平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

李輝濱

壹、前言

圓內接多邊形圖形是平面凸多邊形的特例之一，而與圓內接多邊形相關的各類方程式亦都是平面凸多邊形相對應方程式的特例！有趣的是；研究者可發現從特例方程式的結構雛形中能夠發展出推廣的凸多邊形一般化方程式。也就是可以自圖形裡對應的邊長與內角相關位置思索研判出一般化方程式的擴充形態。

現在要來觀察、比較、探討如何將圓內接多邊形的各特例方程式形式推展到一般化圖形方程式的思考情況，憑藉著這預期觀點，審慎規劃出下述思維運算路線，先從少數邊形的四邊形、五邊形圖形逐步分析起；

(一) 在下圖 1.平面凸四邊形領域裡有一個震古鑠今的著名定理；那就是圓內四邊形的托勒密定理(Ptolemy theorem)。見下圖 2. 一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，

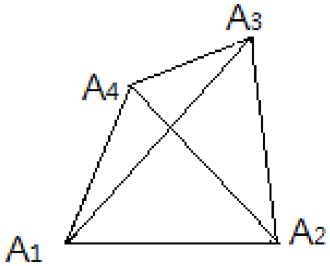


圖 1

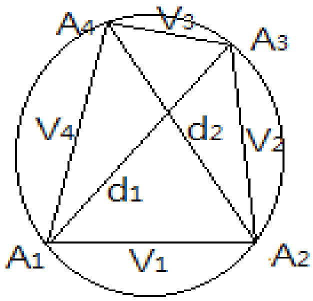


圖 2

令線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_1} = V_4$，對角線長 $\overline{A_1A_3} = d_1$，

$\overline{A_2A_4} = d_2$，則托勒密定理公式型式為 $d_1d_2 = V_1V_3 + V_2V_4$ ·················· (1)

現在要將此特例方程式(1)推展成平面凸四邊形一般化方程式，由圓內接四邊形圖形特徵，先將方程式(1)等號兩側完全平方，得下式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+2V_1V_2V_3V_4=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos\pi$$

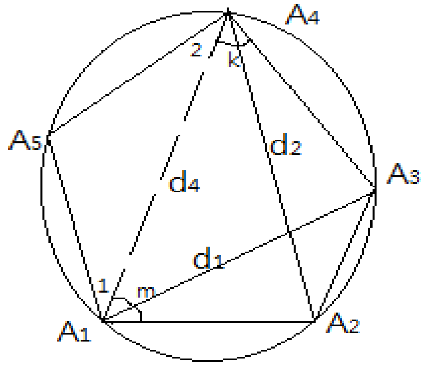
因 $\cos\pi=-1$ 且圓內接四邊形的兩個對角互為補角關係，故得下式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

方程式(2)是從特例方程式(1)推演而來；事實上，方程式(2)就是托勒密定理的推廣，也是圖 1.的平面凸四邊形兩對角線長度乘積一般化方程式！

(二) 再看下圖 3. 一個圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，

$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，對角線 $\overline{A_1A_3}=d_1$ ，$\overline{A_2A_4}=d_2$，$\overline{A_4A_1}=d_4$，



角度 1=$\angle A_5A_1A_4$
角度 2=$\angle A_5A_4A_1$
角度 m=$\angle A_4A_1A_2$
角度 k=$\angle A_1A_4A_3$

圖 3

(a) 觀察圖形中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，必存在有托勒密定理公式為

$$d_1d_2=V_1V_3+V_2d_4 \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{-}1)$$

(b) 對 $\Delta A_1A_5A_4$ 言，邊長線段

$$d_4= V_4\cos(\angle 2)+V_5\cos(\angle 1) =V_4\cos(A_4-k)+V_5\cos(A_1-m)=$$

$$V_4\cos(A_4+A_2-\pi)+V_5\cos(A_1+A_3-\pi)=-V_4\cos(A_4+A_2)-V_5\cos(A_1+A_3)\text{，}$$

