對線性碰撞在接觸過程中的動能分析

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在教高中物理二下第 9 章碰撞時，對於一維空間碰撞中，學生僅學到碰撞前後兩物體的速度變化及能量變化量，但是對於在碰撞過程中，究竟兩物體的速度與能量是如何變化到碰撞後的情況，卻一無所知，總覺得無法一窺全貌而有遺珠之憾。正是因為如此，本文擬先從提升現行高中教材的內容『僅考慮碰撞前後的速度與能量變化』之深度開始，然後更進一步推導在彈性碰撞與完全非彈性碰撞過程中，兩物體的速度、能量是如何隨時間變化，供作老師在教學上的參考。

貳、二體碰撞前後的速度與能量變化

一、 為了清楚地分析兩物體在碰撞過程物理量的變化，先對碰撞作簡單的分類：

- 碰撞
  - 彈性碰撞
    - 一維彈性碰撞
    - 二維彈性碰撞
    - → 碰撞前後瞬間總動能守恆；碰撞中總動能不守恆
  - 非彈性碰撞
    - 完全非彈性碰撞(特例) → 碰撞前、中、後總動能皆不守恆
      - ↓ 撞後兩物合為一體

或

分析 / 種類	碰撞力	能量	恢復係數 e
彈性碰撞	保守力	沒有力學能損失	$e = 1$
非彈性碰撞	非保守力	有力學能損失	$0 \le e < 1$
註明	1. 恢復係數 $e = \dfrac{\text{遠離速率}}{\text{接近速率}} = \dfrac{u_2' - u_1'}{u_1 - u_2}$ 2. $e = 0$ 表完全非彈性碰撞		

二、 理論推導

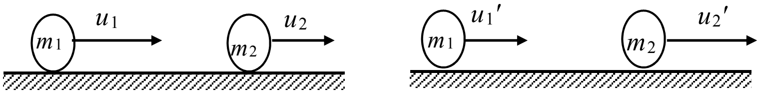

圖 1、一維空間的碰撞

如圖 1 所示，碰撞前質量、速度各為 m_1、u_1 和 m_2、u_2 且 $u_1 > u_2$ 的兩物體，在一光滑平面上發生一維空間的碰撞，碰撞後速度變為 u_1'、u_2'。設恢復係數為 e，假設在碰撞過程中，系統不受外力作用，由恢復係數的定義和動量守恆得

$$\begin{cases} u_2' - u_1' = e(u_1 - u_2) \\ m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2' \end{cases} \quad \cdots\cdots (1)$$

解得

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{(m_1 - em_2)}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2}u_2 = (1+e)v_c - eu_1 \\ u_2' = \dfrac{(m_2 - em_1)}{m_1 + m_2}u_2 + \dfrac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2}u_1 = (1+e)v_c - eu_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots (2)$$

其中

$$v_c = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1u_1' + m_2u_2'}{m_1 + m_2} = \text{ 定值，為質心速度。}$$

若為彈性碰撞即 $e = 1$，(2)式可進一步化簡成

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 = 2v_c - u_1 \\ u_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}u_2 + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 = 2v_c - u_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots (3)$$

若為完全非彈性碰撞即 $e = 0$，(2)式可進一步化簡成

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}u_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}u_2 = v_c \\ u_2' = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}u_2 + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}u_1 = v_c \end{cases} \qquad \cdots\cdots (4)$$

得　$u_1' = u_2' = v_c$。

設某瞬間兩物體的速度為 v_1、v_2，相對於質心的速度各為 $v_{1c} = v_1 - v_c$ 和 $v_{2c} = v_2 - v_c$，則二物體總動能 K_t 為

$$K_t = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_{1c}+v_c\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_{2c}+v_c\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}m_1v_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2c}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_c^2 + \left(m_1v_{1c}+m_2v_{2c}\right)v_c \quad \cdots\cdots (5)$$

(5)式等號右邊第一項可定義為系統的內動能 K_{in}，即 $K_{in} = \frac{1}{2}m_1v_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2c}^2$，表示在質心處所觀察到的系統動能。由於二物體相對於質心的速度

$$v_{1c} = v_1 - v_c = v_1 - \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2) = \frac{\mu}{m_1}v_{12}$$

$$v_{2c} = v_2 - v_c = v_2 - \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2) = -\frac{\mu}{m_2}v_{12}$$

