平方和的探討

蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

壹、前言

我們在國中畢氏定理單元中學到了 的關係式，及諸如(3, 4, 5)、(6, 8, 10)、(5, 12, 13)、(7, 24, 25)、(8, 15, 17)…等稱之為畢氏三元數的數對，所有的畢氏三元數(x, y, z)可用

$$\begin{cases} x=(a^2-b^2)l \\ y=2abl \\ z=(a^2+b^2)l \end{cases}$$

,a,b,l 為整數來表示，如表 1。當三數互質時，此三數稱為本原畢氏三元數。

表 1

a	2	3	4	5	3	5	7	4	5
b	1	1	1	1	2	2	2	3	3
l	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x	3	8	15	24	5	21	45	7	14
y	4	6	8	10	12	20	28	24	30
z	5	10	17	26	13	29	53	25	34

如果多加一個數呢？是否可以：

找到 x_1, x_2, y_1, y_2 四個正整數，使得 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ ………………… 式(1)

或者：

找到 x, y, z, w 四個正整數，使得 $x^2+y^2+z^2=w^2$ …………………… 式(2)

張文忠於基礎數論原理與題解一書第 267, 270 頁中給出式(1)、式(2)的所有解可由以下參數解分別求得：

1. 式(1) $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ 的所有正整數解可由兩組解 $x_1=2a-k$,

* 為本文通訊作者

$x_2 = |\dfrac{a^2-b^2}{k}-(a-b)-k|$,　$y_1 = 2b-k$，$y_2 = |\dfrac{a^2-b^2}{k}-(a-b)+k|$求得，其中 $a, b,$

k 為正整數，且 $k \mid a^2-b^2$

例如：由(a, b, k)=(5,2,1)得(x_1, x_2, y_1, y_2)=(9, 32, 4, 31)或(9, 17, 3, 19)滿足

$9^2+32^2=4^2+31^2$、$9^2+17^2=3^2+19^2$.

2. 式(2) $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有正整數解可表示為 $x=|2a-k|$,　$y=2b$,

$z=2|\dfrac{a^2+b^2}{k}-a|, w=|\dfrac{2(a^2+b^2)}{k}-2a+k|$,其中 a, b, k 為正整數，且 $k \mid a^2+b^2$.

例如：由(a, b, k)=(3,2,1)得(x, y, z, w)=(5, 4, 20, 21)滿足 $5^2+4^2+20^2=21^2$.

再如：由(a, b, k)=(5,3,2)得(x, y, z, w)=(8, 6, 24, 26)滿足 $8^2+6^2+24^2=26^2$.

本文將藉由 Excel 提供數據，給出滿足式(1)的解，藉由探索這些解的規律，發現可以利用兩個垂直向量得到滿足式(1)的參數解，進而得到式(2)及 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 的參數解。

貳、探究等值平方和的規律

本節先利用 Excel 求得符合式(1)的許多組解，將這些數對標示到座標平面上後，我們發現若將這些解適當的分組，則任一組解的點恰好都落在兩平行線上，若將負數也考慮進來，原先落在兩平行線上的點變成了落在同一直線上，更進一步觀察到由相似直角三角形在座標平面上堆疊所得的頂點座標提供滿足(1)式的參數解。探討如下。

利用 Excel 計算兩數平方和：$1^2+1^2=2$、$1^2+2^2=5$、$1^2+3^2=10$、⋯。節錄如表 2，表格之中的數字為上方、左方兩平方數的和，因為交換律的關係，只考慮表格中的下半三角形。

從表 2 中發現滿足(1)式的數對相當多，例如：

$$1^2+7^2=5^2+5^2=50$$

$$1^2+8^2=4^2+7^2=65$$

$$2^2+9^2=6^2+7^2=85$$

$$2^2+11^2=5^2+10^2=125$$

表 2

	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1^2	2									
2^2	5	8								
3^2	10	13	18							
4^2	17	20	25	32						
5^2	26	29	34	41	50					
6^2	37	40	45	52	61	72				
7^2	50	53	58	65	74	85	98			
8^2	65	68	73	80	89	100	113	128		
9^2	82	85	90	97	106	117	130	145	162	
10^2	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200

表 3

平方和	x_1	x_2	y_1	y_2
50	1	7	5	5
65	1	8	4	7
85	2	9	6	7
125	2	11	5	10
130	3	11	7	9
145	1	12	8	9
170	1	13	7	11
185	4	13	8	11
200	2	14	10	10
205	3	14	6	13
221	5	14	10	11
250	5	15	9	13
260	2	16	8	14
265	3	16	12	11
305	4	17	7	16

表 4

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
1	1	2										
2	4	5	8									
3	9	10	13	18								
4	16	17	20	25	32							
5	25	26	29	34	41	50						
6	36	37	40	45	52	61	72					
7	49	50	53	58	65	74	85	98				
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128			
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162		
10	100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	
11	121	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242
12	144	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265
13	169	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290
14	196	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317
15	225	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346
16	256	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377
17	289	290	293	298	305	314	325	338	353	370	389	410

將找到的數對，依照平方和的大小順序整理節錄如表 3。我們發現經過適當的分組，各組數對(x_1, x_2), (y_1, y_2)分布的位置相當有規律（如表 4），將這些數對轉換成座標，並標示至座標平面上，不難看出數對分布在平行直線上（如圖 1），相對於表 4 的向右下方延伸，圖 1 的點會向右上方延伸。若將負整數也考慮進來，則圖 1 中的點可向左下方延伸，如圖 2。

