最小平方法還需要交代的一件事

李政豐
國立竹南高級中學

壹、緣起

跟數學老師談起最小平方法的教學，有幾位老師總覺得怪怪的，有交代不清的感覺。比較優秀的學生也覺得，在標準化坐標系裡求得的迴歸線，殘差平方和不同，測試殘差平方和的直線也不同，而且計算兩坐標系的殘差平方和與平移、x 座標的標準化無關，怎麼知道在標準化坐標系求得的迴歸線，由座標變換：$x' = \dfrac{(x - \mu_X)}{\sigma_X}$，$y' = \dfrac{(y - \mu_Y)}{\sigma_Y}$ 代入就能得到原始坐標系的迴歸線？是不是課本太簡化了，我也不曾在外國的教材裡，看到像我們課本這麼簡化的作法。

最小平方法是一個很有價值的學習素材，自從 97 公布的高中數學課綱加入最小平方法開始，99 年起教科書就引入相關解說與證明，因為高一下尚未學微分，因此當年最小平方法的證明都用雙配方來切入，這很複雜難教(本文甲)。

到 102 修正的微調課綱， 最小平方法各家的寫法又有很大幅度的簡化，利用標準化坐標系作雙配方，最小平方法於是變得好記，但是課文內沒有證明，證明全都放在附錄。學生也不容易了解(本文乙)。

這兩種教學方式的差異，學生最難了解的是：標準化坐標系與原始坐標系的迴歸線，兩者的殘差平方和，有什麼關係存在?

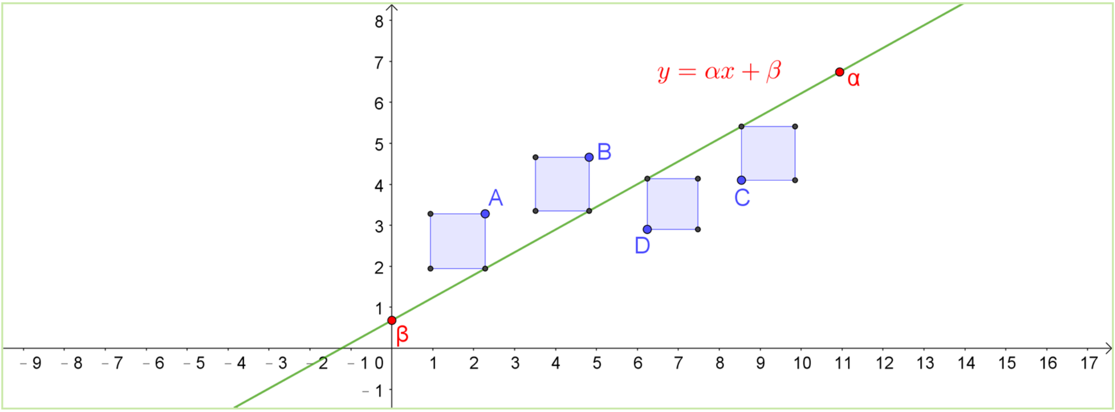
這一點，教科書似乎沒有探討。所幸資訊科技融入教學，可以用 GGB 來為我們解決這個困難，靠著簡單的操作，就能讓學生一目了然，而且能夠印象深刻(本文丙)。如果能把這一段文章加在課本附錄，相信學生的疑惑，將可迎刃而解，這是我提筆為文最重要的目的。

貳、本文

(甲) 97 課綱的寫法

給定一組二維資料 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\ldots(x_n,y_n)$，如何在平面上找到一條直線 $y=\alpha x+\beta$，即找到一組(α,β)會使得殘差平方和 $s=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\alpha x_i+\beta)]^2$ 為最小，此時的 $y=\alpha x+\beta$ 就叫做最適合直線(Fitline)或迴歸直線。

亦即在每個點 (x_i,y_i) 作鉛直線，與 $y=\alpha x+\beta$ 相交，其交點 $(x_i,\alpha x_i+\beta)$ 與 (x_i,y_i) 的垂直距離平方的總和，稱為殘差平方和 s。



當資料只有 4 個點，上圖中四個藍色正方形的面積和，即為殘差平方和 $s=\sum_{i=1}^{4}[y_i-(\alpha x_i+\beta)]^2$，當我們適度的改變直線的斜率 α ，與 y 截距 β，會使得殘差平方和 s 為最小，此時 $y=\alpha x+\beta$ 就叫最適合直線或迴歸直線。上述求得迴歸直線的過程與方法，就叫做最小平方法。

