正弦函數自卷積恆等式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

三角函數，横跨幾何、代數、分析三大面向，可說千變萬化。大部份的三角恆等式可用正餘弦定理與和角公式導出，但也有一些會需要用到複數的性質。在本篇文章，將導出一個三角恆等式：

$$\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin 2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n-1)\alpha\sin 2\beta+\sin(n\alpha)\sin\beta$$
$$=\frac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\cdot\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\ ,$$

其中 α 的倍數是從 1 到 n，β 的倍數是從 n 到 1，將此式稱為「正弦函數自卷積恆等式」。

貳、本文：

一、記號與已知公式

1.　完全齊次對稱多項式 (Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，且 $h_k(a)=a^k$。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$。　例：$h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$。

2.　拉格朗日插值型式

定義：$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\,k}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次拉格朗日插

值型式」。

註：以分子的次方來定義 L 的下標。

例：$L_6(a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i^{\,6}}{\prod_{\substack{1\le j\le 2\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^{\,6}}{a_1-a_2}+\frac{a_2^{\,6}}{a_2-a_1}$，

$L_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^{\,2}}{\prod_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^{\,2}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^{\,2}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^{\,2}}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$。

例：$L_6(a,b,c,d)=\frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^6}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^6}{(c-a)(c-b)(c-d)}$

$+\frac{d^6}{(d-a)(d-b)(d-c)}$。

3. $h-L$ **轉換公式**：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $n\ge 2$，$k\ge 0$。

(參考資料[1])

說明：此一公式，可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。

例：注意到 $L_6(a_1,a_2)=\frac{a_1^{\,6}}{a_1-a_2}+\frac{a_2^{\,6}}{a_2-a_1}=\frac{a_1^{\,6}-a_2^{\,6}}{a_1-a_2}$

$=a_1^{\,5}+a_1^{\,4}\cdot a_2+a_1^{\,3}\cdot a_2^{\,2}+a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,3}+a_1\cdot a_2^{\,4}+a_2^{\,5}=h_5(a_1,a_2)$。

此即 $h-L$ 轉換公式之中，取 $n=2$，$k=5$ 的情形：

$h_5(a_1,a_2)=L_{5+2-1}(a_1,a_2)=L_6(a_1,a_2)$。

公式使用說明：對於 $L_6(a_1,a_2)=\frac{a_1^{\,6}}{a_1-a_2}+\frac{a_2^{\,6}}{a_2-a_1}=\frac{a_1^{\,6}-a_2^{\,6}}{a_1-a_2}$，

首先，有 2 個變數 a_1,a_2，則 $n=2$。接著，$\frac{a_1^{\,6}}{a_1-a_2}$ 的分子為 6 次方，分母為 1 次方，所以化簡後所得齊次式 $h_k(a_1,a_2)$ 的次方 k 為 $6-1=5$，於是有 $L_6(a_1,a_2)=h_5(a_1,a_2)$。注意到 $6-5=1=2-1$，可以看出：**L 與 h 的下標之差，恰為變數個數減 1。**

由於 L 與 h 的下標之差，恰為變數個數減 1，因此 $h-L$ 轉換公式，也可寫成：

$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $k\ge n-1$。

例：$L_{11}(a,b,c,d)=h_{11-(4-1)}(a,b,c,d)=h_8(a,b,c,d)$。

在本文中會用到的情形是：

(1) $h_{n-1}(z,\overline{z})=L_{n-1+(2-1)}(z,\overline{z})=L_n(z,\overline{z})=\dfrac{z^n-\left(\overline{z}\right)^n}{z-\overline{z}}$。

(2) $L_{n+3}(z,\overline{z},w,\overline{w})=h_{n+3-(4-1)}(z,\overline{z},w,\overline{w})=h_n(z,\overline{z},w,\overline{w})$。

4.　自由分解重組恆等式 (參考資料[2])

$$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\cdots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2})\cdot\cdots\cdot h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m})]\ ,$$

其中 $i_m=n$。

例：$h_3(a,b,c,d)=\sum\limits_{\substack{i+j=3\\ i,j\ge 0}}h_i(a,b)\cdot h_j(c,d)$

$=h_3(a,b)\cdot h_0(c,d)+h_2(a,b)\cdot h_1(c,d)+h_1(a,b)\cdot h_2(c,d)+h_0(a,b)\cdot h_3(c,d)$。

註：變數 a,b,c,d 分成 2 組：第一組為 a,b，第二組為 c,d。

在此例中，$m=2$，$k=3$，$k_1=i$，$k_2=j$，$i_1=2$，$i_2=4$，

$a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=c$，$a_4=d$。

在本文中會用到的情形是：

$$h_n(z,\overline{z},w,\overline{w})=\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}}h_i(z,\overline{z})\cdot h_j(w,\overline{w})=\sum_{i=0}^{n}h_i(z,\overline{z})\cdot h_{n-i}(w,\overline{w})\text{。}$$