其中 $v_{12} = v_1 - v_2$，$\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 稱為縮減質量(reduced mass)，故系統的內動能 K_{in} 可進一步化簡為

$$K_{in} = \frac{1}{2}m_1v_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2c}^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\mu}{m_1}v_{12}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{\mu}{m_2}v_{12}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu v_{12}^{\ 2}$$

(5)式等號右邊第二項很明顯的是系統的質心動能 K_{cm}。至於等號右邊第三項將消失，因為：

$$m_1v_{1c} + m_2v_{2c} = m_1(v_1-v_c) + m_2(v_2-v_c) = (m_1v_1+m_2v_2) - (m_1+m_2)v_c = 0$$

表示由質心看系統的動量和恆為零。因此，

$$K_t = K_1 + K_2 = K_{in} + K_{cm} = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_c^2 \quad (6)$$

接著計算碰撞前後總動能的變化量 ΔK_t。將(1)式 $u_2{}' - u_1{}' = e(u_1 - u_2)$ 寫成

$u_{21}{}' = eu_{12}$，因系統不受外力作用，故 $K'_{cm} = K_{cm}$。

$$\Delta K_t = \left(K'_{cm} + \frac{1}{2}\mu u'_{21}{}^2\right) - \left(K_{cm} + \frac{1}{2}\mu u_{12}{}^2\right) = (e^2 - 1)\frac{1}{2}\mu u_{12}{}^2 \quad (7)$$

從(7)式知，當 $e = 0$，$\Delta K_t = -\frac{1}{2}\mu u_{12}{}^2$ 即完全非彈性碰撞時損失的動能最大，損失的動能為碰撞前系統的內動能。

參、彈性碰撞下碰撞過程中的速度與能量變化

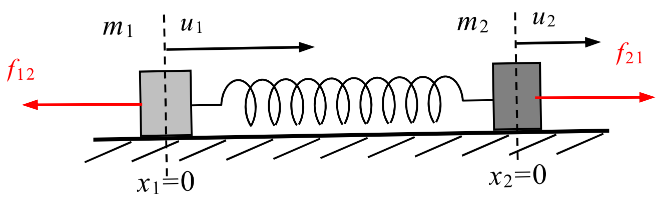

圖 2、一維彈性碰撞

一、兩物體速度 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的推導

如圖 2 所示，設有質量為 m_1 和 m_2 的兩物體，其中物體 m_2 繫有一彈力常數 k 的理想輕質彈簧，在不受外力的作用下，兩者在光滑水平面上做一維的彈性碰撞。碰撞開始瞬間即 $t = 0$ 時，m_1、m_2 的初速各為 u_1 和 u_2 且 $u_1 > u_2$。我們使用兩個坐標系 x_1 和 x_2 分別表示 m_1、m_2 的位置，並設開始碰撞瞬間兩物體的位置各為 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = 0$。在碰撞過程中，設 m_2 施予 m_1 之力為彈力 f_{12}，而 m_1 施予 m_2 之力為彈力 f_{21}，且 $f_{12} = -f_{21} = -k(x_1 - x_2)$。

今寫下兩物體的運動方程式如下：

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=m_1\dfrac{dv_1}{dt}=-k(x_1-x_2) \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=m_2\dfrac{dv_2}{dt}=k(x_1-x_2) \end{cases} \quad \text{......(8)}$$

將兩方程式相加，得

$$m_1\frac{dv_1}{dt}+m_2\frac{dv_2}{dt}=-k(x_1-x_2)+k(x_1-x_2)=0 \quad \text{......(9)}$$

知 $m_1v_1(t)+m_2v_2(t)$=定值 ，這表示系統在不受外力的作用下，系統的總動量守恆。將(8)式兩方程式相減，並引入相對位移 $x_{12}\equiv x_1-x_2$，得

$$\frac{d^2x_{12}}{dt^2}=-\frac{k}{m_1}(x_1-x_2)-\frac{k}{m_2}(x_1-x_2)=-\frac{k}{\mu}x_{12} \quad \text{......(10)}$$

