中學生通訊解題第 104-105 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10401

已知 128 及 250 為某公比為有理數的等比數列中之兩項，則在這些等比數列中，可能出現的正整數除了 128 及 250 之外還有哪些？

簡答：160、200

參考解答：

設公比為有理數 d，

$128 = 250 \times d^m \Rightarrow d^m = \dfrac{2^6}{5^3}$，其中 m 為非零整數，此數列之另一整數項為

$n = 250 \times d^k \Rightarrow n^m = 250^m \times (\dfrac{2^6}{5^3})^k = 2^{m+6k} \times 5^{3m-3k}$

，其中 m,k 為非零整數，因為 n 為整數，所以，

$n = 2^\alpha \times 5^\beta \Rightarrow 2^{m\alpha} \times 5^{m\beta} = 2^{m+6k} \times 5^{3m-3k}$

$\Rightarrow \begin{cases} m\alpha = m + 6k \\ m\beta = 3m - 3k \end{cases} \Rightarrow \alpha + 2\beta = 7$，

方程式 $\alpha + 2\beta = 7$ 的非負整數解為

(1,3)，(3, 2)，(5, 1)，(7, 0)，

所以可能的正整數 n 為 $2 \times 5^3 = 250$、$2^3 \times 5^2 = 200$、$2^5 \times 5 = 160$、$2^7 = 128$。

問題編號
10402

已知對於任意正整數 n，都有

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^3$，求

$\dfrac{1}{a_2 - 1} + \dfrac{1}{a_3 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{671} - 1}$ 之值為何。（請化為最簡分數）

簡答：$\dfrac{670}{2013}$

參考解答：

當 $n \geq 2$ 時，有

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n^3$，

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)^3$，

兩式相減，得 $a_n = 3n^2 - 3n + 1$，$n \in N$（驗算 $n=1$ 時亦成立)

所以 $\dfrac{1}{a_n - 1} = \dfrac{1}{3n(n-1)} = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n})$，

$n = 2,3,4,\cdots$ 因此 $\dfrac{1}{a_2 - 1} + \dfrac{1}{a_3 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{671} - 1}$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{670}-\frac{1}{671}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{671}\right)=\frac{670}{2013}$$ 。

【解題評析】

1.此題為簡易的遞迴試題，大部分同學可推得 $a_n=3n^2-3n+1, n\geq 2$，則 $a_n-1=3n^2-3n=3n(n-1)$，接著取倒數後相加利用對消即可求得。

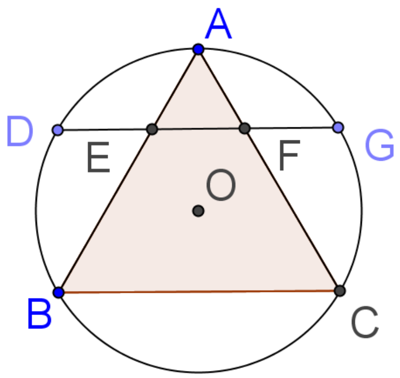
2.少部分同學觀察 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 後推出 a_n 的一般式 $a_n=1+6\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]$。

3.極少數同學直接觀察出

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{n(n-1)}$$

問題編號
10403

如圖，已知正 ΔABC 內接於圓 O，$\overline{AB}=86$，若點 E 在 $\overline{AB}$ 邊上，過 E 點作 $\overline{DG}//\overline{BC}$ 交圓 O 於點 D,G，交 $\overline{AC}$ 於點 F，設 $\overline{AE}=x,\overline{DE}=y$，如果 x,y 都是正整數，則 y 為何？



簡答：12

參考解答：

由題設知 $\overline{EF}=\overline{AE}=x$，由圓的對稱性知 $\overline{FG}=\overline{DE}=y$，由相交弦定理知 $\overline{AE}\cdot\overline{EB}=\overline{DE}\cdot\overline{EG}$，即 $x(86-x)=y(x+y)$。

如果 x 是奇數，則 $x(86-x)$ 也是奇數，此時，$y(x+y)$ 是偶數，所以，x 只能是偶數，y 也是偶數，

由 $x(86-x)=y(x+y)\Rightarrow x^2+(y-86)x+y^2=0$

$$\Rightarrow x=\frac{86-y\pm\sqrt{(y-86)^2-4y^2}}{2}$$ ，

$\Delta=(y-86)^2-4y^2\geq 0$，得 $0<y\leq 28$。

又因 x 是正整數，所以，Δ 的值必須是一個完全平方數。

由於 $\Delta=(86-3y)(86+y)$，且 $y=2,4,\cdots,28$，因此驗證後，只有 $y=12$ 時，Δ 的值才是完全平方數，此時 $x=2或72$。

【解題評析】

本題是由圓冪性質出發，求出方程式 $x(86-x)=y(x+y)$，其中 x,y 為正整數。後

續求 x,y，五位同學就有些不同的巧思。說明如下：

(1)新北市文山國中孫士明同學的作法同詳解。

(2)新竹市實驗國中曾元同學則是將方程式改寫成 $(x+\frac{y}{2}-43)^2+y^2=(43-\frac{y}{2})^2$ 後，由於 y 是偶數，

再由畢氏三元數設 $y=2mnk$，

$43-\frac{y}{2}=(m^2+n^2)k$，其中 k,m,n 為整數。

代回改寫式中得

$(m^2+m+n^2)k=43\Rightarrow k=1,(m,n)=(6,1),(1,6)\Rightarrow y=12$。

(3)臺北市天母國中余竑勳同學作法是將方程式改寫為 $y^2+xy+(x^2-86x)=0$，再利用 $D=-3x^2+344x$ 為完全平方數，

設其為 $k^2=D=x(-3x+344)$，

$(x,-3x+344)=(x,344)$，又 $x<86$，故 $(x,-3x+344)=1,2,2^2,2^3,43$。

問題編號
10404

把一塊 8×8 個方格的棋盤分割成 p 個矩形，使所分成的矩形滿足下列條件：

(A)每個矩形的邊都是棋盤的網格線；

(B)每個矩形中，白格與黑格個數相等；

(C)如果第 i 個矩形中白格數為 a_i，則有 $a_1<a_2<\cdots<a_p$。

試問：

(1)列出 $(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 所有可能的解。

(2)試在所有可能的分法中，求出 p 的最大值。

簡答：(1) (1,2,3,4,5,7,10) , (1,2,3,4,5,8,9) , (1,2,3,4,6,7,9) , (1,2,3,5,6,7,8)　(2)7

參考解答：

由已知有 $a_1+a_2+\cdots+a_p=32$，

由(C)又有 $a_i\ge i, i=1,2,\cdots,p$，

於是由(A)有 $1+2+\cdots+p\le 32$，

由(B)解得 $p\le 7$。

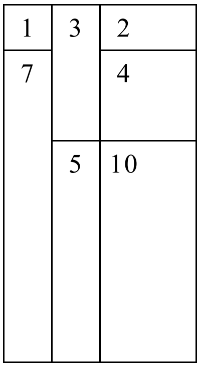
因為 $1+2+\cdots+7=28$，與 32 之差為 4，故只須將 4 分配到各項中去且保持數列的遞增性。因而得到所有可能的數列為

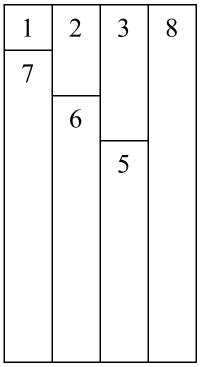
(a) 1,2,3,4,5,6,11 (b) 1,2,3,4,5,7,10 (c) 1,2,3,4,5,8,9

(d) 1,2,3,4,6,7,9 (e) 1,2,3,5,6,7,8

因分割成的七個矩形中不會出現在 22 個格子的矩形，故(a)不會實現，其它四種情形均可實現。

故知 7 是 p 的最大值，(b)(c)(d)(e)是滿足題中要求的所有可能的數列。





<table>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">8</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>2</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>2</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
</table>

問題編號
10405

在 1，11，111，⋯， $\underbrace{111\cdots11}_{n\text{個}1}$，⋯中，是否有 2013 的倍數？

簡答：有

參考解答：

考慮 2013 個數：1，11，111，⋯， $\underbrace{111\cdots11}_{2013\text{ 個}1}$

若它們都不是 2013 的倍數，

則它們除以 2013 所得的餘數中至少有兩個是相同的，在不失去一般性的情況下，

假設有 $\underbrace{111\cdots11}_{a\text{個}1}$ 和 $\underbrace{111\cdots11}_{b\text{個}1}$ 這兩個數除以 2013 所得的餘數是相同的，

其中 $1 \le a < b \le 2013$，

可得 $2013 \mid \underbrace{111\cdots11}_{b\text{ 個}1} - \underbrace{111\cdots11}_{a\text{個}1}$

$\Rightarrow 2013 \mid \underbrace{111\cdots11}_{b-a\text{ 個}1} \times 10^{a}$

但 $(2013, 10^{a}) = 1$，所以 $\Rightarrow 2013 \mid \underbrace{111\cdots11}_{b-a\text{個}1}$

這與 1，11，111，⋯， $\underbrace{111\cdots11}_{2013\text{ 個}1}$ 都不是 2013 的倍數矛盾，故在 1，11，111，⋯， $\underbrace{111\cdots11}_{n\text{ 個}1}$，⋯中，一定有 2013 的倍數。

【解題評析】

1.本題屬於中等難易度的數論題，有的同學直接了當找一個數來說明「的確有這樣的數是 2013 的倍數」；也有同學引用費馬小定理(好厲害)；大多數的同學則是用抽屜原理(亦稱鴿籠原理)去論證其存在性，這也是所附詳解用的方法。但或許是現階段較少證明題的學習。就內容來看，普遍都還是有些細節需要再注意。譬如說：

(1) 一開始應先回答「是」或「否」，然後再做論述支持你的答案(避免閱卷老師看了半天，還不知道你到底要證明「是」還是「否」)。

(2)論述中若有符號定義，應明確清楚。

(3) n 項數列與無限數列應清楚區分，若用 n 項數列來論述，應對 n 的限制說明清楚。

(4)論述過程中有些細節雖很明顯，但卻不是明顯到不用寫出來的程度。導致作答內容看起來「該精簡的地方繁複冗長」、「該仔細的地方卻又簡略帶過」。至於哪些該仔細、哪些該精簡。建議同學可多做證明的練習，再請數學老師批改，疑問之處多跟數學老師討論。

問題編號
10501

已知若干個正整數之和為 2013，求其乘積之最大值。

簡答：3^{671}

參考解答：

設 x_1 、 x_1 、 … 、 x_n 均為正整數，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=2013$ 使其乘積，$P=x_1x_2\cdots x_n$ 有最大值。

(1)這幾個正整數必不含 1。否則設 $x_1=1$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=2013$ ，可發現 $x_1x_2\cdots x_n<(1+x_2)x_3\cdots x_n$ 且 $(1+x_2)+x_3+\cdots+x_n=2013$，因此乘積變大，不合。

(2)因為 4=2+2=2×2，所以 4 可以用兩個 2 取代，不改變和與乘積。

(3)對所有 $i=1$ 、2、…、n， $x_i\le 4$ 。否則存在 $x_l>4$ ， $x_l=(x_l-2)+2$ 且 $(x_l-2)\cdot 2=x_l+(x_l-4)>x_l$ ，因此乘積變大，不合。

由(1)、(2)和(3)知： $P=2^r\times 3^s$ ，其 r，s 為非負整數。

因為 2+2+2=3+3 且 $2^3<3^2$ ，故必有 $r\le 2$ 。

由於 $2013=671\times 3$ ， $P=3^{671}$ 。

問題編號
10502

設多項式 $f(x)$ 滿足 $x(x-1)f(x-2)$ = $(x-3)(x-4)f(x)$，且 $f(3)$ =30，求 $f(x)$。

簡答：$f(x)=5x(x-1)(x-2)$

參考解答：

$x(x-1)f(x-2)=(x-3)(x-4)f(x)\cdots\cdots[1]$

由[1]式可知 $f(0)=f(1)=0\ \Rightarrow\ x(x-1)$ 是 $f(x)$的因式。

令 $f(x)=x(x-1)g(x)$， 則 $f(x-2)$ = $(x-2)(x-3)g(x-2)$，代回[1]式，即

$x(x-1)(x-2)(x-3)g(x-2)$ = $(x-3)(x-4)x(x-1)g(x)$，兩側同除以 $x(x-1)(x-3)$，

得 $(x-2)g(x-2)=(x-4)g(x)\cdots\cdots[2]$

由[2]式可知 $g(2)=0\ \Rightarrow\ x-2$ 是 $g(x)$ 的因式。

令 $g(x)=(x-2)h(x)$，則 $g(x-2)$ = $(x-4)h(x-2)$，代回[2]式，即

$(x-2)(x-4)h(x-2) = (x-4)(x-2)h(x)$，
兩側同除以$(x-2)(x-4)$，
得 $h(x-2) = h(x)$⋯⋯[3]。
由[3]式可知 $h(1) = h(3) = h(5) = h(7) = h(9) = h(11) = \cdots$，即存在無限多個實數 x，使 $h(x)$為定值，而知 $h(x)$為常數多項式。
設 $h(x)=a$，則 $g(x) = a(x-2)$，$f(x)=ax(x-1)(x-2)$，又 $f(3) = 30$，得 $a = 5$。
綜上所述，可知 $f(x)=5x(x-1)(x-2)$為所求。

【解題評析】

這個問題的核心概念有二，一是因式定理，二是代數基本定理的一個推廣。
因式定理：已知多項式 $f(x)$，若 $f(c)=0$，則 $x-c$ 是 $f(x)$的因式。
代數基本定理的推廣：n 次多項式方程式最多有 n 個根。
因式定理是餘式定理的特例，證明很容易，同學應該已經熟悉。代數基本定理的推廣，可重複使用因式定理推定，而用以判知滿足下列條件之兩多項式相等：

「若兩多項式函數 $F(x)$、$G(x)$之次數皆不大於 n，但存在 $n+1$ 個不同數值 α_k，$k=1, 2,\ldots, n+1$，使 $F(\alpha_k)=G(\alpha_k)$，則 $F(x)=G(x)$。」

以上述題解為例，何以多項式 $h(x)$等於常數多項式？補充說明如下：
$\because$ $f(x) = x(x-1)g(x)$，$g(x) = (x-2)h(x)$，$f(3) = 30$，
$\therefore$ $f(3) = 3\times2\times g(3) = 3\times2\times1\times h(3) = 30$，
得 $h(3) = 5$，因此，設多項式 $h(x)-5$ 是 n 次多項式，n 為自然數，則方程式 $h(x)-5=0$ 最多有 n 個根，但是，已知 1, 3, 5, 7, 9, 11,⋯ 都是它的根，根的個數多於 n，所以 $h(x)-5$ 不是 n 次多項式，而知它是零多項式，即 $h(x)-5=0$，得 $h(x)=5$。

本題共有 13 位同學應徵答題，其中有 11 位同學找到了正確的多項式，1 人數值代入失誤，另有 1 位同學答：「$x\leqq2$ 時，$f(x)=0$；$x\geqq3$ 時，$f(x)=5x^3-15x^2+10x$」，看到這個答案，直觀上要問：「$2<x<3$ 時，$f(x)$如何？」，根本而必須釐清的是「多項式不能分段定義」。同學求解此題，大致上都可找到並將 $x(x-1)(x-2)$為 $f(x)$的因式之事實說明清楚，但是對於 $h(x)$為常數多項式之原由，部分同學或未指明或少論述，是認知有不足？還是只是答題的疏忽？請再想想。

問題編號
10503

在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=12$，$\overline{AC}=9$，$\overline{BC}=13$，自 A 點分別作 $\angle B, \angle C$ 平分線的垂線，垂足分別為 N, M 點，試問 ΔAMN 與 ΔABC 面積的比值為何。