將此 d_4 代入(1-1)式中，得

$$d_1d_2=V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

方程式(3)即為圓內接五邊形的兩對角線長度乘積方程式！

又在 $\Delta A_1A_5A_4$ 中，$V_4\sin(\angle 2)-V_5\sin(\angle 1)=0$，再經過同樣的角度轉換，可得

$$0=V_4\sin(A_4+A_2)-V_5\sin(A_1+A_3) \quad\cdots\cdots\cdots (4)$$

將(4)式乘上 V_2，即得 $0=V_2V_4\sin(A_4+A_2)-V_2V_5\sin(A_1+A_3)$ ……………… (5)

(c)　由方程式(3)的獨自平方再加上方程式(5)的獨自平方，得

$$(d_1d_2)^2=[V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3)]^2+$$

$$[V_2V_4\sin(A_4+A_2)-V_2V_5\sin(A_1+A_3)]^2$$

將上式展開再化簡，並變換角度，可得下式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \quad\cdots\cdots\cdots (6)$$

因為圓內接五邊形的任意兩內角的和並無特定關係值，所以推測這個方程式(6)必定也是一般形平面凸五邊形的一般化方程式！亦即先有了方程式(3)這個假設的特例雛型概念，再思考尋求推廣理論的有效推證方法，進而論證出完整的結果來。而方程式(6)也被完美地證明出是一般形平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式！請參考比對下圖 4.的一般凸五邊形，可見到此五邊形的各邊長、各頂角及其與兩相鄰對角線長相關位置皆依圖形結構很有秩序且具規律性特徵地出現在方程式(6)裡的各對應項中。

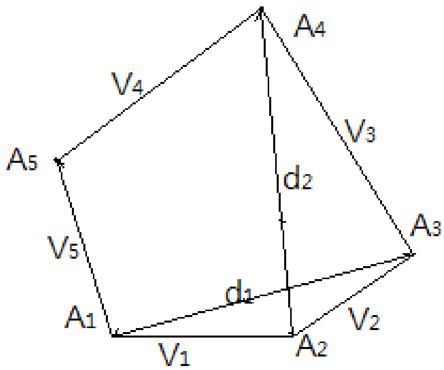


圖 4、一般形平面凸五邊形

那麼，接下來的平面凸六邊形是否也具有此項同類性質，可將其特例方程式推展到令

人期待的一般化方程式？答案是肯定的。就讓讀者來觀摩一下，品味、鑑賞仿照上述概念而發展出本篇正文的演繹推理論證歷程！

貳、本文

詳細比對平面凸四邊形的方程式(2)與凸五邊形方程式(6)，發現方程式(6)的項數內容完整的包含了方程式(2)，方程式(6)可由方程式(2)間接推證而得。同理，平面凸六邊形的方程式亦可由方程式(6)間接導證出來。在導證之前，先要看看圓內接六邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積公式的型態，再循此型態的軌跡脈絡來預測一般形平面凸六邊形的方程式。而在下列撰文推理演繹的運算過程中，需應用或對照到下述已知的數個基本數學性質；

一、數學基本性質－引理

引理 **1.**平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$的向量為$\vec{V_1}$，$\overline{A_2A_3}=V_2$的向量為$\vec{V_2}$，$\cdots$，$\overline{A_nA_1}=V_n$的向量為$\vec{V_n}$，則此平面凸 n 邊形即為此 n 個向量按順序箭頭接箭尾 相加而成的封閉凸 n 邊形。

依向量加法性質知；$\sum_{m=1}^{n}\vec{V_m}=\vec{0}=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}=0$

此處θ_m為V_m在直角坐標平面上的方位角。$\vec{i}$為正 X 軸方向的單位向量，$\vec{j}$為正 Y 軸方向的單位向量，再由平面正交坐標系性質知；

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \quad 且 \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

