費氏數列與 Padovan 數列的二項式係數恆等式：用「階和數列」的觀點

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言：

在參考資料[1]中，探討了一個和二項式係數與費氏數(註 1)有關的恆等式：

$$C_0^nF_0+C_1^nF_1+C_2^nF_2+\cdots+C_{n-1}^nF_{n-1}+C_n^nF_n=F_{2n}\text{ ，}$$

亦即 $\sum_{k=0}^{n}C_k^nF_k=F_{2n}$。此一等式，可視為二項式係數與費氏數的「內積」，當時有一耐人尋味之處：內積的結果為何是費氏數，而不是二項式係數？

另一方面，在參考資料[2] 的第 53 頁，出現了有關二項式係數與 Padovan 數列(註 2)的恆等式。

本篇文章一開始，將先給出「階和數列」的定義，建立一般項公式，接著應用到費氏數列與巴都萬數列，以證明較為一般的恆等式：

$$\sum_{i=0}^{k}C_i^kF_{n+i}=F_{2k+n}\text{ ，}$$

$$\sum_{i=0}^{k}C_i^kP_{n+i}=P_{3k+n}\qquad\text{與}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_k^nP_{l\cdot n+r+k}=P_{(l+3)n+r}\text{ ，}$$

註 1： 費氏數列 $\langle F_n\rangle:\begin{cases}F_0=0,F_1=1\\F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$ 。

數列的前幾項為 0，1，1，2，3，5，8，13，21，……。

註 2： Padovan 數列 $\langle P_n\rangle:\begin{cases}P_0=P_1=P_2=1\\P_{n+3}=P_{n+1}+P_n\end{cases}$ 。 (參考資料[2])

數列的前幾項為 1，1，1，2，2，3，4，5，7，……，譯作巴都萬數列。

貳、本文：

一、階和數列的定義與一般項公式

(一) 階和數列的定義：

1. 對於數列 $\langle a_n \rangle$ ： $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ，令 $s^{(1)}a_n = a_n + a_{n+1}$ ，其中 $n = 0,1,2,\cdots$ ，則所得的數列 $\langle s^{(1)}a_n \rangle$ ： $a_0 + a_1, a_1 + a_2, \cdots\cdots, a_n + a_{n+1}, \cdots\cdots$ ，稱為 $\langle a_n \rangle$ 的一階階和數列。

例： $s^{(1)}a_0 = a_0 + a_1$ ·· (註 3)

2. 對於 $\langle s^{(1)}a_n \rangle$ ，令 $s^{(2)}a_n = s^{(1)}a_n + s^{(1)}a_{n+1}$ ，其中 $n = 0,1,2,\cdots$ ，

則所得的數列 $\langle s^{(2)}a_n \rangle$ ： $s^{(1)}a_0 + s^{(1)}a_1, \cdots\cdots, s^{(1)}a_n + s^{(1)}a_{n+1}, \cdots\cdots$ ，稱為 $\langle a_n \rangle$ 的二階階和數列，其中的 $s^{(2)}a_n = s^{(1)}a_n + s^{(1)}a_{n+1} = (a_n + a_{n+1}) + (a_{n+1} + a_{n+2}) = a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$ ，

因此可得 $\langle s^{(2)}a_n \rangle$ ： $a_0 + 2a_1 + a_2, \cdots\cdots, a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}, \cdots\cdots$ 。

3. 同樣地，對於 $\langle s^{(k-1)}a_n \rangle$ ，令 $s^{(k)}a_n = s^{(k-1)}a_n + s^{(k-1)}a_{n+1}$ ，其中 $n = 0,1,2,\cdots$ ，

則所得的數列 $\langle s^{(k)}a_n \rangle$ ： $s^{(k-1)}a_0 + s^{(k-1)}a_1, \cdots\cdots, s^{(k-1)}a_n + s^{(k-1)}a_{n+1}, \cdots\cdots$ ，稱為 $\langle a_n \rangle$ 的 k 階階和數列。 ·· (註 4)

例： $\langle s^{(3)}a_n \rangle$ ： $s^{(2)}a_0 + s^{(2)}a_1, \cdots\cdots, s^{(2)}a_n + s^{(2)}a_{n+1}, \cdots\cdots$ ，其中的 $s^{(3)}a_n = s^{(2)}a_n + s^{(2)}a_{n+1}$

