中學生通訊解題第 106-107 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10601

已知 a、b、c、d、e 是滿足條件 a+b+c+d+e=13 的五個不同的整數，若 α 是 x 的五次方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=2057$ 的整數根，則 α 的值為何？

簡答：6

參考解答：

因為 α 是 x 的五次方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=2057$ 的整數根，所以 $(a-a)(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)=2057$ 且 a、b、c、d、e 是五個不同的整數，所以 $a-a, a-b, a-c, a-d, a-e$ 也是五個不同的整數。

又因為 $2057=1\times(-1)\times 11\times(-11)\times 17$，所以

$(a-a)+(a-b)+(a-c)+(a-d)+(a-e)=17$

$\Rightarrow 5a=17+(a+b+c+d+e)$，又由題設知 $a+b+c+d+e=13$，可得 $5a=30 \Rightarrow a=6$。

【解題評析】

有些同學沒有先假設 $a<b<c<d<e$ 的關係，而直接算出 $a-a, a-b, a-c, a-d, a-e$ 分別為 $17, 11, 1, -1, -11$ 的錯誤推論，事實上將 $17, 11, 1, -1, -11$ 排列皆有可能，或是如詳解上做法即可避開此假設。

問題編號
10602

設 f 為一個 100 次的多項式，且滿足 $f(k)=\frac{1}{k}$，$k=1,2,3,\ldots,101$。試求：

(1)多項式 $f(x)$

(2) $f(102)$ 之值

簡答：

(1) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{101!}(x-1)(x-2)\ldots(x-101)+1}{x}$

(2) $\frac{1}{51}$

參考解答：

(1)設 $g(x)=xf(x)-1$，則 $g(x)$ 為 101 次的多項式，且其所有根為 $1,2,3,\ldots,101$。

$g(x)=k(x-1)(x-2)\ldots(x-101)$，其中 k 為常數

$\because g(0)=-1$

$\therefore k(-1)^{101}(101!)=-1 \Rightarrow k=\frac{1}{101!}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{g(x)+1}{x}$$

$$=\frac{\frac{1}{101!}(x-1)(x-2)\ldots(x-101)+1}{x}$$ 。

(2) $f(102)=\dfrac{\frac{1}{101!}(101)(100)\ldots(1)+1}{102}=\dfrac{2}{102}=\dfrac{1}{51}$ 。

【解題評析】

先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

(1) 直接解 $f(x)$，無從下手，但是經同乘以 k，得 $kf(x)=1$，$k=1,2,3,\ldots,101$，也就是 $xf(x)-1=0$，有根 $1,2,3,\ldots,101$，且左式為 101 次的多項式，所以從 $xf(x)-1$ 來解題，$xf(x)-1=k(x-1)(x-2)\ldots(x-101)$，其中 k 為常數。

(2) 因此得

$$f(x)=\frac{k(x-1)(x-2)\ldots(x-101)+1}{x}$$，又由

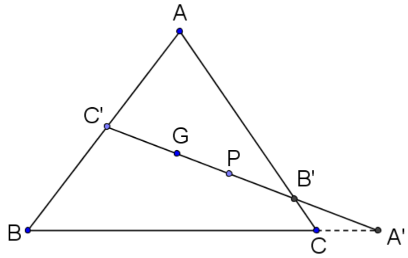
多項式的定義：

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$n\in N$，所以上式分子常數項為 0，定出

$k=\dfrac{1}{101!}$ 。

問題編號 10603

如圖，設 G,P 分為 ΔABC 之重心與內部一點，直線 $\overleftrightarrow{PG}$ 分別交直線 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 於 A',B',C'，試求 $\dfrac{\overline{A'P}}{\overline{A'G}}+\dfrac{\overline{B'P}}{\overline{B'G}}+\dfrac{\overline{C'P}}{\overline{C'G}}$ 之值。



簡答：3

參考解答：

如圖，作線段 $\overline{GG'}$ 與 $\overline{PP'}$ 分別垂直直線 $\overline{BC}$ 於 G' 與 P'。

因為線段 $\overline{GG'}$ 與 $\overline{PP'}$ 平行，故 $\dfrac{\overline{A'P}}{\overline{A'G}}=\dfrac{\overline{PP'}}{\overline{GG'}}$。