現在，將頂點 A_1置於直角坐標平面上的原點 O，如下圖(5)，使$\overline{A_1A_2}$邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad\cdots\cdots (7)$$

且

$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad\cdots\cdots (8)$$

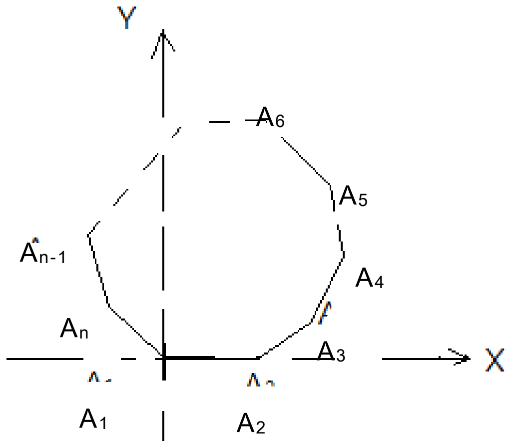


圖 5、凸 n 邊形

證明：由圖 5.知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，而 V_1 的方位角 θ_1 為零，V_2 的方位角 θ_2 為 $\pi - A_2$，V_3 的方位角 θ_3 為 $(\pi - A_2) + (\pi - A_3)$，$V_4$ 的方位角 θ_4 為 $(\pi - A_2) + (\pi - A_3) + (\pi - A_4)$，...，$V_n$ 的方位角 θ_n 為 $(n-1)\pi - (A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_n)$。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中：

$\sum_{m=1}^{n}(V_m \cos\theta_m) = 0$　且　$\sum_{m=1}^{n}(V_m \sin\theta_m) = 0$　，則

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m \cos\theta_m) = 0$$

$$= V_1 + V_2 \cos(\pi - A_2) + V_3 \cos(2\pi - A_2 - A_3) + \cdots + V_n \cos[(n-1)\pi - \sum_{k=2}^{n} A_k] = 0$$

將上列等式改寫成下式;

得　$$V_1 + \sum_{m=2}^{n} V_m \cos[(m-1)\pi - \sum_{k=2}^{m} A_k] = 0 \quad (7)$$

同理，再得　$$\sum_{m=2}^{n} V_m \sin[(m-1)\pi - \sum_{k=2}^{m} A_k] = 0 \quad (8)$$

證明完成。

引理 1.的一組方程式(7)與(8)所顯示的幾何意義是；方程式(7)代表此凸多邊形各邊長在 X 軸方向的投影向量總和為零，方程式(8)則表示凸多邊形各邊長在 Y 軸方向的投影向量總和為零。

引理 1.的一組方程式(7)與(8)是因以線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$ 為底，疊置在水平方向 X 軸所求得的結果，若換成以 $\overline{A_2A_3} = V_2$ 為底，將求得類似的另一組方程式；以此類推，總共會得

出 n 組。這 n 組方程式是非常好應用的，尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的組合關係式時至為有效！

引理 2. 在平面上給定一個凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，則此凸多邊形所有內角總和為 $A_1+A_2+A_3+A_4+....+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$

證明: 略。

引理 3. 任給一圓內接偶數邊 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，n=2k+2，k 為自然數，則此

多邊形的頂角組合 $A_1+A_3+A_5+A_7+....+A_{n-3}+A_{n-1}$

$$=A_2+A_4+A_6+A_8....+A_{n-2}+A_n=\frac{1}{2}(n-2)\pi$$

證明: 略。

引理 4. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

引理 5. 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 6.