$= (a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}) + (a_{n+1} + 2a_{n+2} + a_{n+3}) = a_n + 3a_{n+1} + 3a_{n+2} + a_{n+3}$ 。

註 3： $s^{(1)}a_n$ 的 s 代表 sum，而 $s^{(1)}a_n = a_n + a_{n+1}$ 即為原數列 $\langle a_n \rangle$ 之中相鄰兩項之和。

註 4：此處列出階和數列的兩種圖解方式，供讀者參考：

圖解 1：

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\langle a_n \rangle: & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & \cdots \\
\langle s^{(1)} a_n \rangle: & & s^{(1)}a_0 & s^{(1)}a_1 & s^{(1)}a_2 & \cdots & \cdots & s^{(1)}a_n \\
\langle s^{(2)} a_n \rangle: & & & s^{(2)}a_0 & s^{(2)}a_1 & \cdots & \cdots \\
\langle s^{(3)} a_n \rangle: & & & & s^{(3)}a_0 \\
& & & & & \ddots
\end{array}
$$

圖解 2：

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\langle a_n \rangle: & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & \cdots \\
\langle s^{(1)} a_n \rangle: & & a_0+a_1 & a_1+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & \cdots & a_n+a_{n+1} \\
\langle s^{(2)} a_n \rangle: & & & a_0+2a_1+a_2 & a_1+2a_2+a_3 & \cdots & \cdots \\
\langle s^{(3)} a_n \rangle: & & & & a_0+3a_1+3a_2+a_3 \\
& & & & & \ddots
\end{array}
$$

(二) 階和數列的一般項公式

由以上的例子觀察，可看到二項式係數的出現，不難歸納出以下的「階和數列一般項公式」：

$$s^{(k)}a_n = C_0^k a_n + C_1^k a_{n+1} + \cdots + C_i^k a_{n+i} + \cdots + C_k^k a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} C_i^k a_{n+i} \text{ 。}$$

接著，證明階和數列的一般項公式：

命題：$s^{(k)}a_n = \sum_{i=0}^{k} C_i^k a_{n+i}$

證明：用數學歸納法！

當 $k=1$ 時，$s^{(1)}a_n = a_n + a_{n+1} = \sum_{i=0}^{1} C_i^1 a_{n+i}$，命題成立。

假設當 $k=m$ 時命題成立，即 $s^{(m)}a_n = \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+i}$，

則當 $k=m+1$ 時，$s^{(m+1)}a_n = s^{(m)}a_n + s^{(m)}a_{n+1}$ (由階和數列的定義)

$$= \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+i} + \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+1+i} \qquad \text{(由歸納法假設)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+i} + \sum_{i+1=1}^{m+1} C_{(i+1)-1}^m a_{n+(i+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+i} + \sum_{j=1}^{m+1} C_{j-1}^m a_{n+j} \qquad \text{(其中令 } j=i+1\text{)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_i^m a_{n+i} + \sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}^m a_{n+i}$$

$$= (C_0^m a_n + \sum_{i=1}^{m} C_i^m a_{n+i}) + (\sum_{i=1}^{m} C_{i-1}^m a_{n+i} + C_m^m a_{n+m+1})$$

$$= C_0^m a_n + (\sum_{i=1}^{m} C_i^m a_{n+i} + \sum_{i=1}^{m} C_{i-1}^m a_{n+i}) + C_m^m a_{n+m+1}$$

$$= C_0^{m+1} a_n + \sum_{i=1}^{m} (C_i^m + C_{i-1}^m) a_{n+i} + C_{m+1}^{m+1} a_{n+m+1}$$

$$= C_0^{m+1} a_n + \sum_{i=1}^{m} C_i^{m+1} a_{n+i} + C_{m+1}^{m+1} a_{n+m+1} \qquad \text{（因為 } C_i^m + C_{i-1}^m = C_i^{m+1}\text{）}$$