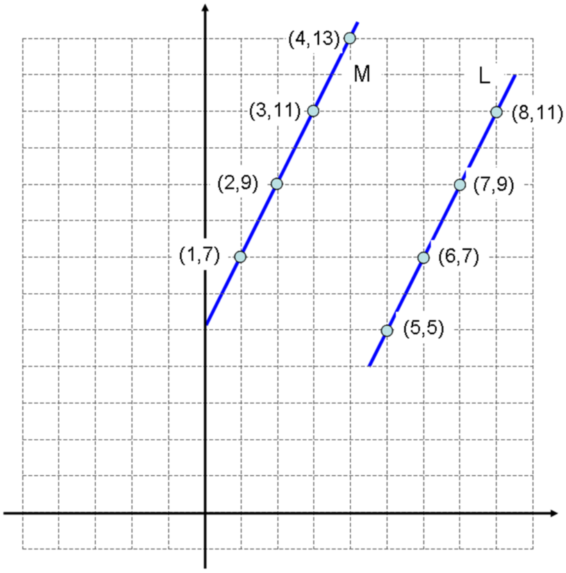

圖 1

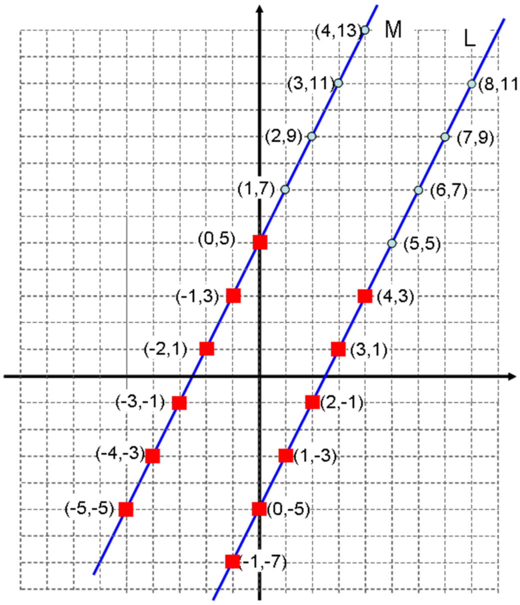

圖 2

觀察圖 2，M 上的(1, 7)除了和 L 上 (5, 5)有關係之外，也和 L 上的(-1, -7)有關(如圖 3-1)：

$$1^2+7^2=5^2+5^2=(-1)^2+(-7)^2=50,$$

相同的狀況也發生在其它的點：

(0, 5)、(4, 3)、(0,-5)三點滿足：$0^2+5^2=4^2+3^2=0^2+(-5)^2=25$；(如圖 3-2)

(-1, 3)、(3, 1)、(1,-3)三點：$(-1)^2+3^2=3^2+1^2=1^2+(-3)^2=10$。(如圖 3-3)