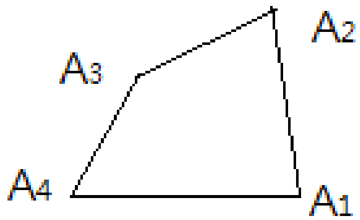


圖 6

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

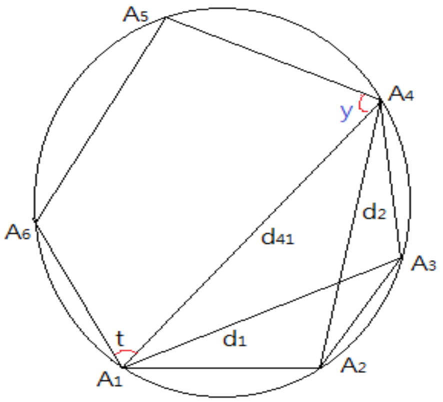
$$V_4^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之第 1 列。)

二、平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

(一) 首先要來推導圓內接六邊形鄰近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式在平面上給定一個圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，頂點 A_1 與 A_3 聯結的近周邊對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_1$ 及 $\overline{A_2A_4}=d_2$，中央對角線長 $\overline{A_4A_1}=d_{41}$，見下圖 7.



$\angle A_1A_4A_5$ = 角度 y
$\angle A_6A_1A_4$ = 角度 t

圖 7

(1) 對圖 7.中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有托勒密定理關係式如下；

$d_1d_2=V_1V_3+V_2d_{41}$　，現在將其完全平方，得下式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2d_{41})^2+2V_1V_2V_3d_{41} \quad \text{(1-2)}$$

(2) 應用引理 5.對四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ 可得下列餘弦關係式；

$${d_{41}}^2=V_4^2+V_5^2+V_6^2-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_4V_6\cos(A_5+A_6) \quad \text{(d-1)}$$

(3) 應用引理 1.取 n=4 代入方程式(7)與(8)，並作內角轉換，可得下列兩式；

$$V_1-V_2\cos A_2+V_3\cos(A_2+A_3)-V_4\cos A_1=0 \quad \text{(7-1)}$$

$$V_2\sin A_2-V_3\sin(A_2+A_3)-V_4\sin A_1=0 \quad \text{(8-1)}$$

對四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ 並參考方程式(7-1)與其邊長及角度對應關係，可得下式；

$$d_{41} = V_4\cos y - V_5\cos(y + A_5) + V_6\cos t$$

(4) 再由圓內接四邊形引理 3.性質知 兩對角互為補角關係，可得

角度 $y = A_4 - \angle A_1A_4A_3 = A_4 - (\pi - A_2) = A_2 + A_4 - \pi$，及

角 $t = A_1 - \angle A_2A_1A_4 = A_1 - (\pi - A_3) = A_1 + A_3 - \pi$，將 y 與 t 代入 d_{41} 中，並化

簡，得 $d_{41} = -V_4\cos(A_2 + A_4) + V_5\cos(A_2 + A_4 + A_5) - V_6\cos(A_1 + A_3)$ ····· (d-2)

(5) 現在將 ${d_{41}}^2$ 的(d-1)式及 d_{41} 的(d-2)式一起代入(1-2)式中，並逐次展開，循序運算

接著重新加以排列整理，得下列主要方程式；

$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2 &= (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)\\ &+ 2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2 + A_4 + A_5) - 2V_6V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5\\ &- 2V_2^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_2^2V_4V_6\cos(A_5 + A_6) \quad \cdots\cdots (9)\end{aligned}$$

(6) 再應用引理 3.的性質，知 $A_1 + A_3 + A_5 = 2\pi = A_2 + A_4 + A_6$，作適度的角度轉

換，得出新的下列公式；

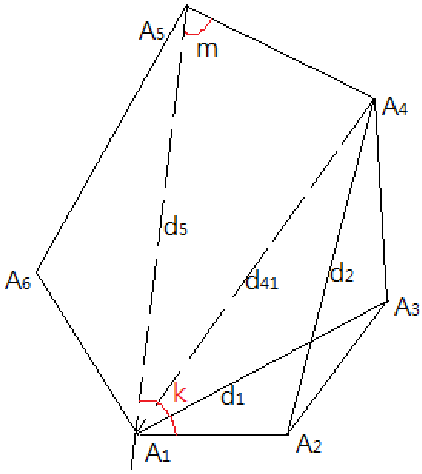
$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2 &= (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_2V_6)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos A_6\\ &+ 2V_1V_2V_3V_5\cos(A_5 - A_6) - 2V_6V_1V_2V_3\cos A_5 - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5\\ &- 2V_2^2V_5V_6\cos A_6 + 2V_2^2V_4V_6\cos(A_5 + A_6) \quad \cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

