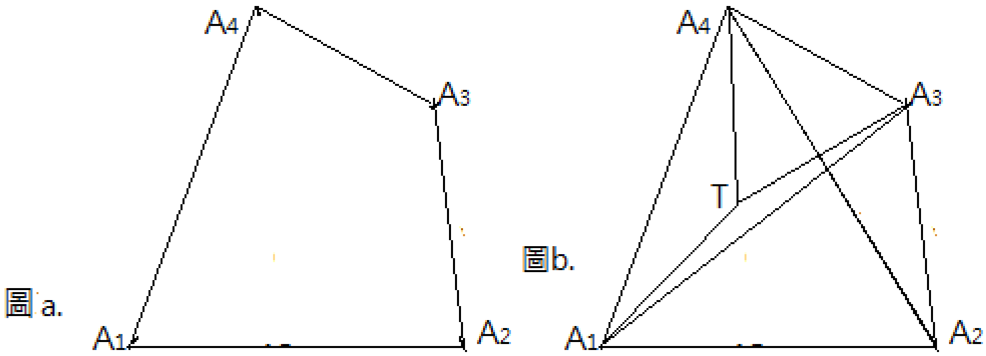
平面凸七邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式

李輝濱

壹、前言

自探索推證出平面凸四邊形、五邊形、六邊形等圖形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式後，作者實際詳細逐一觀察並對照比較這些方程式型態內容裡的各項組合結構，隱約發現此三個圖形裡每一方程式的獨自組合關係式都呈現出各對應多邊形餘弦公式型態的微妙契合！

為了要確定如此的歸納思考是否真能有效地推理出類似的餘弦公式，於是進行規劃作圖深入鑽研；試看下圖 a.的一平面凸四邊形，透過幾何作圖法在此圖形邊長 A_1A_4 內部作一個三角形 ΔA_1A_4T，使得 $\Delta A_1A_4T \approx \Delta A_2A_4A_3$ (互為相似形) 且 $\angle A_4TA_1 = \angle A_4A_3A_2$。並繼續連接 T 與 A_3 兩點，使形成線段 TA_3，再連接對角線長 A_1A_3，得一新的 ΔTA_1A_3 如圖 b.。這新 ΔTA_1A_3 的兩邊長 TA_1 與 TA_3 的長度恰能分別由原凸四邊形的四個邊長以比例關係式構成，而此 ΔTA_1A_3 的三邊長與內角所形成的餘弦公式也恰能推導出凸四邊形的兩交叉對角線長度乘積方程式！像這樣能將四邊形的各邊長以幾何作圖法縮減成一新三角形的概念肯定是一項指標思維的創新！根據這預想的觀念及規劃初以選定平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 其兩相鄰交叉對角線長度乘積公式的構圖軌跡概念，以其圖形最前緣四個頂點所形成的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為基底先作出一個如上述的輔助三角形，再將五邊形最後兩個邊長所屬的三角形依循著相似形型式另作一相似圖形並使其附著於輔助三角形的 TA_1



對應邊上，如此即構作出一輔助四邊形，這新造輔助四邊形的所有邊長與內角所形成的餘弦公式就是提供輔助解題的重要關鍵，將此等特殊解題要領適度推廣至六邊形，以至於七邊形等圖形結構，竟然皆能絕妙完整的求證出各圖形方程式來，而且這三個圖形的解題驗證計劃都是遵循著完全一致的基礎理念。

正弦定理僅能應用在圓內接多邊形圖形，而相對地餘弦定理及其推廣公式更能廣泛有效地應用到所有平面多邊形圖形，其效能更為強大！下列正文基於大膽假設、小新求證意念將詳盡敘述標題內容的理論推導思路歷程及解題分析的特定理念，以新穎獨自開發的策略來完成方程式的論證！

貳、本文

在研析推導廣義的平面凸七邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式之前，為了要完整且有條理地導證出應得的型態關係式，則必在下列撰文推理演繹的運算過程中，需應用或對照到下述已知的幾個數學應用性質；

一、數學應用性質—引理

引理 1. 平面四邊形餘弦定理：在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 1.

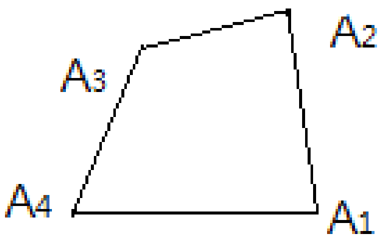


圖 1

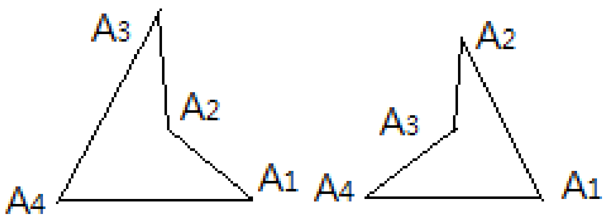


圖 2

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$， $\overline{A_2A_3}=V_2$， $\overline{A_3A_4}=V_3$， $\overline{A_4A_1}=V_4$，

則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

$$V_4^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：幾何作圖；連接圖 1.的兩個頂點 A_1 與 A_3 形成一對角線 A_3A_1。

(1) 見下圖 3. 令 $\angle A_1A_3A_4=m$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d$，對 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，可得三角

形餘弦定理；$d^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos A_2$，又對 $\Delta A_1A_3A_4$ 言，可得餘弦公式為 $V_4^2 = d^2 + V_3^2 - 2V_3 d\cos m \Rightarrow V_4^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_3 d\cos m$..(1-1)

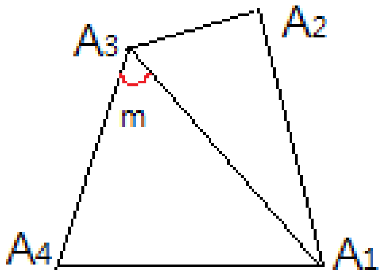


圖 3

(2) 現在要證明方程式(1-1)的最末項中 $d\cos m$ 在圖形上的幾何意義；見圖 4.