要完成導出迴歸直線的過程，我們必須具有 3 項先備知識：

由標準差公式 $\sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}{n}} \Leftrightarrow n({\sigma_X}^2)=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\mu_X\sum_{i=1}^{n}x_i+n(\mu_X)^2$

即 $n({\sigma_X}^2)=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-n(\mu_X)^2$

則 $\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=n{\sigma_X}^2+n{\mu_X}^2$. .... (a)

同理可得 $\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2=n{\sigma_Y}^2+n{\mu_Y}^2$. .... (b)

由相關係數在原始坐標系的定義：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)^2}}$

或由相關係數在標準坐標系的定義：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}'{y_i}'}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_X}{\sigma_X})(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y})}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

由 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)-\mu_X\sum_{i=1}^{n}(y_i)-\mu_Y\sum_{i=1}^{n}(x_i)+n\mu_X\mu_Y}{n\sigma_X\sigma_Y}$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)-n\mu_X\mu_Y}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

得到 $\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) = nr\sigma_X\sigma_Y + n\mu_X\mu_Y$ .... (c)

當給定一組二維資料$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\dots(x_n,y_n)$，對任意直線$y=\alpha x+\beta$，殘差平方和的定義是：

由 $s=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\alpha x_i+\beta)]^2$

乘開 $=\sum_{i=1}^{n}\beta^2+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2+\alpha^2\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n}x_i-2\beta\sum_{i=1}^{n}y_i-2\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$

將 $\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=n{\sigma_X}^2+n{\mu_X}^2$.................................... (a)

$\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2=n{\sigma_Y}^2+n{\mu_Y}^2$ .... (b)

$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i=nr\sigma_X\sigma_Y+n\mu_X\mu_Y$ .... (c)

代入上式

$=n\beta^2+(n{\sigma_Y}^2+n{\mu_Y}^2)+\ \alpha^2(n{\sigma_X}^2+n{\mu_X}^2)+2\alpha\beta(n\mu_X)-2\beta(n\mu_Y)-2\alpha(nr\sigma_X\sigma_Y+n\mu_X\mu_Y)$

$=n(\beta^2+{\sigma_Y}^2+{\mu_Y}^2+\alpha^2{\sigma_X}^2+\alpha^2{\mu_X}^2+2\alpha\beta\mu_X-2\beta\mu_Y-2\alpha r\sigma_X\sigma_Y-2\alpha\mu_X\mu_Y)$

分類再配方，有β的先配，不足的補缺項，剩下中間的只有α，加減一項，再配一次。

$=n[\beta^2+\alpha^2{\mu_X}^2+{\mu_Y}^2+2\alpha\beta\mu_X-2\beta\mu_Y-2\alpha\mu_X\mu_Y]+n[\alpha^2{\sigma_X}^2-2\alpha r\sigma_X\sigma_Y]+n{\sigma_Y}^2$

$=n(\beta+\alpha\mu_X-\mu_Y)^2+n[\alpha^2{\sigma_X}^2-2\alpha r\sigma_X\sigma_Y+r^2{\sigma_Y}^2]+n({\sigma_Y}^2-r^2{\sigma_Y}^2)$

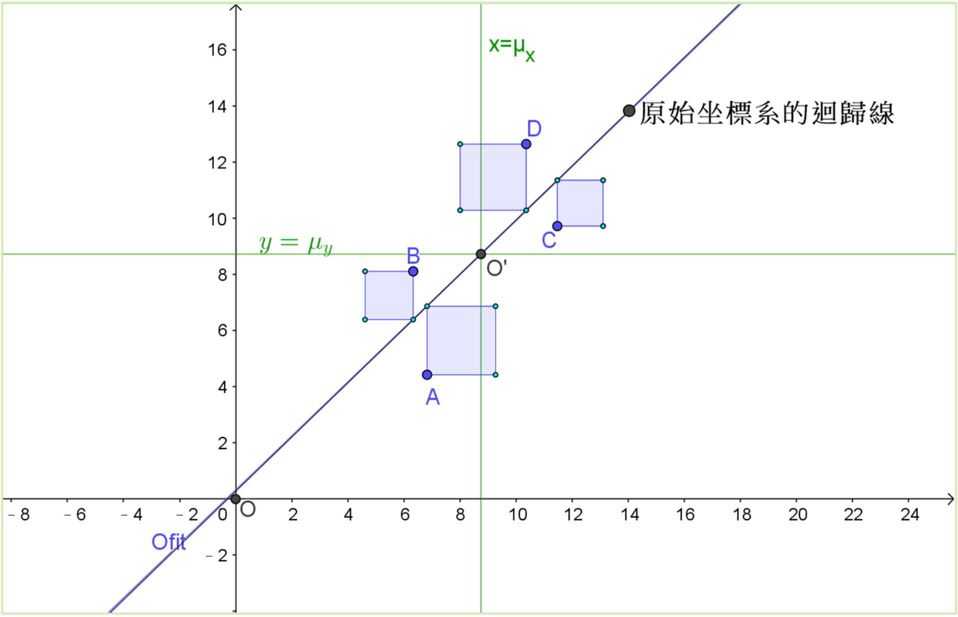
$=n(\beta+\alpha\mu_X-\mu_Y)^2+n(\alpha\sigma_X-r\sigma_Y)^2+n(1-r^2){\sigma_Y}^2\ \geq\ n(1-r^2){\sigma_Y}^2$