方程式(10)即為圓內接六邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式。因方程式內容項數很多很長，故以對角線長度乘積的平方來表述方程式型態較為適切。檢視方程式(9)，可見到六邊形的所有邊長及內角依著圖形結構順序很有規律地全都出現在各對應項中。

根據上述前言的預測思考模式，方程式(9)應該就是一般形平面凸六邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式！接下來就要看如何證明這個有條理地被預測出的一般化方程式。

(二) 平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，見下圖 8. 令線段長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，三臨近周邊對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_1$，$\overline{A_2A_4}=d_2$，$\overline{A_5A_1}=d_5$ 及一個中央對角線長 $\overline{A_4A_1}=d_{41}$；



$\angle A_1A_5A_4$ =角度 m

$\angle A_5A_1A_2$ =角度 k

圖 8

(1) 對圖 8.中的凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 部份，由應用自方程式(6)的平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化公式可得相對應的下式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2d_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$
$$-2d_5V_1V_2V_3\cos(k+A_3)-2V_2^2V_4d_5\cos(m) \quad \text{(6-1)}$$

(2) 對圖 8.中的三角形 $A_1A_5A_6$ 言，由餘弦定理可得下式；

$$d_5{}^2=V_5^2+V_6^2-2V_5V_6\cos A_6 \quad \text{(d-3)}$$

(3) 方程式(6-1)中等號右側第 5 項有 $d_5\cos(k+A_3)$ 的未知修正量，現在要以作輔助線幾何圖示法來找出這未知修正量與六邊形的邊長及角度關係；

(3a) 請看下圖 9.之一般形凸六邊形；

在頂點 A_1 處，作一直線 BC 通過頂點 A_1，使 $\angle BA_1A_2=A_3$ 頂角，則 $k+\angle BA_1A_2=k+A_3=\pi+a$，而 $d_5\cos(k+A_3)$ = $d_5\cos(\pi+a)$ = $-d_5\cos a$，又在頂點 A_5 處作一直線段 A_5D 垂直於直線 BC，使 D 點為垂

直交點，則對直角 ΔA_5A_1D 言， $d_5\cos(k+A_3)=-d_5\cos a$ 的值即為直線段 A_1D 長度的負值。

(3b) 通過頂點 A_6 處作一直線段 A_6F 垂直於直線 BC，使 F 點為垂直交點，另又通過頂點 A_6 處作一直線 A_6G 平行於直線 BC，直線 A_6G 與線段 A_5D 垂直交於 E 點。輔助線幾何作圖完成如圖 9.。