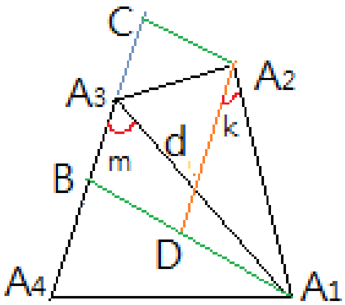


圖 4

(i) 延長線段 A_3A_4，使成直線 A_4A_3C，通過頂點 A_2 作一直線 A_2D 平行直線 A_4A_3C

(ii) 通過頂點 A_2 作一直線 A_2C 垂直於直線 A_4A_3C，使 C 點為垂足點

(iii) 再通過頂點 A_1 作一直線 A_1B 垂直於直線 A_4A_3C，使 B 點、D 點為垂足點

(iv) 由直角 ΔA_1A_3B 性質知 $d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_3B，同理 V_2 在直線 A_4A_3C 上的投影線段長為 A_3C，而線段長 A_3C 恰等於 $V_2\cos(\pi - A_3) = -V_2\cos A_3$

(v) V_1 在直線 A_4A_3C 上的投影線段長為 $A_2D = CB$ 線段；因 A_2D 平行 CB，令 $\angle A_1A_2D = k$，則頂角 A_3 與 A_2 的關係為 $A_3 + (A_2 - \mathrm{k}) = \pi \Rightarrow A_3 + A_2 = \pi + \mathrm{k}$，而線段長 A_2D 恰等於 $V_1\cos k$，但由 $V_1\cos(A_2 + A_3) = V_1\cos(\pi + k) = -V_1\cos k$，

得線段長 $A_2D = V_1\cos k = -V_1\cos(A_2+A_3)$。

(vi) 因此，由 $A_3B + A_3C = CB = A_2D$，得 $d\cos m = V_2\cos A_3 - V_1\cos(A_2+A_3)$

(3) 最後將此 $d\cos m$ 的值代入方程式(1-1)，即得證出方程式(1) 。

事實上，方程式(1)不僅適用於圖 1.凸四邊形，也適用於如圖 2.的凹四邊形；只要仿效上述構圖要領即可完整證明出平面凹四邊形餘弦定理為方程式(1)。

引理 2. 平面五邊形餘弦定理：先參考下圖 5.的平面凹五邊形。

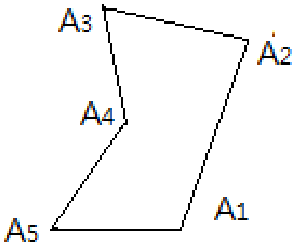


圖 5

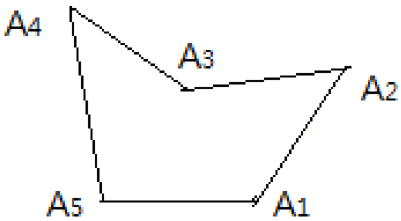


圖 6

任給一個平面凹五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，假設選取 A_4 頂角為優角，優角意指其角度是大於 π 但小於 2π，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$， 則此五邊形的面積型餘弦公式為

$$V_5^2 = V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4$$
$$+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)+2V_2V_4\cos(A_3+A_4) - 2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4) \cdots (2)$$

證明：下圖 7. 連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成對角線長 $\overline{A_1A_4}=d$，令 $\angle A_1A_4A_5 = m$，

(1) 圖 7.中的部份四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，由引理 1.有平面四邊形餘弦公式為

$$d^2 = V_1^2+V_2^2+V_3^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 + 2V_1V_3\cos(A_2+A_3)$$

又對 $\Delta A_1A_4A_5$ 言，可得三角形餘弦公式為 $V_5^2 = d^2 + V_4^2 - 2V_4 d\cos m \Rightarrow$

$$V_5^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3)$$
$$-2V_4 d\cos m \text{ ······ (2-1)}$$

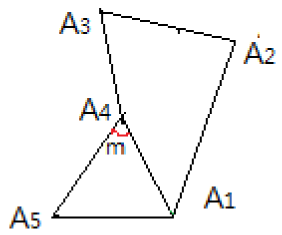


圖 7

(2) 仿效引理 1.的幾何作圖法，作出圖 8.，即延長線段 A_4A_5 使形成一直線 CA_4A_5，另作三綠色直線 A_3E、A_2B 與 A_1D 相互平行且皆與直線 CA_4A_5 相垂直。使得 B、D、E 三點都是垂足點。再通過頂點 A_2 作一直線 A_2G 平行直線 CA_4A_5，使 G 點為垂足點。

(3) 圖 8.中，由直角 ΔA_1A_4D 性質知 $d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_4D，同理 V_3 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 A_4E，恰等於 $V_3\cos(A_4-\pi) = -V_3\cos A_4$。

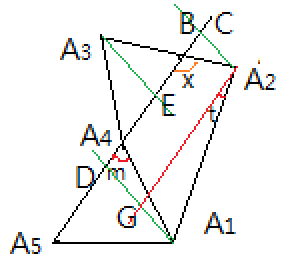


圖 8

(4) V_2 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 BE，恰等於 $V_2cos[\pi - A_3 - (A_4 - \pi)] = V_2\cos(A_3 + A_4)$ 。

(5) V_1 在直線 CA_4A_5 上的投影線段長為 $BD = A_2G$ 線段長，因 BD 平行 A_2G，令

$\angle A_1A_2G = t$，由圖 8.中知 $x = A_3 + (A_4 - \pi)$ 且 $x + (A_2 - t) = \pi$ ，則 $A_2 + A_3 + A_4$