上式，當$(\beta+\alpha\mu_X-\mu_Y)=0$ 且 $(\alpha\sigma_X-r\sigma_Y)=0$ 時，s 有最小值 $n(1-r^2){\sigma_Y}^2$

此時迴歸直線的斜率 $\alpha=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ ， y 截距 $\beta=\mu_Y-\ \alpha\mu_X=\mu_Y-\ r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$

把α,β代入迴歸線$y=\alpha x+\beta$，得到$y=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}x+\mu_Y-\ r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$，再整理得到

點斜式$(y-\mu_Y)=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$，此時最小殘差平方和為 $n(1-r^2){\sigma_Y}^2$



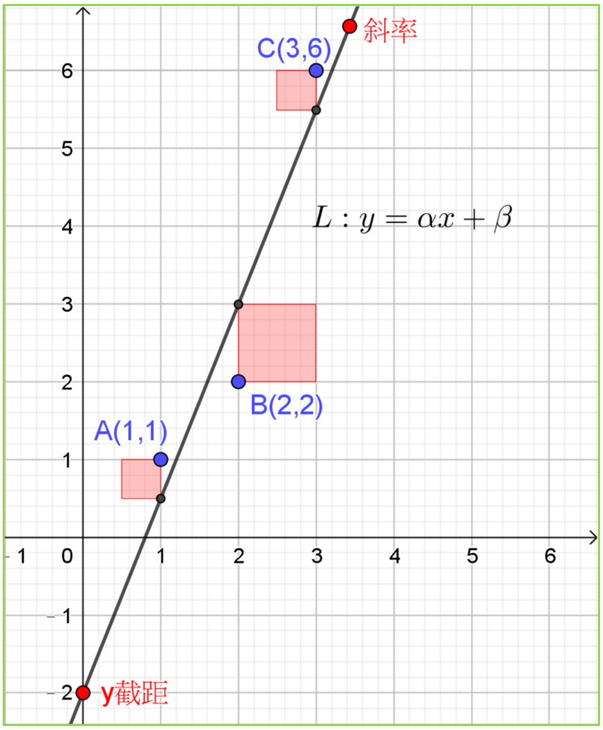
如上圖，於是我們得到下列 3 個性質：

1. 原始資料坐標系的迴歸線必定通過座標平均點 $O'(\mu_X, \mu_Y)$
2. 原始資料坐標系迴歸線的斜率為$r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$
3. 最小殘差平方和表示面積為$n(1-r^2){\sigma_Y}^2 \geq 0 \Rightarrow 1-r^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq r \leq 1$，即相關係數的值在正負 1 之間 (因為${\sigma_Y}^2 \geq 0$，且 n>0)

例題：(在原始資料坐標系)

某個草莓農場，用 1 單位有機肥種植可收成 1 單位草莓，用 2 單位有機肥可收成 2 單位草莓，用 3 單位有機肥可收成 6 單位草莓，用 x 代表有機肥單位數，用 y 代表收成草莓單位數，則農夫經驗的數據可用三個點 A(1,1), B(2,2), C(3,6)代表。如下圖，設 L：$y=\alpha x+\beta$是一條可變動的直線，令 ${d_i}^2=(y_i-\alpha x_i-\beta)^2$ 為某個樣本點(x_i, y_i) 到直線 L 鉛垂距離的平方，藉由改變直線的斜率 α 及 y 截距 β，我們想要求得：能使平方和 $s=\sum {d_i}^2$（即三個紅色正方形面積和）為最小的 α,β 值。