在圖 9.中很清楚鮮明地標示出被繪製出來的各個角度符號位置。

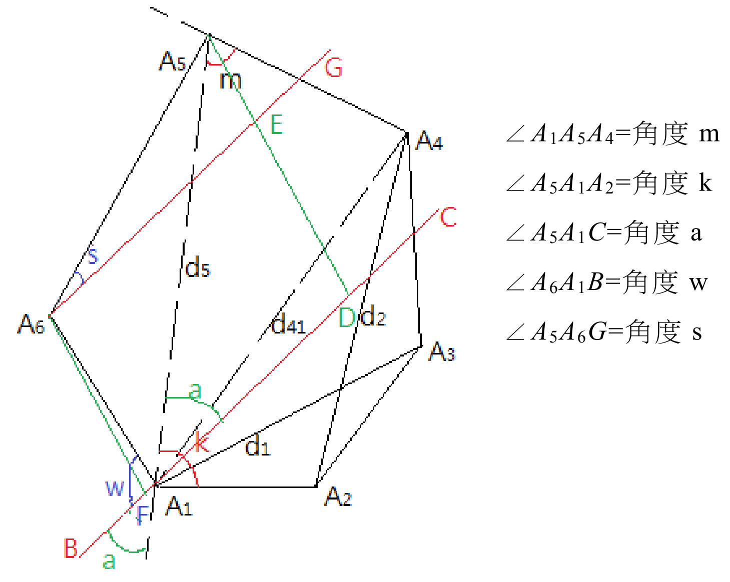


圖 9

(3c) 在頂點 A_1 處，角度 $w=\angle BA_1A_6=2\pi-A_1-\angle BA_1A_2=2\pi-A_1-A_3$，對直角 ΔA_6A_1F 言，$V_6\cos w=V_6\cos(2\pi-A_1-A_3)=V_6\cos(A_1+A_3)$，故 $V_6\cos(A_1+A_3)$ 的值就是直線段 A_1F 長度的正值。

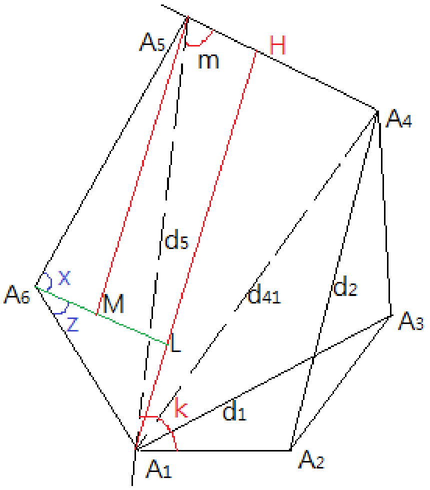
(3d) 在頂點 A_6 處，由平行線內側角性質知；$\angle EA_6A_1=w=\angle BA_1A_6$，而另一小角度 $s=A_6-\angle EA_6A_1=A_6-w=A_1+A_3+A_6-2\pi$，對直角 ΔA_6EA_5 言，$V_5\cos s=V_5\cos(A_1+A_3+A_6-2\pi)=V_5\cos(A_1+A_3+A_6)$，故在直角 ΔA_6EA_5 中 $V_5\cos(A_1+A_3+A_6)$ 的值就是直線段 A_6E 長度的正值。

(3e) 圖 9.中，對長方形 A_6FDE 言，線段 A_6E = 線段 A_1F + 線段 A_1D，故

$V_5\cos(A_1+A_3+A_6)=V_6\cos(A_1+A_3)-d_5\cos(k+A_3)$，移項後，得這未知修正量

$$-d_5\cos(k+A_3)=V_5\cos(A_1+A_3+A_6)-V_6\cos(A_1+A_3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(d-4)}$$

(4) 方程式(6-1)中等號右側第 6 項有第 2 個 $d_5\cos(m)$ 的未知修正量，同理，以作輔助線幾何圖示法來找出這第 2 個未知修正量與六邊形的邊長及角度關係；下圖 10. 中很清楚明晰地標示出被繪製出來的各個角度符號位置。



$\angle A_1A_5A_4$=角度 m

$\angle A_5A_1A_2$=角度 k

$\angle A_5A_6M$=角度 x

$\angle A_1A_6L$=角度 z

圖 10

(4a) 請看上圖 10.，在圖中自頂點 A_1 對直線段 A_4A_5 作一垂直線 A_1H，使 H 點為垂直交點。則對直角 ΔA_1HA_5 言，$d_5\cos m$ 的值就是直線段 A_5H 長度的正值。

(4b) 自頂點 A_6 處作一直線 A_6L 垂直於直線 A_1H，使 L 點為垂直交點。另通過頂點 A_5 處作一直線 A_5M 平行於直線 A_1H，直線 A_6L 與線段 A_5M 垂直交於 M 點。

