m-1}\cdot h_{n-k}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k \text{ 其中 } n\ge 1，m\ge 1。$$

將此式稱為完全對稱式的「變數平移展開式」。當 $m=1$ 時，此公式即為一般所知的二項式定理，由此而言，此公式可視為二項式定理的一個推廣。

貳、本文：

一、記號與已知公式：

1. 完全齊次對稱多項式**(Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)**：

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」，簡稱為「**完全對稱式**」。特別地，有 $h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，與 $h_k(a)=a^k$。

2. 拉格朗日插值型式：

定義：$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^{\,k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$，稱為「$n$ 元 k 次拉格朗日插值型式」。

註：以分子的次方來定義。

例：$L_2(a_1,a_2,a_3)$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^{\,2}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^{\,2}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^{\,2}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^{\,2}}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

例：$L_2(a,b,c)=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

例：

$L_6(a,b,c,d)$

$$=\frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^6}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^6}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^6}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

3. $h-L$ **轉換公式：** $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，**其中** $n\geq 2$ ， $k\geq 0$ 。 **[1]**

說明：此一公式，可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。特別注意到， L 與 h **的下標之差，恰為變數個數減 1**。

例： $L_{k+1}(a,b)=\dfrac{a^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}}{b-a}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}=a^k+a^{k-1}b+\cdots+ab^{k-1}+b^k=h_k(a,b)$ ，

此為 $n=2$ 的情形，其中 $a_1=a$ ， $a_2=b$ 。

例：對於 $L_6(a,b,c)=\dfrac{a^6}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^6}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^6}{(c-a)(c-b)}$ ，

有 3 個變數 a,b,c ，先看出 $n=3$。再由 $k+(n-1)=6$，得 $k=4$。於是有 $L_6(a,b,c)=h_4(a,b,c)$，其中 $a_1=a$ ， $a_2=b$ ， $a_3=c$ 。

一般地，對於 $L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^{\,k+n-1}}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$ ，有 n 個變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 。

$\dfrac{a_i^{\,k+n-1}}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$ 的分母的次方是 $n-1$，分子的次方是 $k+(n-1)$，相減所得的次方 k，即為化簡後所得的齊次式的次方，即 $L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 。

由於 L 與 h 的下標之差，恰為變數個數減 1，因此 $h-L$ 轉換公式，也可寫成：

$$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\text{，其中 } n\geq 2\text{ ， } k\geq n-1\text{。}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(a_k-a_j)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,n-2} & x_1\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,n-2} & x_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^{\,2} & \cdots & a_n^{\,n-2} & x_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,n-2} & a_1^{\,n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,n-2} & a_2^{\,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^{\,2} & \cdots & a_n^{\,n-2} & a_n^{\,n-1}\end{vmatrix}}$$ **(參考資料[1])**

例：取 $n=3$，則

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne k}}(a_k-a_j)}=\frac{x_1}{(a-b)(a-c)}+\frac{x_2}{(b-a)(b-c)}+\frac{x_3}{(c-a)(c-b)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & x_1\\ 1 & b & x_2\\ 1 & c & x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}$$

(其中 $a_1=a$ ， $a_2=b$， $a_3=c$)

說明：此公式的特徵，是將各分式的分子 x_i ,「放」到行列式的最右一行。

二、主要工作：

(一) 兩個變數的情形：

$$\begin{aligned}
&h_{n-1}(x+a,x+b)\\
&=L_n(x+a,x+b) && (h-L\text{ 轉換公式})\\
&=\frac{(x+a)^n-(x+b)^n}{(x+a)-(x+b)} && (\text{拉格朗日插值形式})\\
&=\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}x^k-\sum_{k=0}^{n}C_k^n b^{n-k}x^k}{a-b} && (\text{二項式定理})\\
&=\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k^n (a^{n-k}-b^{n-k})x^k}{a-b}\\
&=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\,\frac{a^{n-k}-b^{n-k}}{a-b}x^k\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^n\,\frac{a^{n-k}-b^{n-k}}{a-b}x^k+C_n^n\,\frac{a^{n-n}-b^{n-n}}{a-b}x^n\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^n\cdot L_{n-k}(a,b)x^k+0
\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^n\cdot h_{n-k-1}(a,b)x^k$$

將 n 用 $n+1$ 代入，得

$$h_n(x+a,x+b)=\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+1}\cdot h_{n-k}(a,b)x^k\text{ 。}$$

例：取 $n=3$，有

$$h_3(x+a,x+b)=\sum_{k=0}^{3}C_k^{4}\cdot h_{3-k}(a,b)x^k$$

$=C_0^4\cdot h_3(a,b)+C_1^4\cdot h_2(a,b)x+C_2^4\cdot h_1(a,b)x^2+C_3^4\cdot h_0(a,b)x^3$，印證了「前言」中的實驗結果。