$= \sum_{i=0}^{m+1} C_i^{m+1} a_{n+i}$，命題亦成立。故由數學歸納法，所欲證之命題成立。

二、對費氏數列作階和：

由費氏數列的遞迴關係 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，可得如下的階和：

$$
\begin{array}{llllllllll}
\langle F_n \rangle: & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \cdots\ \cdots & F_n & F_{n+1} & \cdots\ \cdots \\
\langle s^{(1)}F_n \rangle: & & F_2 & F_3 & F_4 & \cdots\ \cdots & F_{n+2} & & \\
\langle s^{(2)}F_n \rangle: & & & F_4 & F_5 & \cdots\ \cdots & & & \\
\langle s^{(3)}F_n \rangle: & & & & F_6 & \cdots\ \cdots & & & \\
& & & & & \ddots & & &
\end{array}
$$

觀察： 以 $\langle F_n \rangle$ 為第 0 列，$\langle s^{(1)}F_n \rangle$ 為第 1 列。

第 k 列的最左方的項 $s^{(k)}F_0$ 恰為 F_{2k}，而向右方的各項，以費氏數的形式而言，下標從 $2k$ 開始，逐項增加 1，因此可歸納出第 k 列第 n 項的 $s^{(k)}F_n$ 應為 F_{2k+n} 。

例如：第 2 列第 0 項的 $s^{(2)}F_0$ 為 $F_4 = F_{2\times2+0}$ ，而第 2 列第 1 項的 $s^{(2)}F_1$ 為 $F_5 = F_{2\times2+1}$ 。

命題：

費氏數列 $\langle F_n \rangle$ 的各階階和數列之中，第 k 列第 n 項的 $s^{(k)}F_n$ 為 F_{2k+n} ，其中 $k \ge 1$ ，且 $n \ge 0$ 。

證明：用數學歸納法！

當 $k=1$ 時，第 1 列第 n 項的 $s^{(1)}F_n = F_n + F_{n+1} = F_{n+2} = F_{2\times1+n}$ ，命題成立。

假設當 $k=m$ 時命題成立，即第 m 列第 n 項的 $s^{(m)}F_n = F_{2m+n}$ ，

則當 $k=m+1$ 時， $s^{(m+1)}F_n = s^{(m)}F_n + s^{(m)}F_{n+1}$ (由階和數列的定義)

$$= F_{2m+n} + F_{2m+n+1} \quad \text{(由歸納法假設)}$$
$$= F_{2m+n+2} \quad \text{(由費氏數列的定義)}$$
$$= F_{2(m+1)+n}$$ ，命題亦成立。

故由數學歸納法，可知欲證之命題成立。

接著，一方面，由階和數列的一般項公式，有 $s^{(k)}F_n = \sum_{i=0}^{k} C_i^k F_{n+i}$ ，

另一方面，由所證之命題，有 $s^{(k)}F_n = F_{2k+n}$ ，

所以可得 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k F_{n+i} = s^{(k)}F_n = F_{2k+n}$ ，即為在前言中所提到的一個恆等式。

特別地，取 $n=0$ ，即得 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k F_i = F_{2k}$ 。

三、對 Padovan 數列作階和：

由 Padovan 數列的遞迴關係式 $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$ ，可得如下的階和：

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\langle P_n \rangle : & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots\ \cdots & P_n & P_{n+1} & \cdots\ \cdots \\
\langle s^{(1)}P_n \rangle : & & P_3 & P_4 & P_5 & \cdots\ \cdots & P_{n+3} & & \\
\langle s^{(2)}P_n \rangle : & & & P_6 & P_7 & \cdots\ \cdots & & & \\
\langle s^{(3)}P_n \rangle : & & & & P_9 & \cdots\ \cdots & & & \\
 & & & & \ddots & & & &
\end{array}
$$

觀察：以 $\langle P_n \rangle$ 為第 0 列，$\langle s^{(1)}P_n \rangle$ 為第 1 列。

第 k 列的最左方的項 $s^{(k)}P_0$ 恰為 P_{3k}，而向右方的各項，以 Padovan 數列的形式而言，

下標從 $3k$ 開始，逐項增加 1，因此可歸納出第 k 列第 n 項的 $s^{(k)}P_n$ 應為 P_{3k+n} 。

例如：第 2 列第 0 項的 $s^{(2)}P_0$ 為 $P_6 = P_{3\times 2+0}$ ，而第 2 列第 1 項的 $s^{(2)}P_1$ 為 $P_7 = P_{3\times 2+1}$ 。