因直線 A_6L 與線段 A_4A_5 相互平行，由同側內角性質知；角度

$x=\pi-A_5$，得 $V_5\cos x=V_5(\pi-A_5)=-V_5\cos A_5$，則對直角 ΔA_6MA_5

言，$V_5\cos A_5$的值就是直線段 A_6M 長度的負值。

(4c) 在頂角 A_6處，角度 $z=A_6-x=A_5+A_6-\pi$ ，故對直角 ΔA_6LA_1 言，得 $V_6\cos z=V_6\cos(A_5+A_6-\pi)=-V_6\cos(A_5+A_6)$ ，因此 $V_6\cos(A_5+A_6)$ 的值就是直線段 A_6L 長度的負值。

(4d) 在圖 10.中線段 $A_6L=$ 線段 A_6M+ 線段 $ML=$ 線段 A_6M+ 線段 A_5H ，故 $-V_6\cos(A_5+A_6)=-V_5\cos A_5+d_5\cos m$，移項後，得出第 2 個未知修正量為 $d_5\cos m = V_5\cos A_5-V_6\cos(A_5+A_6)$ ……………………………… (d-5)

(5) 兩個未知修正量都找到了，現在要將上述第(2)段的(d-3)式、第(3)段的(d-4)式及第(4)段的(d-5)式同時一起代入方程式(6-1)式中，再經化簡、移項整理，最後證明出充滿期待又美妙的下列方程式(11)式；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$
$$+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)-2V_6V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5$$
$$-2V_2^2V_5V_6\cos A_6+2V_2^2V_4V_6\cos(A_5+A_6) \cdots\cdots (11)$$

這方程式(11)即為平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式！

方程式(11)真的與圓內接六邊形方程式(9)完全相同，確認了我們的猜測。

三、檢驗

(一) 對方程式(11)，若令 $V_6=0$，使頂點 A_6趨近至 A_1，則平面凸六邊形退化成平面凸五邊形，**而方程式**(11)也退化成平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式為

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \cdots\cdots (6)$$

其中這一項 $+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)$ 再經由角度關係被轉換成五邊形的 $-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)$。

(二) 對方程式(11)，若同時令 $V_6=V_5=0$，使頂點 A_5、A_6 皆趨近至 A_1，則平面凸六邊形退化成平面凸四邊形，而方程式(11)也退化成平面凸四邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式為

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \cdots\cdots (2)$$

由此可見方程式(11)正是方程式(6)與方程式(2)的推廣。因此，方程式(11)完美涵蓋統一了方程式(6)與(2)！方程式(11)是永恆至極的正確且其內涵用途比公元 150 年時的托勒密定理公式更寬廣強大！

(三) 若此六邊形內接於一圓，由引理 3.內角和的均分性質，代入化簡後，即得

$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2&=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2+(V_2V_6)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos A_2\\&+2V_1V_2V_3V_5\cos(A_5-A_6)-2V_6V_1V_2V_3\cos A_5-2V_2^2V_4V_5\cos A_5\\&-2V_2^2V_5V_6\cos A_6+2V_2^2V_4V_6\cos(A_5+A_6) \cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

(a) 若令 $V_6=0$，使頂點 A_6 趨近至 A_1，則圓內接六邊形退化成圓內接五邊形，而方程式(11)式退化成下式 (3)式；

$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2&=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)\\&-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5\\&=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2[\cos^2(A_2+A_4)+\sin^2(A_2+A_4)]+\\&(V_2V_5)^2[\cos^2(A_1+A_3)+\sin^2(A_1+A_3)]-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)\\&-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)+2V_2^2V_4V_5\cos(A_1+A_2+A_3+A_4)\\&=[V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3)]^2+\end{aligned}$$

$$[V_2V_4\sin(A_4+A_2)-V_2V_5\sin(A_1+A_3)]^2 \cdots\cdots (12)$$

對圓內接五邊形言，有正弦定理性質；$V_4:\sin(A_1+A_3)=V_5:\sin(A_2+A_4)$，

故 $V_4\sin(A_4+A_2)-V_5\sin(A_1+A_3)=0$，因此，上述(12)式就化簡成下列圓內接五邊形方程式；

$$d_1d_2=V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3) \cdots\cdots (3)$$