註：變數 $z,\overline{z},w,\overline{w}$ 分成 2 組：第一組為 $z,\overline{z}$，第二組為 $w,\overline{w}$。

在此例中，$m=2$，$k=n$，$k_1=i$，$k_2=j$，$i_1=2$，$i_2=4$，

$a_1 = z$，$a_2 = \overline{z}$，$a_3 = w$，$a_4 = \overline{w}$。

二、公式推導

(一) 正弦函數 n 倍角的完全齊次對稱多項式表示法：

設複數 $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$，則共軛複數 $\overline{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$，由「棣美弗定理」，有

$z^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ 與 $\left(\overline{z}\right)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$

$\Rightarrow z - \overline{z} = 2i\sin\alpha$ 且 $z^n - \left(\overline{z}\right)^n = 2i\sin n\alpha$

$\Rightarrow h_{n-1}(z,\overline{z}) = L_{n-1+(2-1)}(z,\overline{z}) = L_n(z,\overline{z})$ (由 $h-L$ 轉換公式)

$$= \frac{z^n - \left(\overline{z}\right)^n}{z - \overline{z}} = \frac{2i\sin n\alpha}{2i\sin\alpha} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$ 。

同樣地，設複數 $w = \cos\beta + i\sin\beta$，則共軛複數 $\overline{w} = \cos\beta - i\sin\beta$，且有

$$h_{n-1}(w,\overline{w}) = \frac{\sin n\beta}{\sin\beta}$$

意義：將 $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ 轉化成完全齊次對稱多項式 $h_{n-1}(z,\overline{z})$ 的形式。另一方面，由

$h_{n-1}(z,\overline{z}) = \dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$，可得 $h_n(z,\overline{z}) = \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$。

(二)將正弦函數自卷積轉化成拉格朗日插值型式

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot[\sin\alpha\sin(n+1)\beta + \sin 2\alpha\sin n\beta + \cdots + \sin n\alpha\sin 2\beta + \sin(n+1)\alpha\sin\beta]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(n-k+1)\beta}{\sin\beta}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} h_k(z,\bar{z})\cdot h_{n-k}(w,\bar{w})$$ (由 $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ 的完全齊次對稱多項式表示法)

$$=h_n(z,\bar{z},w,\bar{w})$$ (由「自由分解重組恆等式」)

$$=L_{n+3}(z,\bar{z},w,\bar{w})$$ (由 $h-L$ 轉換公式)

$$=\frac{z^{n+3}}{(z-\bar{z})(z-w)(z-\bar{w})}+\frac{(\bar{z})^{n+3}}{(\bar{z}-z)(\bar{z}-w)(\bar{z}-\bar{w})}$$

$$+\frac{w^{n+3}}{(w-\bar{w})(w-z)(w-\bar{z})}+\frac{(\bar{w})^{n+3}}{(\bar{w}-w)(\bar{w}-z)(\bar{w}-\bar{z})}$$ (拉格朗日插值型式)

(三)化簡拉格朗日插值型式

1. 由 $\begin{cases} z=\cos\alpha+i\sin\alpha \\ \bar{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+\bar{z}=2\cos\alpha \\ z\cdot\bar{z}=1 \end{cases} \Rightarrow (x-z)(x-\bar{z})=x^2-(2\cos\alpha)x+1$，

   而由 $\begin{cases} w=\cos\beta+i\sin\beta \\ \bar{w}=\cos\beta-i\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w+\bar{w}=2\cos\beta \\ w\cdot\bar{w}=1 \end{cases} \Rightarrow (x-w)(x-\bar{w})=x^2-(2\cos\beta)x+1$

   可得　$0=(z-z)(z-\bar{z})=z^2-(2\cos\alpha)z+1 \quad \Rightarrow z^2+1=(2\cos\alpha)z$

   與　$0=(\bar{z}-z)(\bar{z}-\bar{z})=\bar{z}^2-(2\cos\alpha)\bar{z}+1 \quad \Rightarrow \bar{z}^2+1=(2\cos\alpha)\bar{z}$

   以及 $(z-w)(z-\bar{w})=z^2-(2\cos\beta)z+1$ 與 $(\bar{z}-w)(\bar{z}-\bar{w})=\bar{z}^2-(2\cos\beta)\bar{z}+1$

2. 先考慮前兩項 $\dfrac{z^{n+3}}{(z-\bar{z})(z-w)(z-\bar{w})}+\dfrac{(\bar{z})^{n+3}}{(\bar{z}-z)(\bar{z}-w)(\bar{z}-\bar{w})}$