解得 $\begin{cases} x_{12}(t)=A\sin(\omega_0t+\theta_0) \\ v_{12}(t)=\dfrac{d}{dt}x_{12}(t)=v_1(t)-v_2(t)=\omega_0A\cos(\omega_0t+\theta_0) \end{cases}$ ......(11)

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$ ......(12)

代入初始條件： $x_{12}(t=0)=0$ 和 $v_{12}(t=0)=u_1-u_2$，得 $\theta_0=0$ 及 $A=\dfrac{u_1-u_2}{\omega_0}$，

因此

$$\begin{cases} x_{12}=\dfrac{u_1-u_2}{\omega_0}\sin\omega_0t \\ v_{12}=v_1-v_2=(u_1-u_2)\cos\omega_0t \end{cases} \quad \text{......(13)}$$

因質心速度 $v_c = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$，進而解得 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 為

$$\begin{cases} v_1(t) = \dfrac{m_1 + m_2\cos\omega_0 t}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{m_2(1-\cos\omega_0 t)}{m_1+m_2} u_2 = (1-\cos\omega_0 t)v_c + u_1\cos\omega_0 t \\ v_2(t) = \dfrac{m_1(1-\cos\omega_0 t)}{m_1+m_2} u_1 + \dfrac{m_2 + m_1\cos\omega_0 t}{m_1+m_2} u_2 = (1-\cos\omega_0 t)v_c + u_2\cos\omega_0 t \end{cases} \quad \text{..... (14)}$$

二、系統的內動能 K_{in} 與內位能 U_{in} 之和為定值

兩物體在彈力作用下的運動方程式為：

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dv_1}{dt} = f_{12} \\ m_2 \dfrac{dv_2}{dt} = f_{21} \\ f_{12} = -f_{21} = -k(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{.................. (15)}$$

因彈力為保守力，作功與路徑無關，對上式積分後，有

$$\begin{cases} K_{1b} - K_{1a} = \dfrac{1}{2}m_1 v_{1b}^2 - \dfrac{1}{2}m_1 v_{1a}^2 = \displaystyle\int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{12}\,dx_1 \\ K_{2b} - K_{2a} = \dfrac{1}{2}m_2 v_{2b}^2 - \dfrac{1}{2}m_2 v_{2a}^2 = \displaystyle\int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{21}\,dx_2 = -\int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{12}\,dx_2 \end{cases} \quad \text{....... (16)}$$

兩式相加

$$K_{1b} + K_{2b} - (K_{1a} + K_{2a}) = \int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{12}\,dx_1 - \int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{12}\,dx_2 = \int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} f_{12}\,d(x_1 - x_2)$$

$$= -\int_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b} k(x_1 - x_2)\,d(x_1 - x_2) = -\frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \Big|_{\text{狀態}a}^{\text{狀態}b}$$

$$= \frac{1}{2}k(x_{1a} - x_{2a})^2 - \frac{1}{2}k(x_{1b} - x_{2b})^2 = U_{in,a} - U_{in,b} \quad \text{.................. (17)}$$

此處

$$U_{in} = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

可視為二物體的相對位能或內位能。由式(17)可有

$$K_{1b} + K_{2b} + U_{in,b} = K_{1a} + K_{2a} + U_{in,a} = \text{常數} \quad \text{(18)}$$

表示不論是在初狀態 a 或末狀態 b，二物體的總動能與內位能之和為定值。再整理後可有

$$(K_{1b} - K_{1a}) + (K_{2b} - K_{2a}) + (U_{in,b} - U_{in,a}) = 0$$

或

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta U_{in} = \Delta(K_1 + K_2 + U_{in}) = 0$$