簡答：$\dfrac{2}{13}$

參考解答：

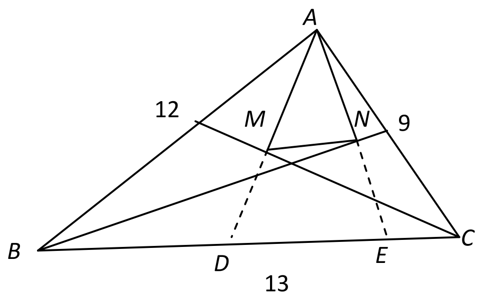
如下圖，延長 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BC}$ 交於點 D，延長 $\overline{AN}$ 與 $\overline{BC}$ 交於點 E。則 ΔACD 與 ΔABE 都是等腰三角形。

於是，$\overline{BE}=\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=\overline{AC}=9$。

又 $\overline{BC}=13$，則 $\overline{DE}=12+9-13=8$。

故 $a\Delta ADE : a\Delta ABC = 8:13$，因為 M,N 分別為 $\overline{AD},\overline{AE}$ 的中點，所以 $a\Delta AMN=\frac{1}{4}a\Delta ADE$。

因此，$\frac{a\Delta AMN}{a\Delta ABC}=\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$。



問題編號
10504

設 S 為一個由 11 個不大於 190 的相異正整數所構成的集合，試證明 S 必定存在兩個子集合 S_1 與 S_2，滿足 S_1 與 S_2 中的正整數均相異，且 S_1 與 S_2 的整數和相同。

參考解答：

S 共有 $2^{11}-1=2047$ 個非空子集合。

任意一個子集合的整數和必小於或等於

$190+189+188+\ldots+180=2035$

依鴿籠原理(pigeonhole's principle)，必定有兩個相異子集合 A_1 與 A_2 的整數和相同。

設 $S_1=A_1-A_1\cap A_2$ 與 $S_2=A_2-A_1\cap A_2$

$\Rightarrow S_1$ 與 S_2 中的正整數均相異，

$\because A_1$ 與 A_2 的整數和相同　$\therefore S_1$ 與 S_2 的整數和相同，故得證。

【解題評析】

鴿籠原理(pigeonhole's principle)，又叫作 Dirichlet 抽屜原理，用鴿籠原理可以證明出許多神奇的結果，是應用廣泛又有威力的原理之一。

鴿籠原理(pigeonhole's principle)：

若有 n 個籠子和 n+1 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 2 隻鴿子。

另一種為：若有 n 個籠子和 kn+1 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 k+1 隻鴿子。

同學可以多加查閱鴿籠原理的應用，有許多生活上有趣、神奇的結果。

問題編號
10505

定義在實數上的函數 $f(x)$滿足 $f(0)=0$，f

$(x)+f(1-x)=1$，$f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，且當 $0\le x_1<x_2\le 1$ 時，滿足 $f(x_1)\le f(x_2)$，試求 $f(\frac{1}{2013})$之值。

簡答：$\frac{1}{32}$

參考解答：

首先令 $x=1$，則 $f(1)+f(0)=1$，$f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}f(1)$，又因為 $f(0)=0\Rightarrow f(1)=1$，$f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}$，再令 $x=\frac{1}{5}$，則 $f(\frac{1}{5})+f(\frac{4}{5})=1\Rightarrow f(\frac{4}{5})=\frac{1}{2}$。

$\because$ 當 $0\le x_1<x_2\le 1$ 時，$f(x_1)\le f(x_2)$ $\therefore \frac{1}{5}\le x\le \frac{4}{5}$，$f(x)=\frac{1}{2}$，由 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}f(5x)$，故 $f(\frac{1}{2013})=\frac{1}{2}f(\frac{5}{2013})=\frac{1}{2^2}f(\frac{5^2}{2013})=\ldots=(\frac{1}{2})^4 f(\frac{5^4}{2013})$，且 $\frac{1}{5}\le\frac{5^4}{2013}\le\frac{4}{5}\Rightarrow f(\frac{1}{2013})=\frac{1}{32}$。