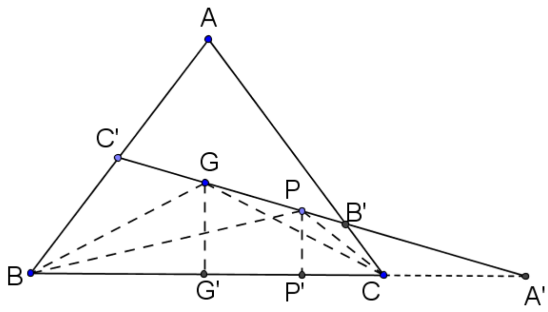
因此，$\dfrac{\Delta BPC}{\Delta BGC}=\dfrac{\overline{PP'}}{\overline{GG'}}=\dfrac{\overline{A'P}}{\overline{A'G}}$ 。

同理，$\dfrac{\Delta APC}{\Delta AGC}=\dfrac{\overline{B'P}}{\overline{B'G}}$，$\dfrac{\Delta APB}{\Delta AGB}=\dfrac{\overline{C'P}}{\overline{C'G}}$ 。

因此，

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'G}}+\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'G}}+\frac{\overline{C'P}}{\overline{C'G}}=\frac{\Delta BPC}{\Delta BGC}+\frac{\Delta APC}{\Delta AGC}+\frac{\Delta APB}{\Delta AGB}$$

$$=\frac{3}{\Delta ABC}(\Delta BPC+\Delta APC+\Delta APB)=3$$



【解題評析】

本題是較簡單的幾何題，主要是考察線段比與面積比之間的關係。特別一提的是有同學直接將 P 點取成 C 點計算出答案。取特例來觀察答案原本就是在解題中很重要的想法，但是切記，在猜出答案後，應該要想辦法證明一般的情況也是對的。

問題編號 10604

有一台最新型的投籃機有一個大籃框與一個小籃框，每投進小籃框一球可以得 5 分，每投進大籃框一球可以得 12 分。在沒有投球次數的限制下，顯然某些分數是不可能出現的(例如 1 分、13 分)，則不可能出現在千位數計分板上(1~9999)的分數共有多少個？

簡答：22

參考解答：

可分成下列五種情形討論：

(1)若總分為 $5k+1$ ： $1,6,11,16,21,26,31$ 是不可能出現的分數，從 36 開始的每個數都有可能出現。

(2)若總分為 $5k+2$ ： $2,7$ 是不可能出現的分數，從 12 開始的每個數都有可能出現。

(3)若總分為 $5k+3$ ：
$3,8,13,18,23,28,33,38,43$ 是不可能出現的分數，從 48 開始的每個數都有可能出現。

(4)若總分為 $5k+4$ ： $4,9,14,19$ 是不可能出現的分數，從 24 開始的每個數都有可能出現。

(5)若總分為 $5k$ ：均有可能出現。

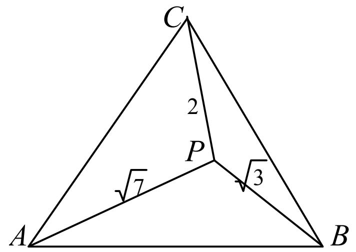
因此共有 22 種分數是不可能出現的。

【解題評析】

本題屬於簡易的整數組合問題，同學只需透過整數的特性分類找出適合的條件，加上細心的計算與推導，即可獲得正確的組合數。

問題編號 10605

如圖，已知 P 為正 ΔABC 內一點，若 $\overline{PA}=\sqrt{7}$ ，$\overline{PB}=\sqrt{3}$ ，$\overline{PC}=2$ ，則 $\overline{AB}=$ ？



簡答：$\sqrt{13}$

參考解答：

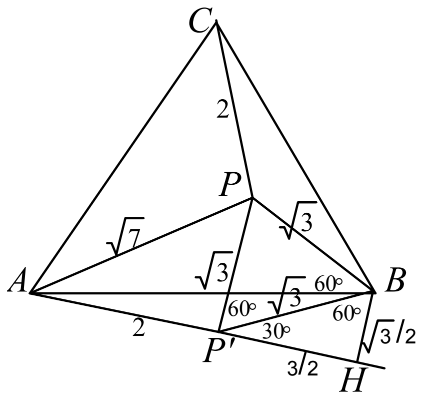
如圖，將 ΔBCP 繞 B 點逆時針旋轉 $60°$，得 $\Delta BAP'$，則 $\overline{AP'}=\overline{PC}=2$，$\Delta PBP'$ 是正三角形，

$\therefore \overline{PP'}=\overline{PB}=\sqrt{3} \Rightarrow \Delta APP'$ 是直角三角形，

過 B 作 $\overline{AP'}$ 的垂線 $\overline{BH}$，如圖所示：

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{BH}^2}=\sqrt{(2+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$=\sqrt{13}$ 。