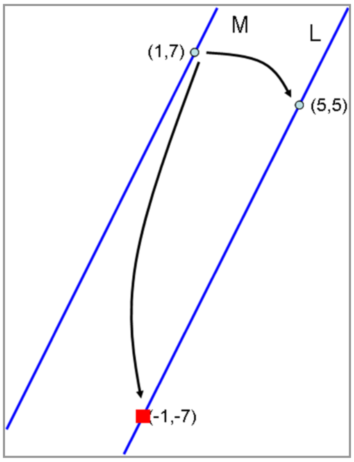

圖 3-1

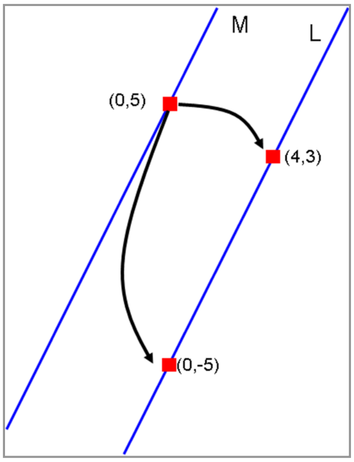

圖 3-2

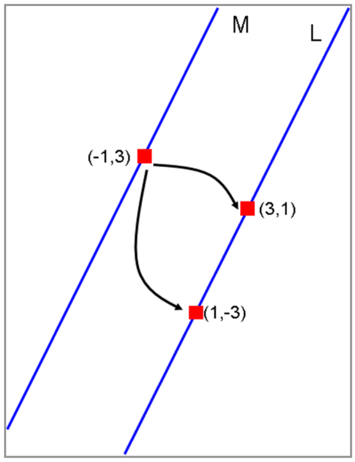

圖 3-3

由上述討論得到 L 上之點的對應關係，從中發現這些對應的點分別落在(2, -1)的兩邊，如圖 4，進而發現這些點恰好都是直角三角形的頂點，如圖 5。

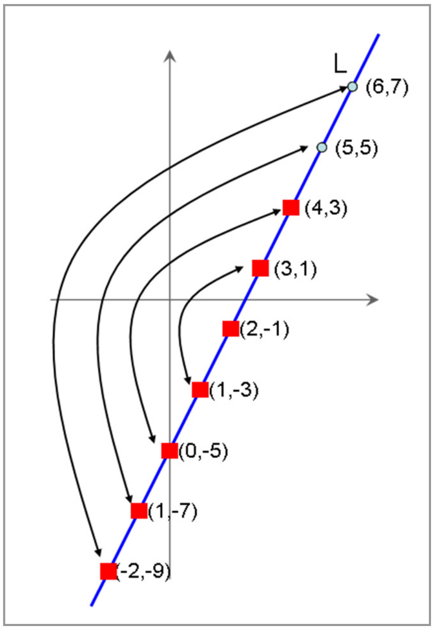

圖 4

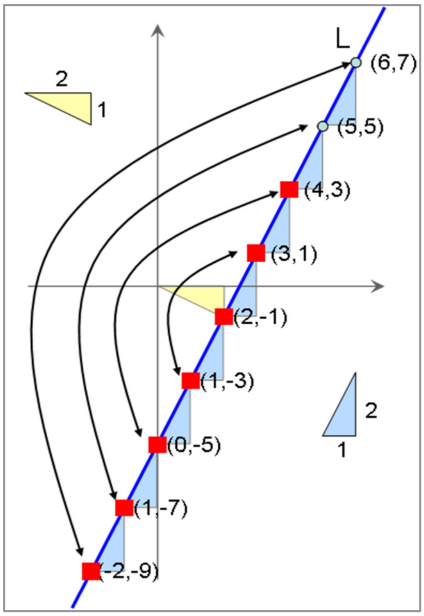

圖 5

同樣的，我們也得到類似的結果，如圖 6。

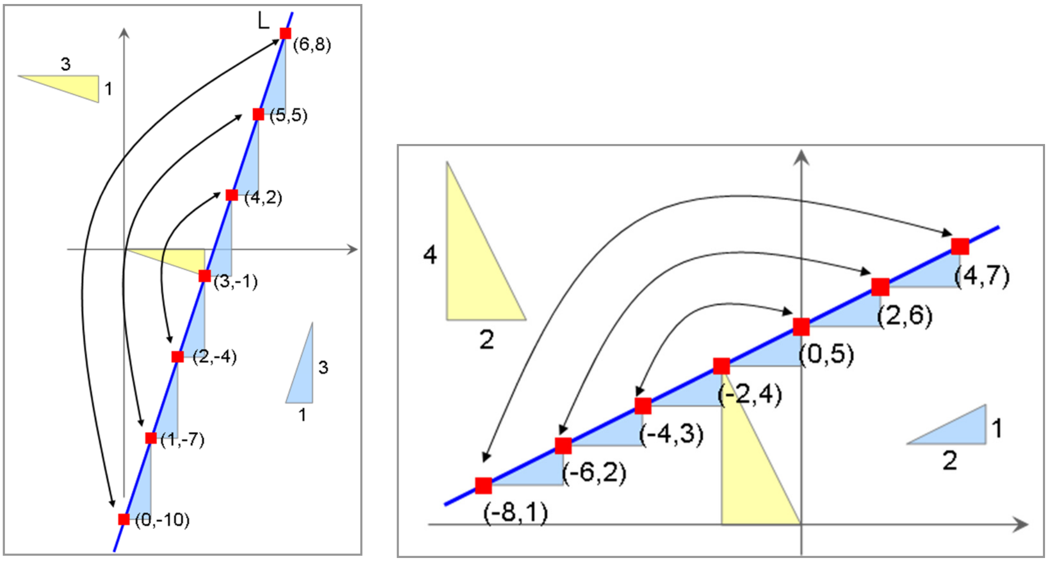

圖 6

進一步推得以下結果(如圖 7-1 及 7-2)：

$(m-3n,n+3m)$、$(m+3n,n-3m)$ 滿足：$(m-3n)^2+(n+3m)^2=(m+3n)^2+(n-3m)^2$

$(ms-3n,ns+3m)$、$(ms+3n,ns-3m)$ 滿足：

$(ms-3n)^2+(ns+3m)^2=(ms+3n)^2+(ns-3m)^2$.

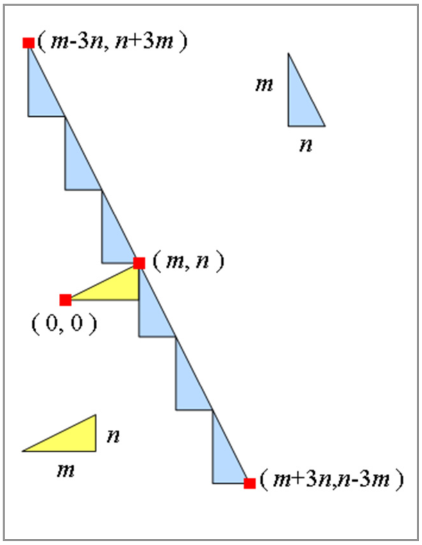

圖 7-1

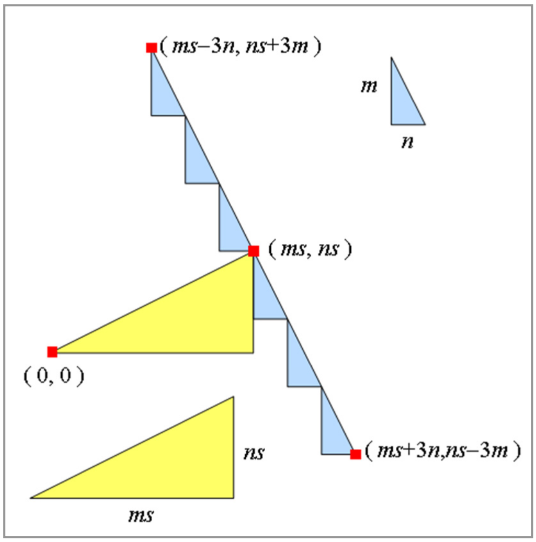

圖 7-2

從以上的例子，我們得到：藉由相似直角三角形在座標平面上堆疊所得的三角形頂點座標滿足式(1)的解。

參、等值平方和與圓、向量的關聯

上節相似直角三角形堆疊的圖形讓我們聯想到弦與弦心距，如圖 8。在圖 8 中，由原點 O(0, 0)出發至 P(m, n)後，沿著與 $\overline{OP}$ 垂直方向的兩端前進相同的距離，得 A(m-n, m+n)、B(m+n, n-m)兩點落在同一個圓上，此時，$\overline{AB}$ 為弦、$\overline{OP}$ 為弦心距，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為半徑 r，由 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=r^2$ 得兩點的座標滿足(1)式。同理，C(m-2n, m+2n)、D(m+2n, n-2m)兩點的座標亦滿足(1)式。