(二) 三個變數的情形：

$$h_{n-2}(x+a,x+b,x+c)$$

$$=L_n(x+a,x+b,x+c)\qquad (h-L\text{ 轉換公式})$$

$$=\frac{(x+a)^n}{[(x+a)-(x+b)][(x+a)-(x+c)]}+\frac{(x+b)^n}{[(x+b)-(x+a)][(x+b)-(x+c)]}$$

$$+\frac{(x+c)^n}{[(x+c)-(x+a)][(x+c)-(x+b)]}\qquad (\text{拉格朗日插值形式})$$

$$=\frac{(x+a)^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+b)^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x+c)^n}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}x^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k^n b^{n-k}x^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k^n c^{n-k}x^k}{(c-a)(c-b)}\qquad (\text{二項式定理})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_k^n[\frac{a^{n-k}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n-k}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n-k}}{(c-a)(c-b)}]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}C_k^n[\frac{a^{n-k}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n-k}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n-k}}{(c-a)(c-b)}]x^k\qquad (\text{註 1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2} C_k^n \cdot L_{n-k}(a,b,c)x^k \qquad \text{(拉格朗日插值形式)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2} C_k^n \cdot h_{n-k-2}(a,b,c)x^k \qquad (h-L\text{轉換公式})$$

將 n 用 $n+2$ 代入，得

$$h_n(x+a,x+b,x+c)=\sum_{k=0}^{n} C_k^{n+2} \cdot h_{n-k}(a,b,c)x^k \text{ 。}$$

註 1：

當 $k=n-1$ 時，$\dfrac{a^{n-k}}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^{n-k}}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^{n-k}}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=0$$

。(由「記號與已知公式 4」)

當 $k=n$ 時，$\dfrac{a^{n-k}}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^{n-k}}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^{n-k}}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=0 \text{ 。}$$

(三) m 個變數的情形($m\geq 2$)：

$$h_{n-(m-1)}(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)$$

$$=L_n(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m) \qquad (h-L\text{轉換公式})$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{(x+a_i)^n}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}[(x+a_i)-(x+a_j)]}$$ (拉格朗日插值形式)

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{(x+a_i)^n}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^n a_i^{\,n-k}x^k}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$$ (二項式定理)

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}C_k^n\frac{a_i^{\,n-k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_k^n\frac{a_i^{\,n-k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}x^k$$ (算兩次原理)

$$=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot[\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\,n-k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-(m-1)}C_k^n\cdot[\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\,n-k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}]x^k$$ (註 2)

$$=\sum_{k=0}^{n-(m-1)}C_k^n\cdot L_{n-k}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$$ (拉格朗日插值形式)

$$=\sum_{k=0}^{n-m+1}C_k^n\cdot h_{n-k-m+1}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$$ ($h-L$ 轉換公式)

至此，可得

$$h_{n-(m-1)}(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)=\sum_{k=0}^{n-m+1}C_k^n\cdot h_{n-k-m+1}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$$

將 n 用 $n+m-1$ 代入，得

$h_n(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)=\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+m-1}\cdot h_{n-k}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$，將此式稱為完全對稱式的「變數平移展開式」。

註 2：

當 $n-m+2\le k\le n$ 時，有 $0\le n-k\le m-2$，

此時 $$\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\,n-k}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,m-2} & a_1^{\,n-k}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,m-2} & a_2^{\,n-k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_m & a_m^{\,2} & \cdots & a_m^{\,m-2} & a_m^{\,n-k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,m-2} & a_1^{\,m-1}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,m-2} & a_2^{\,m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_m & a_m^{\,2} & \cdots & a_m^{\,m-2} & a_m^{\,m-1}\end{vmatrix}}=0$$

(因為分子的行列式的最右一行，會和其左邊的 $m-1$ 行的其中某一行完全相同)。

(四) 回到單一變數：

由二項式定理出發，有 $(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}x^k$

注意到 $h_n(x+a)=(x+a)^n$ 與 $h_{n-k}(a)=a^{n-k}$

可得 $h_n(x+a)=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot h_{n-k}(a)x^k$

取 $a=a_1$，得 $h_n(x+a_1)=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot h_{n-k}(a_1)x^k$

這說明了 $h_n(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)=\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+m-1}\cdot h_{n-k}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$ 此一等式，當 $m=1$ 時也成立，以此而言，此式可以視為二項式定理的一種推廣。

參、結語：

一開始，先從

$h_3(x+a,x+b)=4x^3+6(a+b)x^2+4(a^2+ab+b^2)x+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$式子中的 4，6，4，1，看出二項式係數，推測應該和二項式定理有關。

接著運用 $h-L$ 轉換公式，將 $h_{n-1}(x+a,x+b)$ 轉換成拉格朗日插值形式 $L_n(x+a,x+b)=\dfrac{(x+a)^n-(x+b)^n}{(x+a)-(x+b)}$，找到了使用二項式定理的機會，展開之後再合併，再運用一次 $h-L$ 轉換公式，轉換回 $\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n \cdot h_{n-k-1}(a,b)x^k$，此一模式，也適用於有三個以上變數的情形，推導出：

$h_n(x+a_1,x+a_2,\cdots\cdots,x+a_m)=\sum_{k=0}^{n} C_k^{n+m-1}\cdot h_{n-k}(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)x^k$，其中 $n\geq 1$，$m\geq 1$，就此回答了在本文開頭所提到的問題。本篇文章的問題提出與公式推導，皆為筆者自行發想而完成，特此聲明。

參考資料：

陳建燁(2016)，**推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)**，高中數學學科中心電子報第 114 期，P1,6,11,12,13,14。