(b) 若令 $V_6=V_5=0$，使頂點 A_5、A_6 皆趨近至 A_1，則圓內接六邊形退化成圓內接四邊形，而方程式(11)式、(6)式、(3)式與(2)式皆縮減成為 $d_1d_2=V_1V_3+V_2V_4$ 型態的托勒密定理公式！

參、結論

(1) 將特例方程式內容結構推廣延伸到一般化公式型態無疑是一項很重要的思考模式，歷史上許多著名數學家經常假手這樣的思維理念而發展出廣義的一般化理論，甚而展開新視野，創見出革新的研究領域！

(2) 輔助線幾何作圖法在理論推證過程中佔著一席重要且決定性的地位，藉著其作為可以巧妙地證明出未知修正量與已知量的相關結合等式關係，並因此而知悉這些未知量在圖形結構上的實質內涵意義，它的應用真是非常的實際。

(3) 方程式(1)式、(3)式、(7)式 與 (8)式內容裡各項的長度量與角度正餘弦式都僅呈現一次方的乘積型態，這類型態也只出現於圓內接多邊形的對角線長度公式中，其餘情況必有長度量的平方出現，例如；一般平面凸多邊形裡任一對角線長度的表示式都必有長度量的平方項。仔細觀察比較，可發現圓內接多邊形的公式形式要較一般多邊形者更簡潔得多。所以，研究時務必先從圓內接多邊形開始做起，使能得事半功倍之效！圓內接四邊形是圓內接偶數邊數多邊形的最少邊數形，故有方程式 (1)式的最簡潔形式。圓內接五邊形是圓內接奇數邊數多邊形的最少邊數形，故有方程式 (3)式的簡潔形式。

(4) 含有 cos 項的所有方程式中，每一 cos 項裡出現的角度或角度組合都呈現規律性地分佈；請看凸六邊形方程式中的這一項 $2V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)$，將其邊長乘積

$V_1V_2V_3V_5$分成兩對，第一對為V_1V_2，而這兩邊長V_1及V_2在圖形中依序排列所夾的角度恰是A_2。第二對為V_3V_5，這兩邊長V_3及V_5在圖形中依序排列自V_3至V_5所夾的角度恰是A_4+A_5。以此歸納出 cos 裡的角度組合為$A_2+A_4+A_5$！再看另一項$V_2^2V_4V_5\cos A_5$，前一對是V_2^2，這兩邊長V_2自身互相重疊沒有夾角，後一對V_4V_5所夾的角度就是A_5，故組合起來只有A_5這個角度。確實很有規律。所有 cos 項裡的角度組合結構都按如此的規律去操作。

(5) 本文論述所秉持的中心信念方針就是尋覓確立規律性,完整一致的規律性必能統合同系列類型的主題,使這些類型標的相互包含依持並構成恆常一貫關聯性的整體連續脈絡，這般思維希望能引致讀者的共鳴。

參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形面積研究 **數學傳播季刊 141 期**，2012 年 3 月。

李輝濱，圓內接五邊形面積研究 **數學傳播季刊 144 期**，2012 年 12 月。

李輝濱，圓內接奇數邊數多邊形正弦定理的推廣 **科學教育月刊 369、370 期**，2014 年 6、7 月出版發行。

李輝濱，預測與驗證平面凸多邊形面積公式 **科學教育月刊 398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

李輝濱, 平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式 **科學教育月刊 407 期**, 2018 年 4 月份出版發行.

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

黃武雄，**中西數學簡史**，1980，人間文化事業公司。

世部貞市郎，**幾合學辭典**，1988，九章出版社。

林聰源，**數學史---古典**篇，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，五南圖書出版公司。

項武義，**基礎分析學**，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry,* John Wiley and Sons , 1983 .