一般而言，平面上任意直線 L，過原點 O 作直線 M 滿足 $L\perp M$，且兩直線 L、M 相交於 P 點，若 L 上任意兩點 A(x_1, x_2)、B(y_1, y_2)的中點為 P，則此兩點的座標滿足 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$。若以向量觀點來表示，上述的說法可調整為：給定任意向量 $\overrightarrow{u}=(as,bs)$，

取$\vec{v}=(-b,a)$滿足$\vec{u}\perp\vec{v}$，因為：

$$|\ \vec{u}-t\vec{v}\ |=|\ \vec{u}+t\vec{v}\ |，$$

得：$\vec{u}-t\vec{v}=(x_1,\ x_2)=(as+bt,bs-at)$，$\vec{u}+t\vec{v}=(y_1,\ y_2)=(as-bt,bs+at)$ 滿足 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ 得到以下結論：

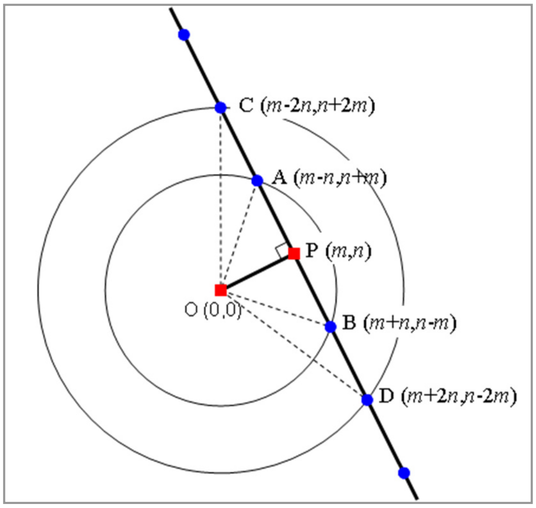

圖 8

> 引理 1：
>
> $(x_1, x_2, y_1, y_2)=(as+bt, bs-at, as-bt, bs+at)$ 滿足 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$.

顯然，x_1, x_2, y_1, y_2 滿足式(1)若且唯若 rx_1, rx_2, ry_1, ry_2 滿足式(1)，不失一般性，僅討論 x_1, x_2, y_1, y_2 互質的情形。另外，引理 1 之中，若 a, b 的最大公因數 $d\neq 1$, 則 d 為 x_1, x_2, y_1, y_2 的公因數（即四數不互質），故不妨令 a, b 互質。再者，令 $s=x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$，依 s 的奇偶性討論如下表，可知僅有 x_1、x_2 為一奇一偶且 y_1、y_2 為一奇一偶及四數皆為奇數兩種情形。

s	x_1、x_2	y_1、y_2	討論
奇數	一奇一偶	一奇一偶	如：$16^2+3^2=12^2+11^2$。
偶數	皆為偶數	皆為偶數	四數不互質，矛盾！
	皆為偶數	皆為奇數	令 $x_1=2m$, $x_2=2n$, $y_1=2p+1$, $y_2=2q+1$,

			得 $s=x_1^2+x_2^2=4(m^2+n^2)$ 是 4 的倍數； 且 $s=y_1^2+y_2^2=4(p^2+p+q^2+q)+2$ 不是 4 的倍數，矛盾！
	皆為奇數	皆為偶數	同理，$x_1^2+x_2^2$ 不是 4 的倍數、$y_1^2+y_2^2$ 是 4 的倍數，矛盾！
	皆為奇數	皆為奇數	如：$1^2+13^2=7^2+11^2$。

以下探討 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ 的所有互質的正整數解可否能由 $\{x_1,x_2\}=\{as+bt,bs-at\}$，求得（其中 a, b, s, t 為正整數且 a, b 互質）？我們的想法為：對於任意滿足 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ 的四個互質的正整數 x_1, x_2, y_1, y_2（不妨令 $x_1=\max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$），若必能找到四個正整數 a, b, s, t（a, b 互質），使得 $\{as+bt,bs-at\}=\{x_1,x_2\}$，$\{as-bt,bs+at\}=\{y_1,y_2\}$ 即可得證。不妨先設 $(x_1,x_2,y_1,y_2)=(as+bt,bs-at,as-bt,bs+at)$，我們將具體給出 a, b, s, t 之值，分兩個階段討論如下：

(1) 先檢驗 as, bs, at, bt 皆為正整數：

由由 $\begin{cases} as+bt=x_1 \\ bs-at=x_2 \\ as-bt=y_1 \\ bs+at=y_2 \end{cases}$ 化簡得 $\begin{cases} as=\dfrac{x_1+y_1}{2} \\ bs=\dfrac{x_2+y_2}{2} \\ at=\dfrac{y_2-x_2}{2} \\ bt=\dfrac{x_1-y_1}{2} \end{cases}$；

因 $x_1=\max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$，即 $x_1>y_1$，由 $y_2^2-x_2^2=x_1^2-y_1^2>0$ 得 y2> x2，故得 as, bs, at, bt 皆為正數；再藉由前述所得 x_1, x_2, y_1, y_2 之奇偶性驗證得 as, bs, at, bt 皆為正整數（如下表），另外，進而歸納 x_1、y_1 同奇偶性且 x_2、y_2 同奇偶性。

項目	討論
x_1、x_2 一奇一偶 y_1、y_2 一奇一偶	依 x_1 的奇偶數討論如下： (1)當 x_1 為偶數：先得 x_2 為奇數，再令 y_1 為偶數，則 y_2 為奇數；

	(2)當 x_1 為奇數：先得 x_2 為偶數，再令 y_1 為奇數，則 y_2 為偶數；皆得 as, bs, at, bt 皆為正整數。
x_1、x_2、y_1、y_2 皆為奇數	得 as, bs, at, bt 皆為正整數。