$= 2\pi + t \;\Rightarrow\; V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4) = V_1\cos(2\pi + t) = V_1\cos t = A_2G = BD$ 。

(6) 在直線 CA_4A_5 上，線段長 BD =線段長 $A_4D + A_4E + BE$ ，故得 $A_4D = BD - A_4E$

$- BE \;\Rightarrow\; d\cos m = V_1\cos(A_2 + A_3 + A_4) - V_2\cos(A_3 + A_4) + V_3\cos A_4$ 。

(7) 將此 $d\cos m$ 關係式直接代入方程式(2-1)中，即得證出方程式(2)。

事實上，方程式(2)不僅適用於凹五邊形，也適用於凸五邊形；只要仿效上述引理 1.與引理 2.構圖要領即可完整證明出平面凸五邊形餘弦定理為方程式(2) 。若換成選取頂角 A_3 為優角如圖 6.，則同樣可推證得方程式(2) 。

引理 3. 平面六邊形餘弦定理：在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ，令線段長 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$ ，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_5} = V_4$ ，$\overline{A_5A_6} = V_5$ ，$\overline{A_6A_1} = V_6$ ，則此六邊形的面積型餘弦公式為：

$$\begin{aligned}V_6^2 &= V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4 \\ &- 2V_4V_5\cos A_5 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3 + A_4) + 2V_3V_5\cos(A_4 + A_5) \\ &- 2V_1V_4\cos(A_2 + A_3 + A_4) - 2V_2V_5\cos(A_3 + A_4 + A_5) + 2V_1V_5\cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)\end{aligned}$$

.... (3)

證明：方程式(3)也適用於凹六邊形，以頂角 A_3 為優角的凹六邊形來推證之；參見下圖 9.

連接兩頂點 A_1 與 A_5 形成一對角線，使對角線長度 $\overline{A_1A_5} = d$ ，

(1) 令 $\angle A_1A_5A_6 = m$ ，對圖 9.中的部份凹五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 言，有餘弦公式為

$$d^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4$$

$$+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)+2V_2V_4\cos(A_3+A_4)-2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)$$

又對 $\Delta A_1A_5A_6$ 言，可得三角形餘弦公式為 $V_6^2=d^2+V_5^2-2V_5d\cos m \Rightarrow$

$$V_6^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3-2V_3V_4\cos A_4$$

$$-2V_5d\cos m+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)+2V_2V_4\cos(A_3+A_4)-2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)$$

.... (3-1)

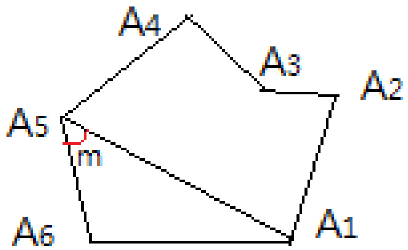


圖 9

(2) 仿效引理 1.與 2.的幾何作圖法，作出圖 10.，其中四直線 A_2H 、 A_3GL 、 A_4F 與 CA_5A_6B 相互平行，另四綠色直線 A_4C 、 A_3D 、 A_2GE 與 HA_1FB 相互平行且皆與直線 A_2H 、 A_3GL 、 A_4F 與 CA_5A_6B 相垂直。而 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 七點都是垂足點。故四邊形 A_4CBF 、 A_3DEG 、 A_2EFH 皆為長方形。

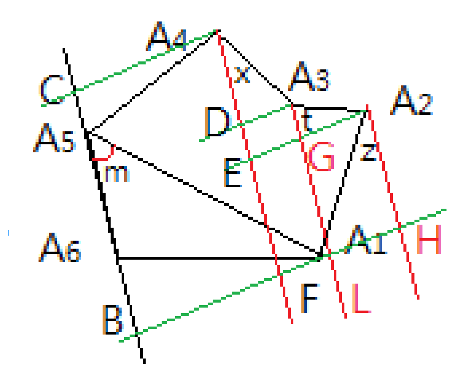


圖 10

(3) 對直角 ΔA_1A_5B 言，$d\cos m$ 的值恰為投影線段長 A_5B，同理 V_4 在直線 CA_5A_6B 上的投影線段長為 A_5C，恰等於 $V_4\cos(\pi - A_5) = -V_4\cos A_5 = A_5C$。

(4) 由 A_4F 平行 CA_5A_6B，令 $\angle A_3A_4D = x$，得 $A_4 + A_5 = \pi + x$，而 V_3 在直線 A_4F 上的投影線段長為 A_4D，恰等於 $V_3\cos x = -V_3\cos(A_4 + A_5) = A_4D$ 。

(5) 由 A_4F 平行 A_3GL，令 $\angle A_2A_3G = t$，得 $x + A_3 - t = \pi$，故 $A_3 + A_4 + A_5 = 2\pi + t$，而 V_2 在直線 A_3GL 上的投影線段長為 $A_3G = DE$，恰等於 $V_2\cos t = V_2\cos(A_3 + A_4 + A_5) = A_3G = DE$。

(6) 由 A_2H 平行 A_3GL，令 $\angle A_1A_2H = z$，得 $z + A_2 + t = \pi$，故 $z = 3\pi - (A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$，而邊長 V_1 在直線 A_2H 上的投影線段長為 A_2H。再由圖 10. 知 $A_2H = EF = V_1\cos z = -V_1\cos\left(A_2 + A_3 + A_4 + A_5\right)$。

(7) 因四邊形 A_4CBF 為長方形，得 $A_5C + A_5B = CB = A_4F = A_4D + DE + EF$，故

$$A_5B = d\cos m = A_4D + DE + EF - A_5C = -V_3\cos(A_4 + A_5)$$

$$+V_2\cos(A_3 + A_4 + A_5) - V_1\cos\left(A_2 + A_3 + A_4 + A_5\right) + V_4\cos A_5 。$$