當 $s=\sum_{i=1}^{3} {d_i}^2$ 為最小時，所求得的直線 $y=\alpha x+\beta$ 稱為 y 對 x 的迴歸直線，也稱為最適合直線。當點足夠多時，它具有由 x 預測 y 的功能。



由 $s=(1-\alpha-\beta)^2+(2-2\alpha-\beta)^2+(6-3\alpha-\beta)^2$ 展開合併

$=3(\beta^2+4\alpha\beta-6\beta)+(14\alpha^2-46\alpha+41)$ 有 β 的放前，沒 β 的放後。

$=3(\beta^2+2\beta(2\alpha-3))+(14\alpha^2-46\alpha+41)$ 對 β 配方

$=3(\beta+(2\alpha-3))^2-3(2\alpha-3)^2+(14\alpha^2-46\alpha+41)$

$=3(2\alpha+\beta-3)^2+(2\alpha^2-10\alpha+14)$ 合併後再對 α 配方

$=3(2\alpha+\beta-3)^2+2(\alpha-\frac{5}{2})^2+\frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$

當 $\begin{cases} 2\alpha+\beta-3=0 \\ \alpha-\frac{5}{2}=0 \end{cases}$ s 有最小值 $\frac{3}{2}$，解(α,β)得迴歸線 $y=\frac{5}{2}x-2$ 。

(乙) 102 課綱的寫法

但是(甲)原始坐標系的最適合直線(或稱迴歸線)，需用很繁雜的雙配方技巧，用 97 課綱的那幾年之間，最小平方法的證明教學，對師生來說都是很辛苦的一件事，老師們於是統整出一個方便計算迴歸線斜率與截距的公式，讓學生只要會計算迴歸線就好。

為了方便計算這條原始坐標系的迴歸直線，也希望不讓 μ,σ 或度量單位的影響，而增加太多計算量，我們先把這組二維變量標準化，先找到這些點在標準化坐標系的迴歸線 L'，再藉由平移伸縮回到原始坐標系的迴歸線 L，這是同學比較能夠了解掌握的方法。

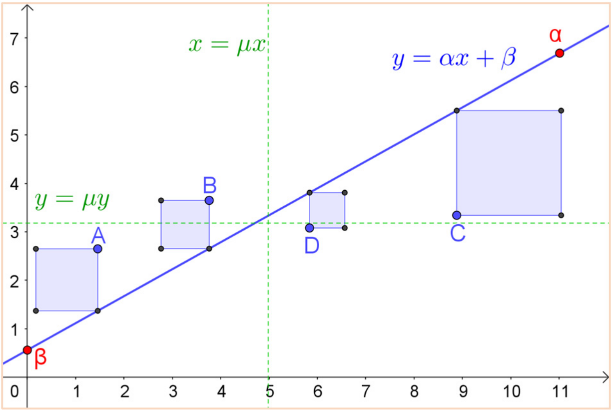
下方左圖，在原始坐標系，有 A, B, C, D 四點，在散佈圖上，要如何找到一條直線 $y=\alpha x+\beta$，如下面左圖的藍線(找到斜率 α 與 y 截距 β)使得四個藍色正方形的面積和 s 是最小(由 A 作鉛垂線，交藍色直線於一點，以 A 到交點之線段為邊長，即可做一個正方形)。

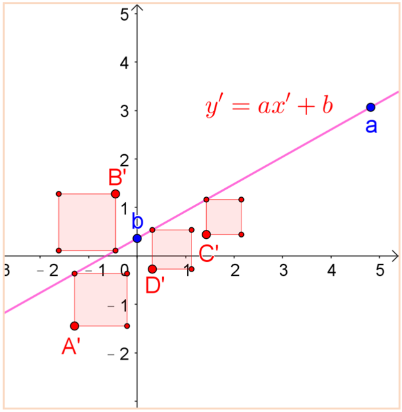
下方右圖，在標準化坐標系，有 A′, B′, C′, D′ 四點在散佈圖上，要如何找到一條直線 $y'=ax'+b$ (找到斜率 a 與 y 截距 b) 使得四個紅色正方形的面積和 s' 最小。

若原始坐標系的點 A(x_1, y_1)，則標準化坐標系的點 A′(x_1', y_1')。

其中 $x_1'=\dfrac{(x_1-\mu_X)}{\sigma_X}, y_1'=\dfrac{(y_1-\mu_Y)}{\sigma_Y}$ 令 $y'=ax'+b$ 是標準化坐標系的一條直線，如下面右圖的桃紅色直線，由 A′(x_1', y_1')做鉛直線交桃紅線在點$(x_1', ax_1'+b)$，於是以 A′ 到桃紅線交點的線段為邊長之正方形面積為 $(ax_1'+b-y_1')^2$。