（註：經由本段討論得知，當有四個正整數滿足式(1)時，該如何決定 x_1, x_2, y_1, y_2 分別為何？方法為：先令其中的最大值為 x_1，同時得 x_2，再依照 x_1、y_1 同奇偶性得 y_1，同時得 y_2。而當四數皆為奇數時，則會有兩組 (x_1, x_2, y_1, y_2)。

例如：已知 $16^2+3^2=12^2+11^2$ 時，令 x_1 為 16, 3, 12, 11 中的最大值，故 x_1=16，同時得 x_2=3；因 x_1、y_1 之奇偶性相同，故 y_1=12，同時得 y_2=11，故(x_1, x_2, y_1, y_2) =(16,3,12,11)。

再如：已知 $1^2+13^2=7^2+11^2$ 時，先得 x_1=13 再得 x_2=1，由 x_1、y_1 的奇偶性得 y_1=11 或 7 再得 y_2=7 或 11, 故得(x_1, x_2, y_1, y_2) =(13,1,11,7)或(13,1,7,11)兩種情形。）

(1) a, b, s, t 之值：

因為 a, b 互質且 as, bs 為正整數，由 $\begin{cases} as=\dfrac{x_1+y_1}{2} \\ bs=\dfrac{x_2+y_2}{2} \end{cases}$，得 $s=\gcd(\dfrac{x_1+y_1}{2},\dfrac{x_2+y_2}{2})$；

同理，因為 a, b 互質且 at, bt 為正整數，由 $\begin{cases} at=\dfrac{y_2-x_2}{2} \\ bt=\dfrac{x_1-y_1}{2} \end{cases}$，得 $t=\gcd(\dfrac{y_2-x_2}{2},\dfrac{x_1-y_1}{2})$；

再將 s 代入 $\begin{cases} a=\dfrac{x_1+y_1}{2s} \\ b=\dfrac{x_2+y_2}{2s} \end{cases}$，得 $a=\dfrac{\dfrac{x_1+y_1}{2}}{\gcd(\dfrac{x_1+y_1}{2},\dfrac{x_2+y_2}{2})}$、$b=\dfrac{\dfrac{x_2+y_2}{2}}{\gcd(\dfrac{x_1+y_1}{2},\dfrac{x_2+y_2}{2})}$；

其中，因為 $\gcd(\dfrac{x_1+y_1}{2},\dfrac{x_2+y_2}{2})$ 是 $\dfrac{x_1+y_1}{2}$ 和 $\dfrac{x_2+y_2}{2}$ 的因數，故 a, b 皆為正整數。

即得證：必能找到正整數 a, b, s, t 使得 $(as+bt, bs-at, as-bt, bs+at)=(x_1, x_2, y_1, y_2)$。

（註：若將 t 代入$\begin{cases} at = \dfrac{y_2 - x_2}{2} \\ bt = \dfrac{x_1 - y_1}{2} \end{cases}$，得 $a = \dfrac{\frac{y_2 - x_2}{2}}{\gcd(\frac{y_2 - x_2}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2})}$、$b = \dfrac{\frac{x_1 - y_1}{2}}{\gcd(\frac{y_2 - x_2}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2})}$

與將 s 代入兩式所得的 a, b 相同，詳細說明如附錄。）

以實例說明如下：

例：由 $16^2 + 3^2 = 12^2 + 11^2$，根據前述結論令

$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (16,3,12,11) = (as + bt, bs - at, as - bt, bs + at)$，則正整數 a, b, s, t 為何？

解：$s = \gcd(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}) = \gcd(14,7) = 7$，$t = \gcd(\frac{y_2 - x_2}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}) = \gcd(4,2) = 2$

$a = \dfrac{\frac{x_1 + y_1}{2}}{\gcd(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2})} = \dfrac{14}{7} = 2$，$b = \dfrac{\frac{x_2 + y_2}{2}}{\gcd(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2})} = \dfrac{7}{7} = 1$即為所求。

例：已知 $1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$，根據前述結論令

$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (13,1,7,11) = (as + bt, bs - at, as - bt, bs + at)$，則正整數 a, b, s, t 為何？

解：$s = \gcd(10,6) = 2$，$t = \gcd(5,6) = 1$，$a = \dfrac{10}{2} = 5$，$b = \dfrac{6}{2} = 3$即為所求。

因此得到：

> 定理 2：
>
> $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ 的所有正整數解由 $x_1 = as + bt$，$x_2 = bs - at$，$y_1 = as - bt$，$y_2 = bs + at$ 求得，x_1=max{ x_1, x_2, y_1, y_2}、x_1 與 y_1 同奇偶性且 a, b, s, t 為正整數。

（註：對於任意滿足式(1)的四個正整數，當令 x_1=max{ x_1, x_2, y_1, y_2}、x_1 與 y_1 同奇偶性時，必有四個正整數 a, b, s, t 滿足 $x_1 = as + bt$，$x_2 = bs - at$，$y_1 = as - bt$，$y_2 = bs + at$，其中 $bs - at$，$as - bt$ 皆為正數，故定理 2 中無須令 $x_2 = |bs - at|$，$y_1 = |as - bt|$。）