代表二物體的總動能與內位能之和的變化量為零。又因二物體的總動能 $K_1 + K_2$ 亦為質心動能 K_{cm} 與內動能 K_{in} 之和，即

$$K_1 + K_2 = K_{cm} + K_{in}$$

由於質心速度不變，$\Delta K_{cm} = 0$，結合以上二式，最後可得到

$$\Delta(K_{in} + U_{in}) = \Delta E_{in}$$

此處 $E_{in} = K_{in} + U_{in}$ 為內部總力學能(或總內能)，而上式即代表總內能守恆不變。

現舉例加以描述：若質量 m_1 和 m_2 的兩物體最初

$x_{12}(t=0) = x_1(t=0) - x_2(t=0) = 0$，$v_1(t=0) = u_1$、$v_2(t=0) = u_2$ 且設某瞬間 t 時，兩物體的速度為 v_1、v_2，則 $v_{12} = v_1 - v_2 = (u_1 - u_2)\cos\omega_0 t$ 及

$$x_{12} = \int_0^t v_{12}dt' = (u_1 - u_2)\int_0^t \cos\omega_0 t' dt' = \frac{(u_1 - u_2)}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

因此，總內能 $E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}\mu\left[(u_1 - u_2)\cos\omega_0 t\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[\frac{(u_1 - u_2)}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]^2$

$$=\frac{1}{2}\mu\left[(u_1-u_2)\cos\omega_0 t\right]^2+\frac{1}{2}k\left[\frac{(u_1-u_2)}{\sqrt{k/\mu}}\sin\omega_0 t\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2\cos^2\omega_0 t+\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2\sin^2\omega_0 t$$

$$=\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2=\text{定值} \quad\cdots\cdots (19)$$

三、碰撞時間和彈簧的最大壓縮量

簡諧運動一週期的時間是經過四次振幅，而當碰撞開始到彈簧壓縮量達最大值是經一個振幅，再由彈簧最大壓縮量到恢復原長，又經過另一個振幅，如此共歷經兩個振幅，故所花的時間為週期的一半，整個碰撞過程歷時

$$t_c=\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}=\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}{k}} \quad\cdots\cdots (20)$$

這碰撞經歷的時間 t_c 也可以從 $v_{12}(t)$ 求出，當碰撞結束時，$v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 都不再變化，亦即 $v_{12}(t)$ 不隨時間改變，得 $\frac{d}{dt}v_{12}(t)=0$ ，由此得出

$$\frac{d}{dt}\left[(u_1-u_2)\cos\omega_0 t\right]_{t=t_c}=0\Rightarrow -\omega_0(u_1-u_2)\sin\omega_0 t_c=0\Rightarrow t_c=\frac{n\pi}{\omega_0},n=1,2,3...$$

因僅發生一次碰撞，所以取 n =1 代入，得 $t_c=\frac{\pi}{\omega_0}$ ，和(20)式的結果相同。

再來由於 $E_{in}=K_{in}+U_{in}=\text{定值}\Rightarrow \Delta U_{in}=-\Delta K_{in}\Rightarrow U_{in}=\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2-\frac{1}{2}\mu(v_1-v_2)^2$ ，即當 $v_1=v_2=v_c$ 時，U_{in} 達最大值，即

$$U_{in}^{\max} = \frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2 \quad \text{.......... (21)}$$

這表示內位能(或彈力位能)U_{in} 的最大值為碰撞前系統的內動能。茲取 m_1=1kg、u_1=2m/s；m_2=1kg、u_2=-0.5m/s 和 k=2 N/m 畫出系統的總動能 $K_t = K_1 + K_2$、質心動能 K_{cm}、內動能 K_{in} 、內位能 U_{in} 和力學能 $E = K_t + U_{in}$ 隨時間 t 變化的函數圖，如圖 3 所示。

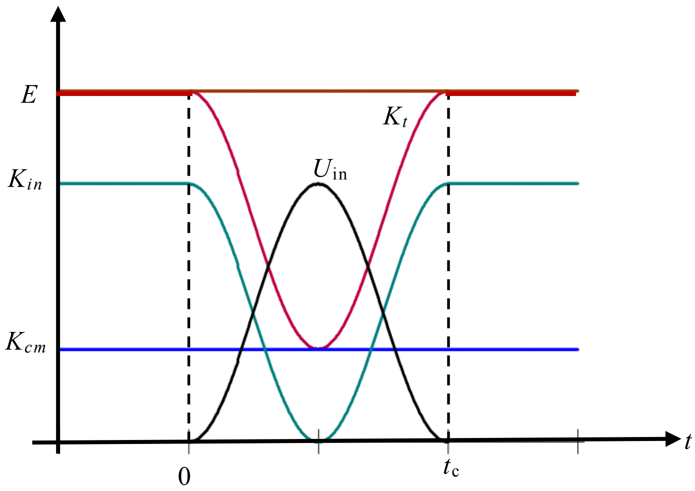

圖 3、碰撞期間，各種能量隨時間的變化圖形。t = 0 表碰撞開始，t = t_c 表碰撞結束。

四、碰撞終了時，兩物體的速度

因整個碰撞歷時 $t_c = \dfrac{\pi}{\omega_0}$，現在我們用 $\omega_0 t_c = \pi$，代入(14)式，得碰撞終了時，兩物體的速度公式