如果有固定的 n 個點，令 $y'=ax'+b$ 是標準化坐標系的一條可變的直線(a, b 是變數)，則由上面方法所做的 n 個紅色正方形的面積和 $s'=\sum_{i=1}^{n}(ax_i'+b-y_i')^2$，我們要求算的是求滿足殘差平方和 $s'=\sum_{i=1}^{n}(ax_i'+b-y_i')^2$ 為最小的 a, b 值。





$$s' = \sum_{i=1}^{n} (ax'_i + b - y'_i)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [(ax'_i)^2 + b^2 + (y'_i)^2 + 2abx'_i - 2by'_i - 2ax'_i y'_i]$$
$$= a^2 \sum_{i=1}^{n} (x'_i)^2 + nb^2 + \sum_{i=1}^{n} (y'_i)^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} x'_i - 2b\sum_{i=1}^{n} y'_i - 2a\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i$$

由標準化座標的性質

$$\sum_{i=1}^{n} (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y'_i)^2 = n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x'_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i = 0 \ , \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = nr$$，代入上式

$$= na^2 + nb^2 + n - 2anr$$
$$= n(a-r)^2 + nb^2 + n - nr^2$$
$$= n(a-r)^2 + nb^2 + n(1-r^2) \geq n(1-r^2)$$

當 $a=r$ 且 $b=0$ 的時候，紅色正方形的面積和(平方和) s' 有最小值 $n(1-r^2)$，亦即，在標準化坐標系的 n 個點確定的時候，迴歸直線方程式是 $y' = rx'$

於是我們得到下列 3 個性質：

1. 標準資料坐標系的迴歸線必定通過原點(0,0)
2. 標準資料坐標系迴歸線的斜率為相關係數 r (在原始或標準坐標系 r 均相同)
3. 最小殘差平方和為$n(1-r^2) \geq 0 \Rightarrow 1-r^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq r \leq 1$，即相關係數的值在正負 1 之間

(這是我們在高一下，尚未學到柯西不等式前，唯一能向學生交代的相關係數範圍。)

迴歸直線通過標準化坐標系的原點，且斜率就是相關係數 r (這是相關係數的由來)當我們想要把標準坐標系的迴歸線 $y' = rx'$ 化成原始坐標系的迴歸線時，只要把座標作平移與伸縮變換 $y' = \dfrac{(y-\mu_y)}{\sigma_y}$ ，$x' = \dfrac{(x-\mu_x)}{\sigma_x}$ 代入 $y' = rx'$ 化成 $(y-\mu_y) = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ ，這就是原始坐標系的迴歸線。

(丙) 證明(甲)(乙)的關聯性

可是我們必須交代：當兩條對應的測試直線在變動時，標準化坐標系的紅色正方形的面積和 s'，與原始坐標系的藍色正方形的面積和 s，兩者有何關係？才會使得當標準化座

標系有迴歸線 $y'=rx'$ 時(有最小殘差平方和)，會使得原始坐標系也同時有迴歸線 $(y-\mu_y)=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ (也有最小殘差平方和)

解說：

如果我們在原始座標系找兩點 P, Q 把 $\overleftrightarrow{PQ}$ 當作原始坐標系的測試直線。再由標準化座標系找相應標準化之後的兩點 P’,Q’，把 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 當作標準化坐標系對應的測試直線。

此時若要操作 P,Q 來計算 s，s'，然後找出兩者的關係，勢必相當複雜，就算我們用斜截式 $y=\alpha x+\beta$，要轉成標準化坐標系的直線，再計算 s, s'，也很麻煩，這可能是課本不想去著墨的原因，但是：