以幾何方式說明上述結果：當四數滿足式(1)時，根據 x_1 為四數之中的最大值及 x_1, y_1 同奇偶性得 (x_1, x_2, y_1, y_2)，進而得兩個格子點 $A(x_1, x_2)$ 及 $B(y_1, y_2)$ (註：x, y 座標皆為整數的點稱為格子點) ，再由奇偶性得 $\overline{AB}$ 中點 $M(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2})$ 亦為格子點。由點座標計算得 $\overrightarrow{OM} = (\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2})$，$\overrightarrow{MA} = (\frac{x_1-y_1}{2}, \frac{x_2-y_2}{2})$，再由內積 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MA} = \frac{x_1^2-y_1^2}{4} + \frac{x_2^2-y_2^2}{4} = 0$ 得 $\overrightarrow{OM}$ 、$\overrightarrow{MA}$ 兩向量垂直，進而假設兩個互相垂直的向量 $\overrightarrow{u} = (a,b)$ 及 $\overrightarrow{v} = (b,-a)$，其中 a, b 互質，並設 $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = s\,\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{MA} = t\,\overrightarrow{v} \end{cases}$，先得 $\begin{cases} (as, bs) = (\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}) \\ (bt, -at) = (\frac{x_1-y_1}{2}, \frac{x_2-y_2}{2}) \end{cases}$，再得 $\begin{cases} s = \gcd(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}) \\ t = \gcd(\frac{y_2-x_2}{2}, \frac{x_1-y_1}{2}) \end{cases}$，將 s 代入上式（或將 t 代入下式）即得 a, b 之值。

肆、 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的參數式

接著考慮是否可以：

找到 x, y, z, w 四個正整數，使得 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 　　式(2)

先考慮是否可以：

找到 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ 六個整數，使得 $x_1^2+y_1^2+z_1^2 = x_2^2+y_2^2+z_2^2$ 　　式(3)

在三維空間中，給定任意向量 $\vec{u} = (as, bs, cs)$，取 $\vec{v} = (p, q, r)$ 滿足 $\vec{u} \perp \vec{v}$，則：

$\vec{u} + t\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) = (as+pt, bs+qt, cs+rt)$,

$\vec{u} - t\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = (as-pt, bs-qt, cs-rt)$ 滿足式(3)。

因為 $\vec{u}\perp\vec{v}$，兩向量內積為 0，可得 $ap+bq+cr=0$，令 $r=-\dfrac{ap+bq}{c}$，故得：

$$\vec{u}+t\vec{v}=(x_1, y_1, z_1)=(as+pt, bs+qt, cs-\frac{ap+bq}{c}t),$$

$$\vec{u}-t\vec{v}=(x_2, y_2, z_2)=(as-pt, bs-qt, cs+\frac{ap+bq}{c}t).$$

因僅考慮整數解，將上述兩向量乘以 c，得到：

$$(x_1, y_1, z_1)=(acs+pct, bcs+cqt, c^2s-apt-bqt)$$ 、

$$(x_2, y_2, z_2)=(acs-pct, bcs-cqt, c^2s+apt+bqt)$$ 滿足式(3)式。

歸納結論如下：

引理 3：

$(x_1, y_1, z_1)=(acs+pct, bcs+cqt, c^2s-apt-bqt)$,

$(x_2, y_2, z_2)=(acs-pct, bcs-cqt, c^2s+apt+bqt)$

滿足 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$.

接著討論(2)式的參數解，由結論 2，若令 $x_2=y_2=0$，即可求得滿足(2)式的解，推導如下：

令 $\begin{cases} x_2=acs-pct=0 \\ y_2=bcs-cqt=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} t=\dfrac{as}{p} \\ q=\dfrac{bp}{a} \end{cases}$，再代入結論 2，

得 $\begin{cases} (x_1, y_1, z_1)=(2acs, 2bcs, c^2s-a^2s-b^2s) \\ (x_2, y_2, z_2)=(0, 0, c^2s+a^2s+b^2s) \end{cases}$

即得 $(x, y, z, w)=(2ac, 2bc, c^2-a^2-b^2, c^2+a^2+b^2)$ 滿足 $x^2+y^2+z^2=w^2$。

引理 4：

$$(x,y,z,w)=(2ac,2bc,c^2-a^2-b^2,c^2+a^2+b^2) \text{ 滿足 } x^2+y^2+z^2=w^2 \text{。}$$

根據引理 4，給定三個數 1, 2, 4，可以得到三個數對如下：

當 a=4, b=2, c=1, 得到數對 $(8,4,-19,21)$ 滿足 $8^2+4^2+(-19)^2=21^2$；

當 a=1, b=4, c=2, 得到數對 $(4,16,-13,21)$ 滿足 $4^2+16^2+(-13)^2=21^2$；

當 a=1, b=2, c=4, 得到數對 $(8,16,11,21)$ 滿足 $8^2+16^2+11^2=21^2$；

亦即得到一個平方數 21^2 的三種三個平方數之和的表示法：

$$21^2=8^2+4^2+19^2=4^2+16^2+13^2=8^2+16^2+11^2$$

若僅考慮四數 x,y,z,w 互質的情形，依 x, y, z 之中奇數、偶數個數，列表討論如下：

x, y, z	w	討論
3 奇數	奇數	不妨令 $x=2p+1$, $y=2q+1$, $z=2r+1$, $w=2s+1$, 得 $x^2+y^2+z^2=4(p^2+p+q^2+q+r^2+r)+3$； 且 $w^2=4(s^2+s)+1$，矛盾！
2 奇數、1 偶數	偶數	不妨令 $x=2p+1$, $y=2q+1$, $z=2r$, $w=2s$, 得 $x^2+y^2+z^2=4(p^2+p+q^2+q+r^2)+2$； 且 $w^2=4s^2$，矛盾！
1 奇數、2 偶數	奇數	不妨令 x, y 為偶數、z 為奇數，且得 w 為奇數， 即 $(x,y,z,w)=(2ac,2bc,c^2-a^2-b^2,c^2+a^2+b^2)$， 由 $z=c^2-a^2-b^2$ 為奇數， 得 a, b, c 必為 3 奇數或 1 奇數、2 偶數的情形。
3 偶數	偶數	四數不互質，矛盾！

接著思考，引理 4 是否能得到滿足 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有解？同理，考慮給定互質的四數 x,y,z,w 是否能找到三個正整數 a, b, c 滿足 $\begin{cases} 2ac=x \\ 2bc=y \\ c^2-a^2-b^2=z \\ c^2+a^2+b^2=w \end{cases}$，先得 $c=\pm\sqrt{\dfrac{z+w}{2}}$，