至此找到 $d\cos m$ 的完整值。

(8). 將此 $d\cos m$ 的完整值直接代入方程式(3-1)中，即得證出方程式(3) 。

方程式(3)不僅適用於凹六邊形，也適用於凸六邊形；只要仿效上述引理 1.與引理 2.及引理 3.構圖要領即可完整證明出平面凸六邊形餘弦定理為方程式(3) 。凹六邊形有各樣不同型態；如另有頂角 A_2 是單一優角情形，頂角 A_4 是單一優角情形， A_2 與 A_4 同為優角

情形(其餘頂角為劣角)，…等。只需仿效上述作圖要領，這所有型態的凹六邊形其具有的餘弦定裡皆為方程式(3)。

二、平面凸七邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_1}=V_7$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_1$，$\overline{A_2A_4}=d_2$，見下圖 11. 的平面凸七邊形；此凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉

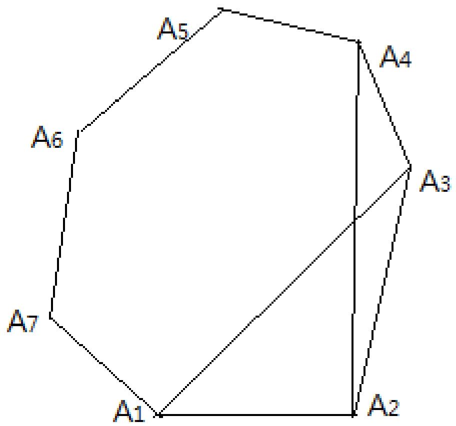


圖 11

對角線長度乘積一般化方程式為：下述方程式(4)；

$$
\begin{aligned}
d_1^{\,2}d_2^{\,2} = {} & (V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2+(V_2V_7)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \\
& -2V_2^{\,2}V_4V_5\cos A_5-2V_2^{\,2}V_5V_6\cos A_6-2V_2^{\,2}V_6V_7\cos A_7 + \\
& 2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2+A_4+A_5\right)+2V_2^{\,2}V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right)+ \\
& 2V_2^{\,2}V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right)-2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)- \\
& 2V_2^{\,2}V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7)+2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)
\end{aligned}
$$

證明：連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成對角線長 $\overline{A_1A_4}=d$，並依循前言指引的思考方向先將此七邊形最前緣四個頂點所形成的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為基底作出一個如前言所述的輔助三角形 ΔTA_1A_3，如圖 12.，此處 $\Delta A_1A_4T \approx \Delta A_2A_4A_3$ (互為相似形)。

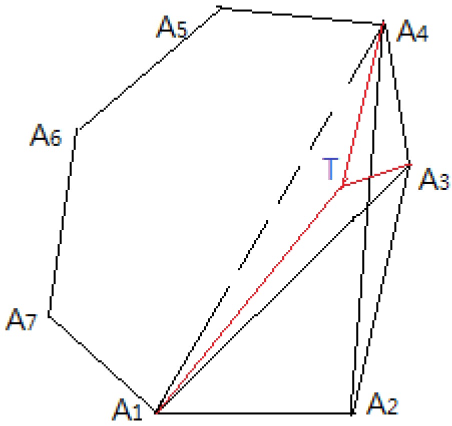


圖 12

(1) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係，得 $d:d_2=\overline{A_1T}:V_2=\overline{A_4T}:V_3 \Rightarrow$ 可得 $d:\overline{A_4T}=d_2:V_3$，再由 $\angle A_1A_4A_2=\angle TA_4A_3$ 及兩對應邊長成正比例與其夾角相等的相似形性質，可得知另兩相似形關係 $\Delta A_1A_4A_2 \approx \Delta TA_4A_3$，因此可得 $\angle A_4A_1A_2=\angle A_4TA_3$，且有另一組正比例關係為 $d:\overline{A_4T}=d_2:V_3=V_1:\overline{A_3T}$ 。

(2) 在上述(1).的兩組正比例關係式中可求得輔助三角形 ΔTA_1A_3 的兩個邊長；由

$$d:d_2=\overline{A_1T}:V_2=\overline{A_4T}:V_3 \quad \Rightarrow \quad \overline{A_1T}=(V_2d)/d_2 \qquad (4\text{-}1)$$

及 $$d:\overline{A_4T}=d_2:V_3=V_1:\overline{A_3T} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_3T}=(V_1V_3)/d_2 \qquad (4\text{-}2)$$

，而另外在頂點 T 處四周圍的角度關係可知；$\angle A_1TA_3=2\pi-\angle A_4TA_3-\angle A_1TA_4$

$= 2\pi-\angle A_4A_1A_2-\angle A_2A_3A_4 = A_2$(頂角)$+\angle A_1A_4A_3$

$\Rightarrow \quad \angle A_1TA_3 = A_2$(頂角)$+\angle A_1A_4A_3$ ………………………………………………… (4-3)

，此處對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，其四個頂角總和為 2π ，

(3) 接下來要將七邊形(圖 12.)中另外部份五邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7$ 以相似形結構黏附在 ΔTA_1A_3 的邊長 TA_1 上；此需藉由下列幾何作圖法來完成輔助相似形的製作；

(i) 連接圖 12.中的對角線 A_4A_7 及 A_4A_6，將五邊形分割成三個三角形如下圖 13.