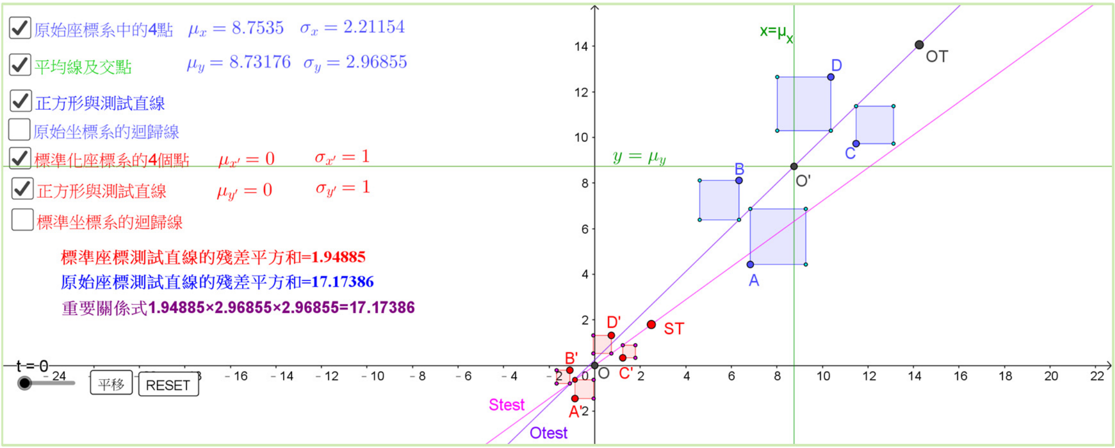
由(甲)的推導，我們知道原始坐標系的迴歸線必定通過座標平均點 $O'(\mu_X,\mu_Y)$

由(乙)的推導，我們知道標準化坐標系的迴歸線必定通過座標原點 O(0,0)

因此我們要在兩種座標系找相應的兩條測試直線：已知 O(0,0)對應 $O'(\mu_X,\mu_Y)$，只要在標準化座標系找一個點 ST 可以改變測試直線斜率，在原始座標系也會產生相應的一點 OT，這樣就簡單多了。

連接原點 O(0,0)與 ST 的直線就是標準化坐標系的測試直線(下圖桃紅色的線)

連接平均點 $O'(\mu_X,\mu_Y)$ 與 OT 的直線就是原始坐標系的測試直線(下圖藍色的線)



上圖中藍色 A,B,C,D 是原始坐標系的 4 個點，紅色 A’,B’,C’,D’是經標準化的 4 點。

桃紅色直線是標準化坐標系的測試直線，它通過原點 O(0,0)，令紅點 ST(1,m)是可以上下移動來改變桃紅色直線斜率 m 的點。當移動 ST 點，測試直線變動了，紅色正方形的面積和 s' 也會跟著變動。

藍色直線是原始坐標系相應於桃紅線的測試直線，它通過平均點 $O'(\mu_X,\mu_Y)$，令藍點 OT 是相應 ST(1,m)的點，將 OT 點標準化之後的點就是點 ST(1,m)，所以 ST 移動 OT 也會跟

著動，但是我們這裡的設計，無法直接移動 OT 點。

當移動 ST 點，OT 點跟著移動，藍色測試直線跟著動，原始坐標系的藍色正方形的面積和 s，也就跟著產生變化。

因為把 OT(x,y)點經由標準化而得到 ST(1,m)，$1=\dfrac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}$ ，$m=\dfrac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y}$

故 $x=\mu_X+\sigma_X$，$y=\mu_Y+m\sigma_Y$，即 OT($\mu_X+\sigma_X, \mu_Y+m\sigma_Y$)

由標準化坐標系的殘差平方和：

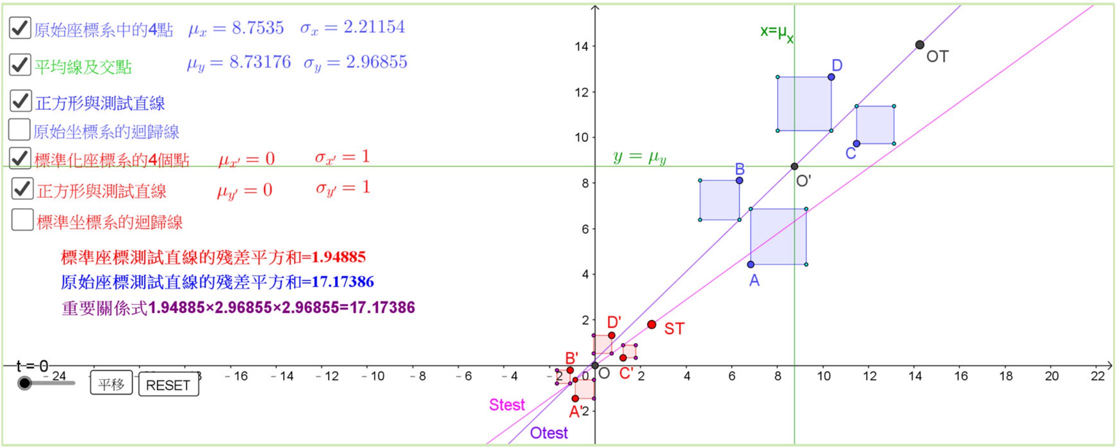
$$s'=\sum_{i=1}^{n}(mx_i'-y_i')^2=\sum_{i=1}^{n}\left(m\frac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}-\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2$$