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 = 2v_c - u_1 \\[2ex] u_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2 = 2v_c - u_2 \end{cases} \quad \text{.......... (22)}$$

同(3)式。

由上述公式也可以知道

$$\begin{cases} u_1' - v_c = -(u_1 - v_c) \\ u_2' - v_c = -(u_2 - v_c) \end{cases} \quad \cdots\cdots (23)$$

上式的物理意義為：以質心速度 v_c 運動的觀察者，會看到一維彈性碰撞後，個別物體遠離質心的速度與碰撞前接近質心的速度量值相同但方向相反。此外，我們也可以得到 $u_2' - u_1' = u_1 - u_2$，其物理意義為：碰撞後兩物體彼此遠離的相對速度量值等於碰撞前兩物體彼此接近的相對速度量值，也就是恢復係數 $e = \dfrac{u_2' - u_1'}{u_1 - u_2} = 1$ 的碰撞是彈性碰撞。

現在沿用圖 3 所採用的數據，可畫出 $v_1(t)$和 $v_2(t)$隨時間 t 變化的函數圖如下：

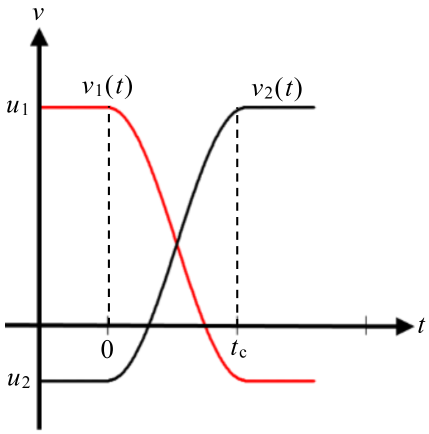

圖 4、碰撞期間，兩物體速度 $v_1(t)$和 $v_2(t)$隨時間 t 的變化圖形。$t = 0$ 表碰撞開始，$t = t_c$ 表碰撞結束。

肆、完全非彈性碰撞下碰撞過程中的速度與能量變化

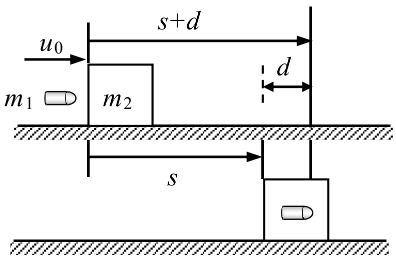

圖 5、完全非彈性碰撞

設有一顆質量為 m_1 子彈以初速 u_0，入射靜止於光滑地面質量為 m_2 的木塊。當速度不是很大時，兩者間的動摩擦力 f 可視為定值。整個碰撞過程可由底下兩者運動方程式

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dv_1}{dt} = -f \\ m_2 \dfrac{dv_2}{dt} = f \end{cases} \quad \cdots\cdots (24)$$

解得。由初始條件：$v_1(t=0) = u_0$，$v_2(t=0) = 0$

$$\begin{cases} v_1(t) = u_0 - \dfrac{f}{m_1} t \\ v_2(t) = \dfrac{f}{m_2} t \end{cases} \quad \cdots\cdots (25)$$

上式代表二物體作等加速度運動。假設經歷碰撞時間為 t_c，此時兩者的速度相同，得

$$u_0 - \frac{f}{m_1} t_c = \frac{f}{m_2} t_c \Rightarrow t_c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_0}{f} = \frac{\mu u_0}{f} \quad \cdots\cdots (26)$$

將(26)式代入(25)式，得碰撞結束後兩者的速度

$$v_1(t_c) = v_2(t_c) = \frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2} = v_c$$