   其中 $z-\bar{z}=2i\sin\alpha$ ，且

$$\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)=z^2-(2\cos\beta)z+1=(2\cos\alpha)z-(2\cos\beta)z=(2\cos\alpha-2\cos\beta)z$$ ，

$$\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=\overline{z}^2-(2\cos\beta)\overline{z}+1=(2\cos\alpha)\overline{z}-(2\cos\beta)\overline{z}=(2\cos\alpha-2\cos\beta)\overline{z}$$

$$\Rightarrow\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=(2\cos\alpha-2\cos\beta)^2\cdot z\cdot\overline{z}=4(\cos\alpha-\cos\beta)^2$$

可得 $$\frac{z^{n+3}}{\left(z-\overline{z}\right)\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)}+\frac{\left(\overline{z}\right)^{n+3}}{\left(\overline{z}-z\right)\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)}$$

$$=\frac{z^{n+3}\cdot\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)-\left(\overline{z}\right)^{n+3}\cdot\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)}{\left(z-\overline{z}\right)\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)}$$

$$=\frac{z^{n+3}\cdot(2\cos\alpha-2\cos\beta)\cdot\overline{z}-\left(\overline{z}\right)^{n+3}\cdot(2\cos\alpha-2\cos\beta)\cdot z}{2i\sin\alpha\cdot 4(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$$

$$=\frac{2(\cos\alpha-\cos\beta)\cdot\left[z^{n+2}-\left(\overline{z}\right)^{n+2}\right]\cdot(z\cdot\overline{z})}{2i\sin\alpha\cdot 4(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$$

$$=\frac{2i\sin(n+2)\alpha}{2i\sin\alpha\cdot 2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

$$=\frac{\sin(n+2)\alpha}{2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

3. 同理， $$\frac{w^{n+3}}{\left(w-\overline{w}\right)\left(w-z\right)\left(w-\overline{z}\right)}+\frac{\left(\overline{w}\right)^{n+3}}{\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{w}-z\right)\left(\overline{w}-\overline{z}\right)}=\frac{\sin(n+2)\beta}{2\sin\beta\cdot(\cos\beta-\cos\alpha)}$$

於是可得

$$\frac{z^{n+3}}{\left(z-\overline{z}\right)\left(z-w\right)\left(z-\overline{w}\right)}+\frac{\left(\overline{z}\right)^{n+3}}{\left(\overline{z}-z\right)\left(\overline{z}-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)}$$

$$+\frac{w^{n+3}}{\left(w-\overline{w}\right)\left(w-z\right)\left(w-\overline{z}\right)}+\frac{\left(\overline{w}\right)^{n+3}}{\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{w}-z\right)\left(\overline{w}-\overline{z}\right)}$$

$$=\frac{\sin(n+2)\alpha}{2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\cos\beta)}+\frac{\sin(n+2)\beta}{2\sin\beta\cdot(\cos\beta-\cos\alpha)}$$

因此，可得

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot[\sin\alpha\sin(n+1)\beta+\sin2\alpha\sin n\beta+\cdots+\sin n\alpha\sin2\beta+\sin(n+1)\alpha\sin\beta]$$

$$=\frac{\sin(n+2)\alpha}{2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\cos\beta)}+\frac{\sin(n+2)\beta}{2\sin\beta\cdot(\cos\beta-\cos\alpha)}$$

也可寫成：

$$\sin\alpha\sin(n+1)\beta+\sin2\alpha\sin n\beta+\cdots+\sin n\alpha\sin2\beta+\sin(n+1)\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\sin(n+2)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+2)\beta\cdot\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

所以有

$$\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n-1)\alpha\sin2\beta+\sin(n\alpha)\sin\beta$$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\cdot\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

舉例而言：當 $n=4$ 時，有

$$\sin\alpha\sin4\beta+\sin2\alpha\sin3\beta+\sin3\alpha\sin2\beta+\sin4\alpha\sin\beta=\frac{\sin5\alpha\cdot\sin\beta-\sin5\beta\cdot\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

取 $\alpha=30°$ ， $\beta=60°$ ，

一方面， $\sin30°\sin240°+\sin60°\sin180°+\sin90°\sin120°+\sin120°\sin60°$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

另一方面，$\dfrac{\sin 150^\circ\cdot\sin 60^\circ-\sin 300^\circ\cdot\sin 30^\circ}{2(\cos 30^\circ-\cos 60^\circ)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$。

參、結語：

本篇文章用複數與完全齊次對稱多項式的性質，導出了三角恆等式：$\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin 2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n-1)\alpha\sin 2\beta+\sin(n\alpha)\sin\beta$

$=\dfrac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\cdot\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}$。令人好奇的是，此一等式是否能只用三角公式推出，例如：和角公式、倍角公式與積化和差公式等等，又或者是否有「proof without words」的直觀圖解方式呢？衷心期待各位賢明的讀者與數學先進，能展示此一恆等式的不同面向！

參考資料：

1. 陳建燁(2016)，推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)，**高中數學學科中心電子報第 114 期**，P6,11,12,14。
2. 陳建燁(2016)，完全齊次對稱多項式(起)：自由分解重組恆等式，**高中數學學科中心電子報第 113 期**。