再得 $a=\pm\frac{x}{\sqrt{2z+2w}}$ 、 $b=\pm\frac{y}{\sqrt{2z+2w}}$ ，若取正數，

則 $(a,b,c)=(\frac{x}{\sqrt{2z+2w}},\frac{y}{\sqrt{2z+2w}},\sqrt{\frac{z+w}{2}})$ ，僅有在滿足 $\frac{z+w}{2}$ 為完全平方數且 $\sqrt{2z+2w}$ 是 x 及 y 的公因數，才能得到 a, b, c 為三個正整數。亦即給定正整數 a, b, c，引理 4 無法得到 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有解。

例：由 $36^2+24^2+23^2=49^2$，解 $\begin{cases}2ac=36\\2bc=24\\c^2-a^2-b^2=23\\c^2+a^2+b^2=49\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=3\\b=2\\c=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\b=-2\\c=-6\end{cases}$ (不合)。

例：由 $8^2+4^2+19^2=21^2$，解 $\begin{cases}2ac=8\\2bc=4\\c^2-a^2-b^2=19\\c^2+a^2+b^2=21\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=\sqrt{5}/5\\b=\sqrt{5}/10\text{(不合)}\\c=2\sqrt{5}\end{cases}$

或 $\begin{cases}a=-\sqrt{5}/5\\b=-\sqrt{5}/10\text{(不合)}\\c=-2\sqrt{5}\end{cases}$。

我們發現，若將引理 4 修正為 $(x,y,z,w)=(2a,2b,c-\frac{a^2+b^2}{c},c+\frac{a^2+b^2}{c})$ 滿足 $x^2+y^2+z^2=w^2$，則給定互質的四數 x, y, z, w，解 $\begin{cases}2a=x\\2b=y\\c-\frac{a^2+b^2}{c}=z\\c+\frac{a^2+b^2}{c}=w\end{cases}$，即得 $\begin{cases}a=\frac{x}{2}\\b=\frac{y}{2}\\c=\frac{z+w}{2}\end{cases}$，

而因為 x, y 為偶數、z, w 為奇數，故得 a, b, c 為正整數（且 c 為 a^2+b^2 的因數）。

例如：由 $36^2+24^2+23^2=49^2$，解 $\begin{cases} 2a=36 \\ 2b=24 \\ c-\dfrac{a^2+b^2}{c}=23 \\ c+\dfrac{a^2+b^2}{c}=49 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=18 \\ b=12 \\ c=36 \end{cases}$。

例如：由 $8^2+4^2+19^2=21^2$，解 $\begin{cases} 2a=8 \\ 2b=4 \\ c-\dfrac{a^2+b^2}{c}=19 \\ c+\dfrac{a^2+b^2}{c}=21 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=20 \end{cases}$。

當 $c^2<a^2+b^2$ 時，$z=c-\dfrac{a^2+b^2}{c}=\dfrac{c^2-a^2-b^2}{c}<0$，因此，不妨令 $z=|c-\dfrac{a^2+b^2}{c}|$。

因此得到：

> 定理 5：
>
> $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有正整數解由 $x=2a$，$y=2b$，$z=|c-\dfrac{a^2+b^2}{c}|$，$w=c+\dfrac{a^2+b^2}{c}$ 求得，其中 $\gcd(x,y,z)=1$, a, b, c 為正整數且 $c\,|\,a^2+b^2$。

（註：滿足 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的四個正整數 x, y, z, w 之中，x, y, z 必為二偶一奇，故定理 5 中 x, y 為偶數、z 為奇數。）

伍、$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 的參數式

本節考慮 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 的情形：根據前節結果，令 $x_n=a_n-\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}{a_n}$, $x=a_n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}{a_n}$,計算

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = x^2 - x_n^2 = (x+x_n)(x-x_n) = 2a_n \times \frac{2\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n} = 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (2a_i)^2,$$

即 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (2a_i)^2$,不妨再令 $x_i = 2a_i$， $i = 1 \sim n-1$，即得

$(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x) = (2a_1, 2a_2, ..., 2a_{n-1}, a_n - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n}, a_n + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n})$ 滿足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$。得到以下結論：

> 引理 6：
>
> $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x) = (2a_1, 2a_2, ..., 2a_{n-1}, a_n - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n}, a_n + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n})$ 滿足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 。

同理，引理 6 能得到所有滿足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 的解嗎？先看 n=4 的狀況，考慮若五個整數 x_1, x_2, x_3, x_4, x 滿足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ ，是否能找到四個正整數 a_1, a_2, a_3, a_4 使得

$$\begin{cases} 2a_1 = x_1 \\ 2a_2 = x_2 \\ 2a_3 = x_3 \\ a_4 - \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_4} = x_4 \\ a_4 + \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_4} = x \end{cases}$$

？考慮奇偶性如下表：

x_1, x_2, x_3, x_4	X	討論
4 奇數	偶數	若令 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4 + x}{2})$，則此四數不是正整數。 考慮令 $y_i = 2x_i$ 、 $y = 2x$ 皆為偶數， 則得 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{2}, \frac{y_3}{2}, \frac{y_4 + y}{2})$ 皆為正整數。

x_1, x_2, x_3, x_4	X	討論
		即由四個正整數 a_1,a_2,a_3,a_4 得滿足 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^2$ 再由 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^2$ 得 $\sum_{i=1}^{n} (2x_i)^2 = (2x)^2$ 化簡即 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 。 例如：當 $1^2+5^2+17^2+29^2=34^2$ 時， 先轉換為 $2^2+10^2+34^2+58^2=68^2$ ， 解 $\begin{cases} 2a_1 = 2 \\ 2a_2 = 10 \\ 2a_3 = 34 \\ a_4 - \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_4} = 58 \\ a_4 + \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_4} = 68 \end{cases}$ 得 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,5,17,63)$. 即由 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,5,17,63)$ 得 $2^2+10^2+34^2+58^2=68^2$ ， 化簡得 $1^2+5^2+17^2+29^2=34^2$ 。
3 奇數、1 偶數	奇數	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4h+3$ 、 $x^2 = 4k+1$ ，矛盾！
2 奇數、2 偶數	偶數	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4h+2$ 、 $x^2 = 4k$ ，矛盾！
1 奇數、3 偶數	奇數	不妨令 x_1, x_2, x_3 為偶數、x_4, x 為奇數， 故得 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{2},\frac{x+x_4}{2})$ 皆為正整數。
4 偶數	偶數	五數不互質，矛盾！