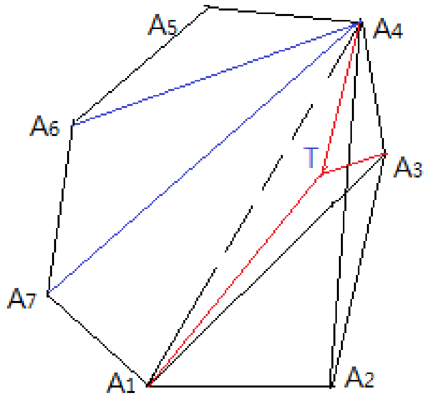


圖 13

(ii) 作相似形應自三角形做起，此處先從 $\Delta A_7A_1A_4$ 開始；見圖 13.，對 ΔTA_1A_3 的一邊長 TA_1 自頂點 A_1 向外側作一射線 A_1B，使 $\angle TA_1B = \angle A_4A_1A_7$，又在頂點 T 處對圖形外側作另一射線 TB，使 $\angle A_1TB = \angle A_1A_4A_7$，此兩射線交在 B 點；見圖 14.則 $\Delta A_1BT \approx \Delta A_1A_7A_4$ (互為相似形) 且 $\angle TBA_1 = \angle A_4A_7A_1$。由對應邊長成正比例關係得

$$\overline{A_1B} : V_7 = \overline{A_1T} : d = \overline{BT} : \overline{A_4A_7} \Rightarrow \overline{A_1B} = (V_7 \cdot \overline{A_1T}) / d \quad \cdots\cdots (4\text{-}1a)$$

再將(4-1)式的邊長 TA_1 代入(4-1a)式，即得 $\overline{A_1B} = (V_7V_2)/d_2 \cdots\cdots (4\text{-}4)$

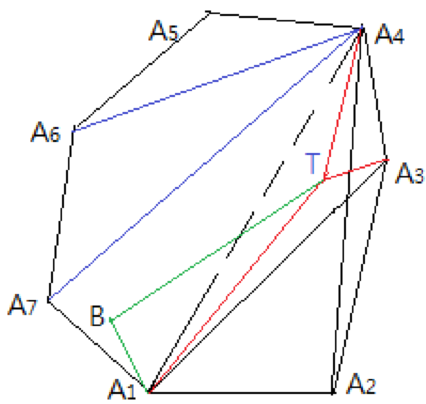


圖 14

(iii) 同理，在圖 14.裡自線段 TB 外側再作出第二個三角形 ΔTCB；見下圖 15.；自頂點 B 向外側作一射線 BC，使 $\angle TBC = \angle A_4A_7A_6$，又在頂點 T 處對圖形外側作另一射線 TC，使 $\angle BTC = \angle A_7A_4A_6$，此兩射線交在 C 點；則可得 ΔTCB 與 $\Delta A_4A_6A_7$ 兩者呈相似形，且 $\angle TCB = \angle A_4A_6A_7$。再由對應邊長成正比例關

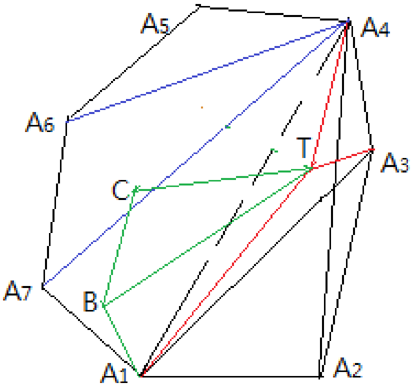


圖 15

係得 $\overline{BC}:V_6 = \overline{BT}:\overline{A_7A_4} = \overline{CT}:\overline{A_6A_4}$，又因為 $\overline{BT}:\overline{A_7A_4} = \overline{A_1T}:d$，

故聯立得出；$\overline{BC}:V_6 = \overline{BT}:\overline{A_7A_4} = \overline{CT}:\overline{A_6A_4} = \overline{A_1T}:d$ ························ (4-1b)

對(4-1b)作運算得出 $\Rightarrow$ $\overline{BC} = (V_6 \cdot \overline{A_1T})/d$ ··· (4-1c)

再將(4-1)式的邊長 TA_1 代入(4-1c)式，即得出；$\overline{BC} = (V_6V_2)/d_2$ ··········· (4-5)

(iv) 繼續仿效(iii).的作圖分析過程，在圖 15.裡自線段 TC 外側再作出第三個三角形 ΔTCD；見下圖 16.；自頂點 C 向外側作一射線 CD，使 $\angle TCD = \angle A_4A_6A_5$，

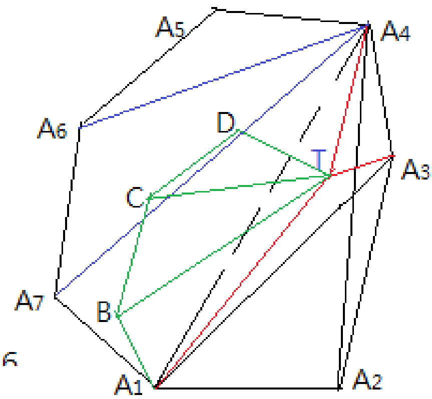


圖 16

又在頂點T處對圖形外側作另一射線TD，使 $\angle CTD = \angle A_6 A_4 A_5$，而此兩射線相交在$D$點；則得 $\Delta TCD \approx \Delta A_4 A_6 A_5$(互為相似形)。且 $\angle TDC = \angle A_4 A_5 A_6$。

再由對應邊長成正比例關係得 $\overline{CD} : V_5 = \overline{DT} : V_4 = \overline{CT} : \overline{A_6 A_4}$ ，又由(4-1b)

式，得 $\overline{CD} : V_5 = \overline{DT} : V_4 = \overline{CT} : \overline{A_6 A_4} = \overline{BT} : \overline{A_7 A_4} = \overline{A_1 T} : d$ ，故演算後分別

得出；邊長$\overline{CD}$的長度值為；$\overline{CD} = (V_5 \cdot \overline{A_1 T}) / d$ ·· (4-1d)

邊長$\overline{DT}$的長度值為；$\overline{DT} = (V_4 \cdot \overline{A_1 T}) / d$ ·· (4-1e)

再將(4-1)式的邊長TA_1代入(4-1d)式，即得出；$\overline{CD} = (V_5 V_2) / d_2$ ············ (4-6)