又子彈深入木頭的深度 d 可求得如下：

$$d = \int_0^{t_c} (v_1 - v_2) dt = \int_0^{t_c} \left(u_0 - \frac{f}{\mu} t \right) dt = u_0 t_c - \frac{f}{2\mu} t_c^2 = \frac{\mu u_0^2}{f} - \frac{f}{2\mu} \frac{\mu^2 u_0^2}{f^2} = \frac{\mu u_0^2}{2f} \quad \cdots\cdots (27)$$

因此能量減少 $-f(s+d) + fs = -fd = -f \dfrac{\mu u_0^2}{2f} = -\dfrac{1}{2} \mu u_0^2 = -K_{in}(t=0)$，『 – 』表系統的內動能減少，而減少的量為碰撞前系統的內動能，此為所有一維碰撞中，損失能量最多的一種碰撞。兩者速度 $v_1(t)$、$v_2(t)$隨時間的變化如圖 6 所示。

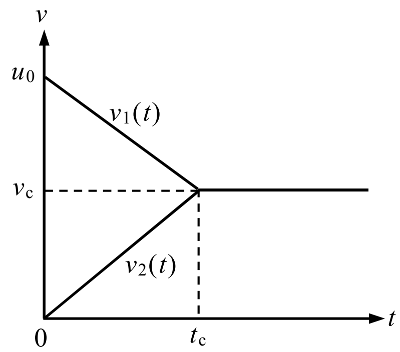

圖 6、完全非彈性碰撞碰撞期間，兩物體速度 $v_1(t)$和 $v_2(t)$隨時間 t 的變化圖形。$t = 0$ 表碰撞開始，$t = t_c$ 表碰撞結束。

至於內動能 K_{in} 如何隨時間減少，可求得如下：

$$K_{in}(t) = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(u_0 - \frac{f}{\mu}t\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{f^2}{\mu}\left(\frac{\mu u_0}{f} - t\right)^2 \quad \text{............} \ (28)$$

將總動能 K_t 、內動能 K_{in} 和質心動能 K_{cm} 對 t 作圖如圖 7 所示。

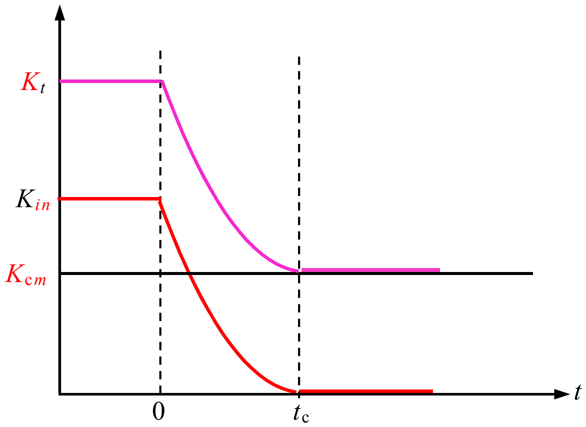

圖 7、完全非彈性碰撞碰撞期間，K_t、K_{cm} 和 K_{in} 隨時間 t 的變化圖形。$t = 0$ 表碰撞開始，$t = t_c$ 表碰撞結束。

伍、結論

兩物體在做一維空間的碰撞時，系統的總動能 K_t 可拆解成質心動能 K_{cm} 與內動能 K_{in} 之和，在碰撞期間若系統不受外力作用，則質心動能 K_{cm} 恆保持不變。至於內動能 K_{in} 會在碰撞過程中發生變化，它佔著舉足輕重的地位。若碰撞前後系統的內動能保持不變，此碰撞稱為彈性碰撞；若碰撞後內動能減少，此碰撞稱為非彈性碰撞；若碰撞後內動能完全消失，此碰撞是動能損失最多的，稱為完全非彈性碰撞。

參考文獻

林秀豪(2013)：第 12 講 Energy, Energy, Energy，清大開放式課程。取自 http://ocw.nthu.edu.tw/ocw/index.php?page=chapter&cid=96&chid=1221

高涌泉主編(2018)：基礎物理(二)B 下教師手冊，龍騰文化，Ch9-2 一維空間的碰撞，75-80。