當 x_1, x_2, x_3 不全為偶數時，無法由引理 6 找到四個正整數 a_1,a_2,a_3,a_4 滿足 $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x^2$，但是若令 $y_i = 2x_i$, $y = 2x$，則可找到四個正整數滿足 $\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = y^2$，進而得 $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x^2$（如由 $2^2+10^2+34^2+58^2=68^2$ 得到 $1^2+5^2+17^2+29^2=34^2$ 的例子），我們進而考慮：

$$
\begin{aligned}
& (y_1, \quad y_2, \quad ..., \quad y_{n-1}, \quad y_n, \quad y) \\
= & (2x_1, \quad 2x_2, \quad ..., \quad 2x_{n-1}, \quad 2x_n, \quad 2x) \\
= & (2a_1, \quad 2a_2, \quad ..., \quad 2a_{n-1}, \quad a_n - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n}, \quad a_n + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{a_n})
\end{aligned}
$$

即考慮當 $n+1$ 個正整數 $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x$ 滿足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$，是否能找到 n 個正整數 $a_1, a_2, ..., a_n$ 使得 $\begin{cases} a_i = x_i, i = 1 \sim n-1 \\ \dfrac{a_n}{2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n} = x_n \\ \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n} = x \end{cases}$？僅需檢驗 $\dfrac{a_n}{2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n}, \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n}$ 皆為正整數，將

$a_i = x_i, i = 1 \sim n-1$ 及 $a_n = x_n + x$ 代入計算檢驗得

$\dfrac{a_n}{2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n} = \dfrac{x_n + x}{2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{2(x_n + x)} = \dfrac{x_n + x}{2} - \dfrac{x^2 - x_n^2}{2(x_n + x)} = x_n$ 為正整數，同理 $\dfrac{a_n}{2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n} = x$ 為正整數。得到以下結論：

定理 7：

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 的所有正整數解由

$$
(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x) = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \ \left| \frac{a_n}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n} \right|, \frac{a_n}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2a_n})
$$

求得，其中 $a_1, a_2, ..., a_n$ 為正整數且 $a_n \mid \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$。

陸、結論

本文逐步探討能求得 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$ 所有正整數解的參數式，事後來看，直接由兩個垂直向量即可得到本文結果，然則筆者在初探此問題時，從 Excel 所得數值中發現相等的值落在多組平行線上時的訝異感與進而摸索出相似直角三角形及兩垂直線的過程頗令人印象深刻。

另一個有趣的問題是，若 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$, 其中 $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x$ 皆為正整數，是否存在 n 個正整數 $y_1, \ldots, y_n$ 滿足 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = x^2$, 其中 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$？留待後續探討。

附錄：

以下證明當 $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ ，其中 $x_1=\max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$、$x_1$ 與 y_1 同奇偶性時，可得：

$$\frac{\frac{x_1+y_1}{2}}{\gcd(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2})} = \frac{\frac{y_2-x_2}{2}}{\gcd(\frac{y_2-x_2}{2},\frac{x_1-y_1}{2})}$$

$$\frac{\frac{x_2+y_2}{2}}{\gcd(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2})} = \frac{\frac{x_1-y_1}{2}}{\gcd(\frac{y_2-x_2}{2},\frac{x_1-y_1}{2})}$$ 。

證明：假設 $\frac{x_1+y_1}{2} = dm$ ，$\frac{x_2+y_2}{2} = dn$ ，$\frac{y_2-x_2}{2} = d'm'$ ，$\frac{x_1-y_1}{2} = d'n'$ ，

$$\gcd(m,n) = \gcd(m',n') = 1,$$

算得 $\frac{\frac{x_1+y_1}{2}}{\gcd(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2})} = m,\quad \frac{\frac{y_2-x_2}{2}}{\gcd(\frac{y_2-x_2}{2},\frac{x_1-y_1}{2})} = m',$

$$\frac{\frac{x_2+y_2}{2}}{\gcd(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2})}=n,\quad \frac{\frac{x_1-y_1}{2}}{\gcd(\frac{y_2-x_2}{2},\frac{x_1-y_1}{2})}=n',$$

故僅需證明 $m=m'$ 且 $n=n'$ 。

先由 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ 得 $x_1^2-y_1^2=y_2^2-x_2^2$，再得

$$\frac{x_1+y_1}{2}\times\frac{x_1-y_1}{2}=\frac{x_2+y_2}{2}\times\frac{y_2-x_2}{2}$$

將假設之符號代入上式得 $dmd'n'=dnd'm'$，即得 $mn'=nm'$，

又因 $\gcd(m,n)=\gcd(m',n')=1$，故得 $m=m'$ 且 $n=n'$ ，證畢。

參考文獻：

張文忠(2002)，**基礎數論：原理及題解**，台北市：中央圖書。

陳揚叡(2008)，**N 元二次不定方程式的整數解探討**，台灣 2008 年國際科學展覽會數學科作品。(取自：https://www.ntsec.edu.tw/FileAtt.ashx?id=2843)