又將(4-1)式的邊長TA_1代入(4-1e)式，即得出；$\overline{DT} = (V_4 V_2) / d_2$ ············ (4-7)

(4) 由步驟(3).推導出的所有比例關係式可聯結成下列各對應邊長成正比例式；

$\overline{A_1 B} : V_7 = \overline{A_1 T} : d = \overline{BC} : V_6 = \overline{CD} : V_5 = \overline{DT} : V_4$ ，則平面五邊形TA_1BCD必與另一個平面五邊形$A_4 A_1 A_7 A_6 A_5$兩者呈相似形關係，見上圖 16. 。可看到平面五邊形TA_1BCD相似形結構確實黏附在$\Delta TA_1 A_3$的邊長TA_1外側上。

到這裡，相似五邊形TA_1BCD的四個邊長 $\overline{A_1 B}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DT}$都尋獲了。它們的數值確實分別由原凸七邊形的邊長以比例式關係構成！

(5) 經由以上幾何作圖推證,已成功地將原凸七邊形的七個邊長以比例式關係縮減成圖 16.中的平面凹六邊形$A_1 A_3 TDCB$裡六個邊長的新構圖！ 這新構的凹六邊形有一個頂角$\angle A_3 TD$為單一優角，由圖 16.知這優角的值為；
優角$\angle A_3 TD = \angle A_3 TA_1 + \angle A_1 TD$ ，而(4-3)式； $\angle A_1 TA_3 = A_2$(頂角)+$\angle A_1 A_4 A_3$，
再由五邊形TA_1BCD與五邊形$A_4 A_1 A_7 A_6 A_5$的相似關係,得 $\angle A_1 TD = \angle A_1 A_4 A_5$,
故 優角$\angle A_3 TD =$ A_2(頂角)+$\angle A_1 A_4 A_3 + \angle A_1 A_4 A_5$ = A_2(頂角)+ A_4(頂角)。

(6) 另外由五邊形相似形性質知；兩個五邊形的各對應角必完全相等，所以得下列關係； 頂角A_5=頂角D，頂角A_6=頂角C，頂角A_7=頂角B，

(7) 再參考新構的圖 16. 如下；新構的平面凹六邊形$A_1 A_3 TDCB$裡，各邊長與所需的各頂角都推求到了，應用引理 3.平面凹六邊形的餘弦定理方程式(3)，可完整敘

述出新構的平面凹六邊形 A_1A_3TDCB 所屬的餘弦定理公式，得

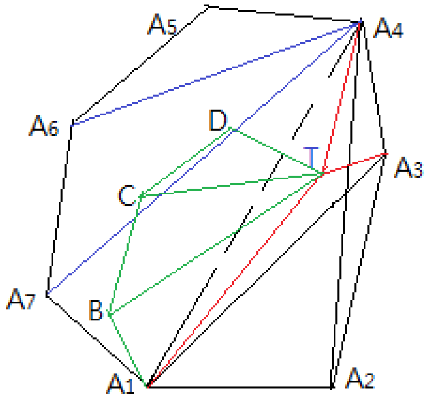


圖 16

$$\overline{A_1A_3}^2 = \overline{TA_3}^2 + \overline{TD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{BA_1}^2 - 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{TD}\cos(\angle A_3TD) - 2\,\overline{TD}\cdot\overline{DC}\cos D$$

$$-2\,\overline{DC}\cdot\overline{CB}\cos C - 2\,\overline{CB}\cdot\overline{BA_1}\cos B + 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{DC}\,\cos\left(\angle A_3TD + D\right) +$$

$$2\,\overline{TD}\cdot\overline{CB}\,\cos\left(D + C\right) + 2\,\overline{DC}\cdot\overline{BA_1}\,\cos\left(C + B\right) - 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{CB}\cos(\angle A_3TD + D + C) -$$

$$2\,\overline{TD}\cdot\overline{BA_1}\cos(D + C + B) + 2\,\overline{TA_3}\cdot\overline{BA_1}\cos(\angle A_3TD + D + C + B) \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}2)$$

現在將凹六邊形各邊長的比例數值及各角角度值代入方程式(3-2)，得下式；

$$d_1^{\,2} = [(V_1V_3)/d_2]^2 + [(V_4V_2)/d_2]^2 + [(V_5V_2)/d_2]^2 + [(V_6V_2)/d_2]^2 + [(V_7V_2)/d_2]^2$$

$$-2[(V_1V_3)/d_2][(V_4V_2)/d_2]\cos(A_2 + A_4) - 2[(V_4V_2)/d_2][(V_5V_2)/d_2]\cos A_5$$

$$-2[(V_5V_2)/d_2][(V_6V_2)/d_2]\cos A_6 - 2[(V_6V_2)/d_2][(V_7V_2)/d_2]\cos A_7 +$$

$$2[(V_1V_3)/d_2][(V_5V_2)/d_2]\cos\left(A_2 + A_4 + A_5\right) + 2[(V_4V_6V_2^{\,2})/d_2^{\,2}]\cos\left(A_5 + A_6\right) +$$

$$2[(V_5V_7V_2^{\,2})/d_2^{\,2}]\cos\left(A_6 + A_7\right) - 2[(V_6V_1V_2V_3)/d_2^{\,2}]\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) -$$

$$2[(V_4V_7V_2^{\,2})/d_2^{\,2}]\cos(A_5 + A_6 + A_7) +$$

$$2[(V_7V_1V_2V_3)/d_2^{\,2}]\cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \qquad \Rightarrow$$

將上式運算展開後，在等號兩側同乘以 $d_2{}^2$，再化簡，整裡，最後得下式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 + (V_2V_7)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_5\cos A_5 - 2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6 - 2V_2{}^2V_6V_7\cos A_7 +$$

$$2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2+A_4+A_5\right) + 2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right) +$$

$$2V_2{}^2V_5V_7\cos\left(A_6+A_7\right) - 2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6) -$$

$$2V_2{}^2V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7) + 2V_1V_2V_3V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