【解題重點】

本題是初等的旋轉變換的幾何證明題，有幾個處理方式；

1.將 ΔBCP 繞 C 點逆時針旋轉 $60°$。

2.以 $\overline{PC}$ 為邊作正 $\Delta PCP'$。

3.利用餘弦定理(不鼓勵此方法)。

問題編號
10701

已知正整數 a 滿足 $96\mid(a^3+95)$，且 $a<2013$，求滿足條件的所有可能的正整數 a 的和。

簡答：20181

參考解答：

由 $\begin{cases} 96\mid(a^3+95) \\ 96\mid 96 \end{cases}$，可得 $96\mid(a^3-1)$，

又 $96=3\times 2^5$，則 $\begin{cases} 2^5\mid(a^3-1) \\ 3\mid(a^3-1) \end{cases}$

因為

$a^3-1=(a-1)\left[a(a+1)+1\right]=(a-1)a(a+1)+(a-1)$，其中 a 為正整數，且連續兩個整數相乘為 2 的倍數，則 $a(a+1)+1$ 是奇數，

所以 $2^5\mid(a^3-1)$ 等價於 $2^5\mid(a-1)$，

又因為連續三個整數相乘為 6 的倍數，

則 $3\mid\left[(a-1)a(a+1)\right]$，所以 $3\mid(a^3-1)$ 等價於 $3\mid(a-1)$。

因此有 $3\times 2^5\mid(a-1)\Rightarrow 96\mid(a-1)$，於是可得 $a=96k+1$。

又 $0<a<2013$，所以 $k=0,1,...,20$。

因此，滿足條件的所有可能的正整數 a 的

和為

$21+96\left(1+2+...+20\right)=21+20160=20181$

【解題評析】

1. 有些同學直接推論：$96\left|(a^3-1)\Rightarrow 96\right|(a-1)$，而沒有說明過程。

2. 希望同學在答題紙上能將過程說明清楚。

問題編號 10702

已知 x,y,z 是不全相等且非零的實數，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$，則 k 的所有可能值為何？

簡答： ± 1

參考解答：

由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$，得

$\frac{1}{x}=\frac{y}{ky\text{-}1}$...①，$z=\frac{1}{k\text{-}y}$...②

將①、②式代入 $z+\frac{1}{x}=k$，得

$$\frac{1}{k-y}+\frac{y}{ky-1}=k$$

$$\Rightarrow ky-1+y(k-y)=k(ky-1)(k-y)$$

$$\Rightarrow k^3y-k^2-k^2y^2+1-ky+y^2=0$$

$$\Rightarrow ky(k^2-1)-(k^2-1)-y^2(k^2-1)=0$$

$$\Rightarrow (k^2-1)(ky-1-y^2)=0$$

所以 $k^2-1=0$ 或 $ky-1-y^2=0$，即 $k=\pm 1$ 或 $k=y+\frac{1}{y}$，

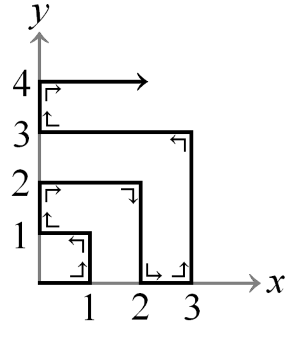
將 $k=y+\frac{1}{y}$ 代入已知等式，得 $x=y=z$，這與已知條件矛盾，而 $k=\pm 1$ 是可能的。

【解題評析】

本題屬於代數問題，同學只需用加減消去法及代入消去法即可化簡方程式，而得出 $k^2-1=0$ 或 $ky-1-y^2=0$，即可討論出 k 的所有可能值。

問題編號 10703

一質點移動的方式，如下圖所示，在第一分鐘，它從原點移動到(1,0)，接下來它便依圖上所示的方向，在 x,y 軸的正向前進或後退，每一分鐘只走1單位且平行其中一軸，試求 2013 分鐘後，質點的位置坐標。



簡答：(44 , 11)

參考解答：

如圖所示觀察其規律如下：

當質點走到 x 軸上之奇數點時，所花的時間恰好為其 x 軸分量的平方，而當質點走到 y 軸的偶數點時，所花的時間也恰好是 y 軸分量的平方，

$\because\ 44^2 < 1984 < 45^2 \Rightarrow 2013 = 44^2 + 77$，$77 = 44 + 33$

$\therefore$ 在 $44^2 = 1936$ 分鐘後質點在(0,44)，又接下來的路徑會與坐標軸形成一個正方形$\therefore$ 再過 44 分鐘後質點在(44 , 44)，最後再經 33 分鐘後質點會出現在(44 , 11)。

【解題評析】

本題屬於簡易的幾何與數論問題，同學只需透過細緻的觀察座標特性分類找出適合的規律與條件，加上計算與推導，即可獲得正確的座標。

問題編號 10704

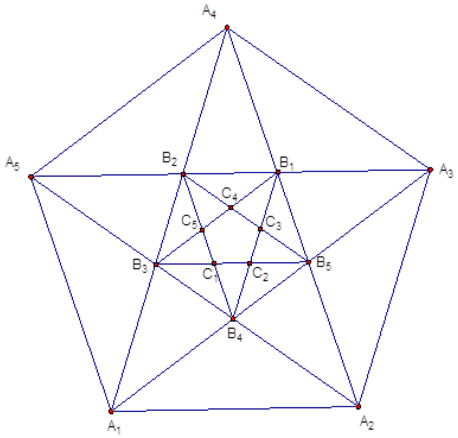
如圖，最外面的五邊形為正五邊形，分別就下列條件，找出以這圖形當中的線段為邊所組成的等腰三角形個數

(1)其中有一個頂點是 A_1，且 A_1 是頂角(非底角)

(2)其中有一個頂點是 B_1，且 B_1 是頂角(非底角)

(3)其中有一個頂點是 C_1，且 C_1 是頂角(非底角)

(4)全部有幾個？



簡答：(1) 6 個 (2) 9 個 (3) 2 個 (4) 85 個

參考解答：

(1)

$\Delta A_1A_2A_5, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_2A_5, \Delta A_1A_2A_5, \Delta A_1A_3A_4$
$, \Delta A_1A_2A_5$共6個。

(2)

$\Delta B_1A_2A_5, \Delta B_1A_3A_4, \Delta B_1B_2B_5, \Delta B_1B_3B_4, \Delta B_1C_3C_4$

$\Delta B_1A_3B_4, \Delta B_1A_4B_3, \Delta B_1C_5B_2, \Delta B_1C_2B_5$共9個。

(3) $\Delta C_1B_5B_2, \Delta C_1B_3B_4$ 共 2 個。

(4) 共 $(6+9+2)\times 5 = 85$ 個。

【解題評析】

本題是窮舉法，針對每一種分類，可以就邊或角，逐一完整找到所有可能情形，大部分同學都夠細心，能就各種情形完整作答，值得嘉獎。此外，希望同學除了完整回答本問題外，也可以想想，在沒有任何提示的情況下，自己是否可以做出適當分類，並把最後一小題的答案完整作出來。

問題編號
10705

有三堆火柴，分別為 100、200、300 根。甲、乙兩人玩遊戲，兩人交替取火柴：先從三堆中取完一堆，並將剩下的兩堆中的某一堆分為不空的兩堆，誰無法這樣做就算輸。今甲先取，請問誰有必勝策略？此策略為何？

簡答：甲有必勝策略。

參考解答：

先注意到：$100 = 2^2 \times 25$，$200 = 2^3 \times 25$，$300 = 2^2 \times 75$。

考慮一般的情況：

三堆火柴為 $2^n a, 2^n b, 2^n c$，其中 $0 \le n < m$，$m,n \in N$ 且 a,b,c 為奇數。

(1)甲取走 $2^n a$ 那堆火柴，並將 $2^n c$ 那堆分為 $2^n, 2^n(2^{m-n} \times c - 1)$。

此時，新的三堆火柴為 $2^n a_1, 2^n a_2, 2^n a_3$，其中 $n \in N$，a_1, a_2, a_3 為奇數。

(2)接著輪到乙，設乙取走 $2^n a_1$ 那堆，並將 $2^n a_2$ 那堆分為 $2^n b_1, 2^n b_2$，其中 b_1, b_2 為奇數且 $n_1 \ge n_2$。

因為 $2^n a_2 = 2^{n_1} b_1 + 2^{n_2} b_2 = 2^{n_2}(2^{n_1 - n_2} b_1 + b_2)$，所以 $n_1 = n_2 < n$ 或 $n_1 > n_2 = n$。

(3)在(2)中，無論乙取完後為哪種情況，均可化為 $2^n a, 2^n b, 2^n c$ 之形式。因此，甲可以採用(1)的方式繼續操作，到此過程進行到某一次乙無法操作為止。

故甲有必勝策略。

【解題評析】

本題同學解題分為兩種想法。第一種是先考慮火柴較少的狀況，去分析必勝法則，再去推論一般的情況，很可惜過程寫的不夠清楚。第二種是就解答給的方法，直接考慮一般化的結果，再去考慮必勝法則，可惜的是同學的解法在解答第二步的情況出了一點問題。