藍色的原始座標測試直線的斜率，就是 OT 與 O′ 連線的斜率$\dfrac{\mu_Y+m\sigma_Y-\mu_Y}{\mu_X+\sigma_X-\mu_X}=m\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

故藍色的原始座標測試直線的點斜式是$y=m\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)+\mu_Y$

則原始坐標系的殘差平方和：

$$s=\sum_{i=1}^{n}\left[m\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x_i-\mu_X)+\mu_Y-y_i\right]^2=\sigma_Y{}^2\sum_{i=1}^{n}\left[m\frac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}-\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right]^2=\sigma_Y{}^2\cdot s'$$



在上圖中，左下角有一排紫色的文字：

重要關係式 1.94885×2.96855×2.96855=17.17386

$s'=1.94885$，$\sigma_Y=2.96855$是常數，$s=17.17386$

當點 ST 在移動的時候，s 與s''跟著在變動，但是恆保持$s=\sigma_Y{}^2\cdot s'$ '的關係

GGB 的計算功能隨時可以幫我們呈現這個重要關係式

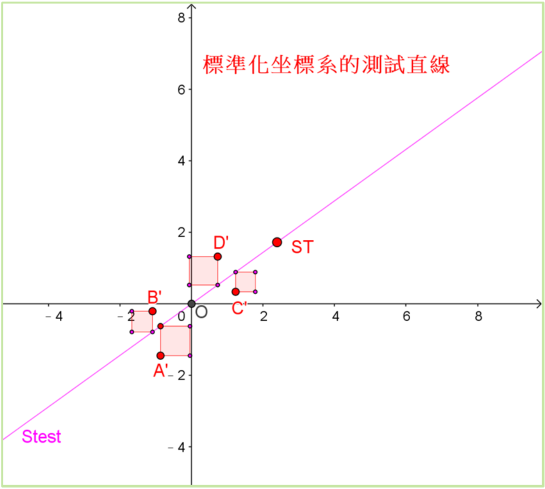
因此，紅色正方形面積和$=\dfrac{1}{(\sigma_Y)^2}\times$藍色正方形面積和，即 $s'=\dfrac{1}{(\sigma_Y)^2}\times s$

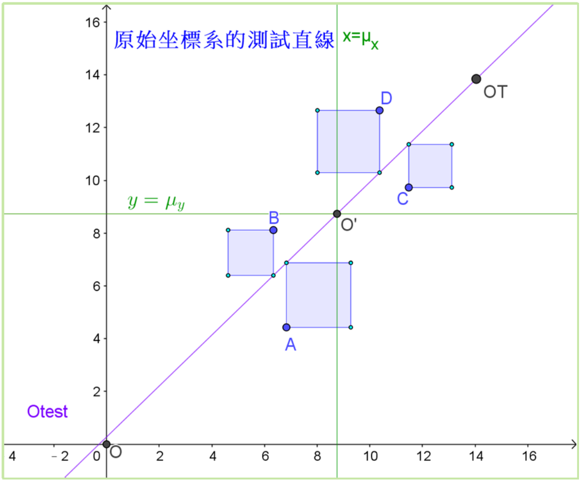
一旦 n 個點確定時，$(\sigma_Y)^2$ 變成是常數，因此 s' 與 s 同增同減

因此標準坐標系的迴歸線 $y'=rx'$ 使得 s' 有最小平方和 $n(1-r^2)$ 時，

原始坐標系的迴歸線 $(y-\mu_Y)=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ 的 s 也有最小平方和 $n(1-r^2)(\sigma_Y)^2$

因為最小平方法我們要估算的只是 y 座標的殘差平方和，平移$(y_i-\mu_Y)$不影響正方形面積和，但是 y 座標伸縮 $\frac{1}{\sigma_Y}$ 則會影響，會使得正方形面積和變成原來的 $\dfrac{1}{(\sigma_Y)^2}$ 。





今將結論敘述如下：

迴歸直線

對兩組並列數據(x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$,

算術平均數分別為 μ_X, μ_Y，標準差分別為 σ_X, σ_Y,

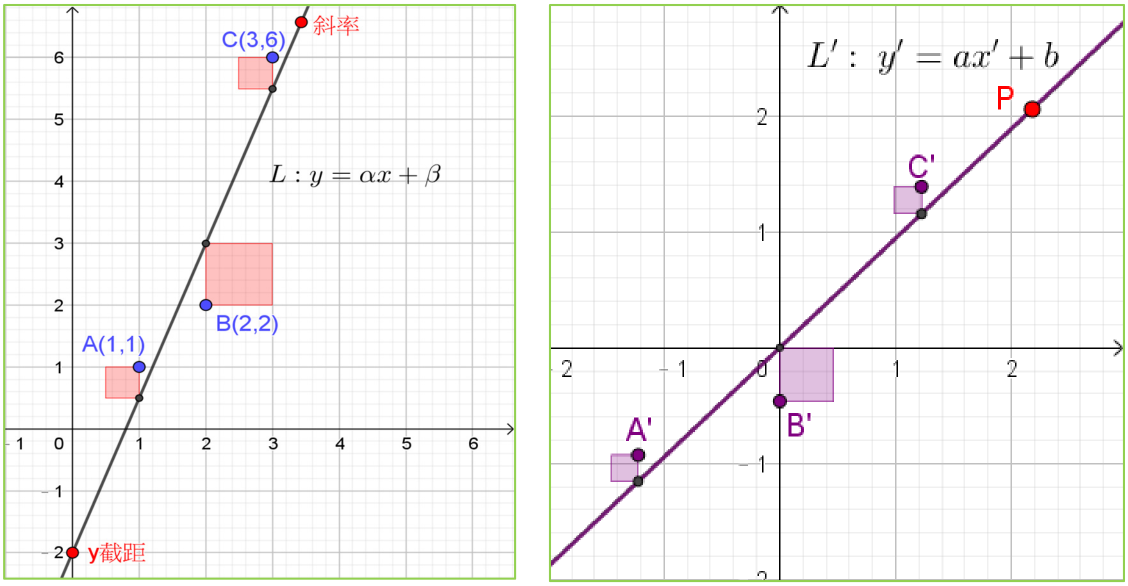
標準化後的並列數據為 (x_i', y_i')，其中 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}, y_i'=\dfrac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}$ ，則

(1) 標準坐標系 y' 對 x' 的迴歸直線為 $y'=r\,x'$，

其中 $r=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'y_i'$ 為標準坐標系與原始坐標系的相關係數。

(2) 原始坐標系 y 對 x 的迴歸直線為 $(y-\mu_Y)=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

例題：以草莓農場的 A(1,1),B(2,2),C(3,6)為例，左邊是原始資料散佈圖，右邊是標準化資料的散佈圖，左圖的直線是原始資料坐標系的測試直線，右圖的直線是標準化資料坐標系的測試直線。



（s 為左圖中紅色正方形面積和，s' 為右圖中紫色正方形面積和）

$\mu_X = 2$，$\mu_Y = 3$，$\sigma_X = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{14}{3}}$，$\sum (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) = 5$，

相關係數 $r = \dfrac{\sum (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n\,\sigma_x\,\sigma_y} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，

標準坐標系的迴歸線為$y' = \frac{5}{2\sqrt{7}} x'$

原始坐標系迴歸直線斜率 $r \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{5}{2}$，

故原始資料坐標系的迴歸直線為 $(y-3) = \dfrac{5}{2}(x-2)$，

最小殘差平方和為 $n(1 - r^2)\sigma_Y{}^2 = 3(1 - \frac{25}{28})(\frac{14}{3}) = \frac{3}{2}$

在高一的學習階段，這是比較簡單而讓學生可以掌握的算法。

參、結語

普遍將計算機應用在課程教學，是新課綱的重要精神之一，我們用點教學的心思與資訊科技的技術，一個教學元件能夠把數學的證明視覺化，不但讓學生知道如何證明最小平方法，而且還讓學生能感覺到兩種相應的計算結果，連貫了 97 課綱與 102 課綱對最小平方法兩種不同的證明模式，也解開學生對兩種證明方法的迷惑，這是讓我們高中數學老師，能獲得的一點鼓勵，也是數學素養教學的一種表現。

參考資源

全華高中數學第二冊(97 課綱與 102 微調課綱)

南一高中數學第二冊(97 課綱與 102 微調課綱)

龍騰高中數學第二冊(97 課綱與 102 微調課綱)

翰林高中數學第二冊(97 課綱與 102 微調課綱)

GeoGebra 基本操作指南,沈翔著，高等教育出版社。