方程式(4)即為得證出的平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。此方程式真的由應用平面六邊形的餘弦公式推證而來。

三、檢驗

方程式(4)的結構型態中每一項式內涵裡表徵的邊長與頂角排列型式都呈現出秩序、規律、條理。縱然如此，仍須透過下列詳盡的檢驗以強化其正確性。

1. 若令 $V_7 = 0$，使頂點 A_7 趨近於頂點 A_1，頂角 $A_7 = 0$ ，則平面凸七邊形退化成平面凸六邊形，方程式(4)隨即縮減退化成下式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_5\cos A_5 - 2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2+A_4+A_5\right)$$

$$+2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right) - 2V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6) \cdots\cdots\cdots (5)$$

方程式(5)最末一項的角度組合有四個頂角相加，再做一個轉換，使其變換成凸六邊形的另外兩頂角，由 $A_2 + A_4 + A_5 + A_6 = 4\pi - A_1 - A_3$ ，代入(5)式中，得

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_5\cos A_5 - 2V_2{}^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2+A_4+A_5\right)$$

$$+2V_2{}^2V_4V_6\cos\left(A_5+A_6\right) - 2V_1V_2V_3V_6\cos(A_1+A_3) \cdots\cdots\cdots (6)$$

方程式(6)就是正確的平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。此方程式也能仿效上述七邊形的幾何作圖要領直接證明出來。

2. 若令 $V_7 = V_6 = 0$，使頂點 A_7 與 A_6 皆趨近於頂點 A_1，頂角 $A_7 = A_6 = 0$，則平面凸七邊形退化成平面凸五邊形，方程式(4)立即縮減退化成下式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_5\cos A_5 + 2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_2+A_4+A_5\right) \cdots\cdots\cdots (7)$$

同理，將方程式(7)最末一項的角度組合做一個轉換，使其變換成凸五邊形的另外兩頂角，由 $A_2 + A_4 + A_5 = 3\pi - A_1 - A_3$，代入(7)式中，再化簡得下式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_2{}^2V_4V_5\cos A_5 - 2V_1V_2V_3V_5\cos\left(A_1+A_3\right) \cdots\cdots\cdots (8)$$

方程式(8)就是正確的平面凸五邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。此方程式也能仿效上述七邊形的幾何作圖要領直接證明出來。

3. 若令 $V_7 = V_6 = V_5 = 0$，使頂點 A_7 與 A_6、A_5 皆趨近於頂點 A_1，則此平面凸七邊形必退化成平面凸四邊形，方程式(4)立即縮減退化成下式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \cdots\cdots\cdots (9)$$

方程式(9)就是正確的平面凸四邊形內兩交叉對角線長度乘積一般化方程式。

4. 若再令平面凸四邊形內接於一圓，由兩頂角 A_2 與 A_4 互補性質，得

$$d_1 d_2 = V_1 V_3 + V_2 V_4 \quad \cdots\cdots (10)$$

方程式(10)就是著名圓內接四邊形的托勒密定理 (Ptolemy theorem)。

5. 探究圓內接七邊形的情況：下圖 17.的圓內接七邊形；對角線長 $\overline{A_1 A_4} = d$，

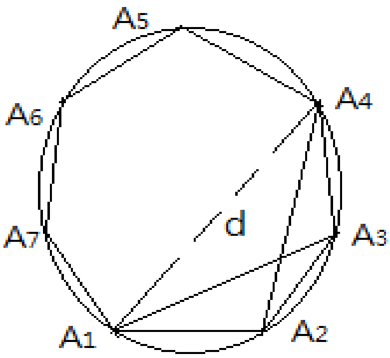


圖 17

(a) 對圖 17.中的圓內接四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 有托勒密定理關係式如下；
$d_1 d_2 = V_1 V_3 + V_2 d$ ，現在將其完全平方，得下式；

$$(d_1 d_2)^2 = (V_1 V_3)^2 + (V_2 d)^2 + 2 V_1 V_2 V_3 d \quad \cdots\cdots (11)$$

(b) 應用引理 2. 對五邊形 $A_1 A_4 A_5 A_6 A_7$ 可得下列餘弦定理關係式；

$$d^2 = V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 + V_7^2 - 2 V_4 V_5 \cos A_5 - 2 V_5 V_6 \cos A_6 - 2 V_6 V_7 \cos A_7 +$$

$$2 V_4 V_6 \cos(A_5 + A_6) + 2 V_5 V_7 \cos(A_6 + A_7) - 2 V_4 V_7 \cos(A_5 + A_6 + A_7) \cdots (12)$$

(c) 另外五邊形 $A_1 A_4 A_5 A_6 A_7$ 也有邊長與頂角角度關係式如下；見下圖 18.，
令 角度 $m = \angle A_7 A_1 A_4$，角度 $k = \angle A_1 A_4 A_5$，對五邊形 $A_1 A_4 A_5 A_6 A_7$ 言可得；

$$d = V_4 \cos k + V_5 \cos[k - (\pi - A_5)] + V_6 \cos[k - (\pi - A_5) - (\pi - A_6)] + V_7 \cos m$$
$$= V_4 \cos k - V_5 \cos(k + A_5) + V_6 \cos(k + A_5 + A_6) + V_7 \cos m$$

由圖 18. 知，角度
$m = \angle A_7 A_1 A_4 = A_1 - \angle A_2 A_1 A_4 = A_1 - (\pi - A_3) = A_1 + A_3 - \pi$ ，同理，角度
$k = \angle A_1 A_4 A_5 = A_2 + A_4 - \pi$ ，現將此兩角度代入 d 的等式中，得；

$$d = -V_4 \cos(A_2 + A_4) + V_5 \cos(A_2 + A_4 + A_5) - V_6 \cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6)$$
$$- V_7 \cos(A_1 + A_3) \quad \cdots\cdots (13)$$