命題：Padovan 數列 $\langle P_n \rangle$ 的各階階和數列之中，第 k 列第 n 項的 $s^{(k)}P_n$ 為 P_{3k+n}，其中 $k \geq 1$，且 $n \geq 0$。

證明：用數學歸納法！

當 $k=1$ 時，第 1 列第 n 項的 $s^{(1)}P_n = P_n + P_{n+1} = P_{n+3} = P_{3\times 1+n}$，命題成立。

假設當 $k=m$ 時命題成立，即第 m 列第 n 項的 $s^{(m)}P_n = P_{3m+n}$，

則當 $k=m+1$ 時，$s^{(m+1)}P_n = s^{(m)}P_n + s^{(m)}P_{n+1}$　　(由階和數列的定義)

$= P_{3m+n} + P_{3m+n+1}$　　(由歸納法假設)

$= P_{3m+n+3}$　　(由 Padovan 數列的定義)

$= P_{3(m+1)+n}$，命題亦成立。

故由數學歸納法，可知欲證之命題成立。

接著，一方面，由階和數列的一般項公式，有 $s^{(k)}P_n = \sum_{i=0}^{k} C_i^k P_{n+i}$，

另一方面，由所證之命題，有 $s^{(k)}P_n = P_{3k+n}$，

所以可得 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k P_{n+i} = s^{(k)}P_n = P_{3k+n}$，

特別地，取 $n=0$，得 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k P_i = P_{3k}$。

此外，在 $\sum_{i=0}^{k} C_i^k P_{n+i} = P_{3k+n}$ 之中，

將 i、k 與 n 分別改為 k、n 與 m，可得 $\sum_{k=0}^{n} C_k^n P_{m+k} = P_{3n+m}$，

再以 $m = l \cdot n + r$ 代入，可得 $P_{(l+3)n+r} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n P_{l\cdot n+r+k}$，

此應為參考資料[2]第 53 頁定理 18 所欲證之等式。

參、討論與總結：

在處理有關組合數學的主題時，「算兩次」(Double Counting)是一個常用的想法：一方面，證明階和數列的一般項公式，另一方面，證明費氏數列與 Padovan 數列作階和之後的一般項公式，兩相對照之下，即得所欲證之恆等式：

$$\sum_{i=0}^{k} C_i^k F_{n+i} = F_{2k+n} \text{，} \sum_{i=0}^{k} C_i^k P_{n+i} = P_{3k+n} \text{ 與 } \sum_{k=0}^{n} C_k^n P_{l\cdot n+r+k} = P_{(l+3)n+r} \text{。}$$

一般而言，階差數列要比階和數列來得常見，甚至可能有人根本沒聽過何謂「階和數列」。但「階和」的觀念與一般項公式，絕非故弄玄虛，而是相當樸實的，在前幾列的階和運算中，「二項式係數」即已自然浮現，而費氏數列與 Padovan 數列的遞迴關係式，恰好與階和數列的結構吻合，使得每一列的階和作完，下一列仍為費氏數列或 Padovan 數列。至此，筆者體會到何以等式的右端是費氏數列與 Padovan 數列，而不是二項式係數，對此類恆等式，也有了另一番的領悟。

或許有讀者會這麼想，何不直接對所欲證的恆等式使用數學歸納法呢？對此，可以反問：那所要證的恆等式是怎麼出現的呢？這正是本篇文章想回答的：先透過觀察歸納作出猜想，再使用數學歸納法證明，即所謂的「先猜後證」。本篇文章用到的高中數學知識與觀念有：遞迴數列、二項式係數、數學歸納法，可提供學完數列級數與排列組合的高中學生作為自學補充教材。

參考資料：

[1] 陳建燁，Pascal 與 Fibonacci 的對話，**高中數學學科中心電子報第 110 期**，2016 年 5 月。

[2] 廖信傑，用矩陣方法探討三階遞迴數列，**數學傳播 38 卷 1 期**，P36，P53。