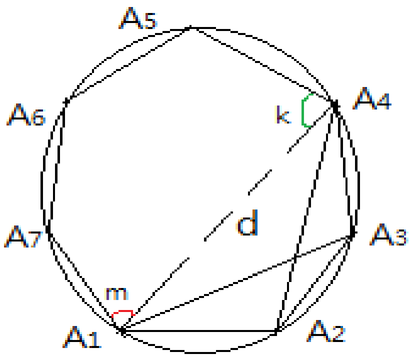


圖 18

(d) 將 (12)式的 d^2 及 (13)式的 d 一起同步代入 (11)式中，運算並移項整理成；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 + (V_2V_7)^2 - 2V_2{}^2 V_4V_5 \cos A_5 -$$

$$2V_2{}^2 V_5V_6 \cos A_6 - 2V_2{}^2 V_6V_7 \cos A_7 + 2V_2{}^2 V_4V_6 \cos(A_5 + A_6) +$$

$$2V_2{}^2 V_5V_7 \cos(A_6 + A_7) - 2V_2{}^2 V_4V_7 \cos(A_5 + A_6 + A_7)$$

$$-2V_1V_2V_3V_4 \cos(A_2 + A_4) + 2V_1V_2V_3V_5 \cos(A_2 + A_4 + A_5)$$

$$-2V_1V_2V_3V_6 \cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) - 2V_1V_2V_3V_7 \cos(A_1 + A_3) \cdots (14)$$

方程式(14)式的最末一項頂角組合 $A_1 + A_3$ 轉換成

$5\pi - (A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7)$

代入 (14)式中，經運算，再化簡，整理，最後得下式 (15)式；

$$d_1{}^2 d_2{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 + (V_2V_7)^2 - 2V_2{}^2 V_4V_5 \cos A_5 -$$

$$2V_2{}^2 V_5V_6 \cos A_6 - 2V_2{}^2 V_6V_7 \cos A_7 + 2V_2{}^2 V_4V_6 \cos(A_5 + A_6) +$$

$$2V_2{}^2 V_5V_7 \cos(A_6 + A_7) - 2V_2{}^2 V_4V_7 \cos(A_5 + A_6 + A_7)$$

$$-2V_1V_2V_3V_4 \cos(A_2 + A_4) + 2V_1V_2V_3V_5 \cos(A_2 + A_4 + A_5)$$

$$-2V_1V_2V_3V_6 \cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) + 2V_1V_2V_3V_7 \cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \,..(15)$$

得證出方程式(14)式與(15)式都是圓內接七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。

因為圓內接七邊形的部份內角組合無特定關係值，方程式(14)式與(15)式也必是平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。對照比較方程式(4)式與(15)式的各項型態結構皆完全相同！因此，無論是圓內接七邊形或平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式都是上述的方程式 (4)式與 (14)式、(15)式的等價形式。至此，檢驗過程同時也實際依各不同面向考量來察驗出這些公式的正確性，並強化了上述(含本文內容)這所有公式獲得證明的理論基礎！

參、結論

1. 最後，由全文敘述推理引證過程中明顯地發覺到；自圓內接七邊形的情況作研析而導證出的臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式是比較容易的，也因此先以比對這方程式的各項結構與七邊形餘弦定理公式兩者間的各項對應位置關係，並配合四邊形幾何相似形作圖法，混成思考，步步演繹試算才彙整歸納出本文研發的創新方針。
2. 圖 16. 中縮減的新構六邊形是個凹六邊形，若要求作出一新構的凸六邊形也可達成；只須將圖 11.的七邊形變身一下，變身成下圖 19.，即可仿效前述中的幾何相似形作圖法製作出圖 20. 的新構平面凸六邊形 A_1A_3TDCB 。再根據正文二的

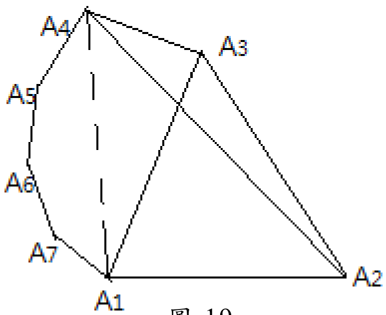


圖 19

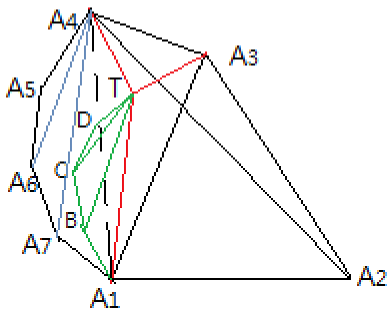


圖 20

推理敘述過程，仿效其導證步驟要領，即可將此平面凸六邊形 A_1A_3TDCB 依循它的餘弦定理公式再加以推演運算就能獲得完全相同的方程式 (4)式。

3. 輔助相似形幾何作圖法的效應與多邊形餘弦定理的功能在平面幾何學上的直接或間接應用都非常廣泛、強大！將一個七邊形以相似形幾何作圖法縮減成一個小的新構六邊形使其落在原七邊形內部，且共享兩頂點 A_1 與 A_3 。新構六邊形的五個邊長恰好為原七邊形七個邊長以適當有序的比例關係式構成。像這樣精準的美好搭配，真值得推廣應用到其他思維領域上。
4. 檢驗終了時，可以完全意識到這平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長

度乘積一般化方程式 (4)式與 (14)式已經完美統一了平面凸六邊形、平面凸五邊形、平面凸四邊形與托勒密定理等同質性的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式！使這些公式都成為平面凸七邊形方程式的特例！

參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形內兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 407 期 第 24 頁**，2018 年 4 月出版發行。

李輝濱，平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 410 期 第 10 頁**，2018 年 7 月出版發行。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .