費波那契彈(談)正弦--F-sine 卷積恆等式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、序言：

一般說起費氏數列，是一連串的整數，而正弦函數 sin，取值為－1 到 1 之間的實數，表面上這兩者似乎一點關係也沒有。但在考察了 $\sin n\theta$ 的遞迴性質之後，建立了一個多項式恆等式：

$$\sin\theta\cdot x^{n+1}=(x^2-2\cos\theta x+1)\cdot[\sin\theta\cdot x^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot x+\sin n\theta]$$

$+\sin(n+1)\theta\cdot x-\sin n\theta$，特將此式稱為「 $\sin n\theta$ 的生成多項式」。本文從此式出發，透過一系列的代數運算，最後得到了一個關於 Fibonacci 數列和 $\sin n\theta$ 的卷積恆等式：

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-2)\theta\cdot F_2+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

$$=\frac{2\sin\theta\cdot F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta\cdot F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

此式呈現了費氏數列和正弦函數的一種連結。

貳、本文：

一、預備知識：

(一) Fibonacci 數列：$\langle F_n\rangle$：$\begin{cases}F_0=0,F_1=1\\F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$。已知其一般項為 $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，其中 α 與 β 為 $x^2-x-1=0$ 的兩根，於是有 $\alpha+\beta=1$ 與 $\alpha\beta=-1$。**(參考資料[1])**

(二) 三個命題：

命題 1：

令 $a_n=\sin n\theta$，則 $a_{n+1}=(2\cos\theta)a_n-a_{n-1}$，其中 $n\geq 1$。

證明：

$\because\ \sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta=2\sin n\theta\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow \sin(n+1)\theta-(2\cos\theta)\sin n\theta+\sin(n-1)\theta=0$

$\Rightarrow a_{n+1}-(2\cos\theta)a_n+a_{n-1}=0$

意義： 符合遞迴關係： $a_{n+1}=(2\cos\theta)a_n-a_{n-1}$ ，得 $\langle a_n\rangle$ 是一個二階遞迴數列。

命題 2：

設二階遞迴數列 a_n 滿足遞迴關係： $a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n=0$ ，其中 $n\geq 0$ ，則有 a_0x^{n+2} $+(a_1-pa_0)x^{n+1}=(x^2-px-q)\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)+a_{n+1}x+qa_n$ ， 其 中 $n\geq 1$。參考資料[2])

證明：

乘開 $(x^2-px-q)\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)$

$=a_0x^{n+2}+(a_1-pa_0)x^{n+1}+(a_2-pa_1-qa_0)x^n+\cdots+(a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2})x^2$

$+(-pa_n-qa_{n-1})x-qa_n$，移項即可得所欲證之等式

命題 3：

$\sin\theta\cdot x^{n+1}=(x^2-2\cos\theta x+1)\cdot[\sin\theta\cdot x^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot x+\sin n\theta]$
$+\sin(n+1)\theta\cdot x-\sin n\theta$。 ($\sin n\theta$ 生成多項式)

證明：

令 $a_n=\sin n\theta$ ，由命題 1，知 $\langle a_n\rangle$ 符合遞迴關係： $a_{n+1}-(2\cos\theta)a_n+a_{n-1}=0$ 。

由命題 2，知

$a_0x^{n+2}+(a_1-pa_0)x^{n+1}=(x^2-px-q)\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)+a_{n+1}x+qa_n$

在其中取 $a_n=\sin n\theta$， $p=2\cos\theta$， $q=-1$ ，即可得

$\sin\theta\cdot x^{n+1}=(x^2-2\cos\theta x+1)\cdot[\sin\theta\cdot x^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot x+\sin n\theta]$

$+\sin(n+1)\theta\cdot x-\sin n\theta$ ，即為所欲證之等式。

二、公式推導：

注意到

$$\sin\theta\cdot x^{n+1}=(x^2-2\cos\theta x+1)\cdot[\sin\theta\cdot x^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot x+\sin n\theta]$$

$$+\sin(n+1)\theta\cdot x-\sin n\theta，$$

設 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α 與 β，以 $x=\alpha$ 代入，得

$$\sin\theta\cdot\alpha^{n+1}=(\alpha^2-2\cos\theta\cdot\alpha+1)\cdot[\sin\theta\cdot\alpha^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot\alpha+\sin n\theta]$$

$$+\sin(n+1)\theta\cdot\alpha-\sin n\theta$$

$$\Rightarrow\sin\theta\cdot\alpha^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot\alpha+\sin n\theta=\frac{\sin\theta\cdot\alpha^{n+1}-\sin(n+1)\theta\cdot\alpha+\sin n\theta}{\alpha^2-2\cos\theta\cdot\alpha+1}\cdots(1)$$

同理，

$$\text{有}\ \sin\theta\cdot\beta^{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot\beta+\sin n\theta=\frac{\sin\theta\cdot\beta^{n+1}-\sin(n+1)\theta\cdot\beta+\sin n\theta}{\beta^2-2\cos\theta\cdot\beta+1}\cdots(2)$$

將(1)－(2)之後，等號兩邊再同除以 $\alpha-\beta$，則

等號左邊為

$$\sin\theta\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}$$

$$=\sin\theta\cdot F_{n-1}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

因此，接著只需計算等號右邊的

$$\frac{\dfrac{\sin\theta\cdot\alpha^{n+1}-\sin(n+1)\theta\cdot\alpha+\sin n\theta}{\alpha^2-2\cos\theta\cdot\alpha+1}-\dfrac{\sin\theta\cdot\beta^{n+1}-\sin(n+1)\theta\cdot\beta+\sin n\theta}{\beta^2-2\cos\theta\cdot\beta+1}}{\alpha-\beta}$$

令 $A=\sin\theta$，$B=-\sin(n+1)\theta$，$C=\sin n\theta$，$D=-2\cos\theta$，

則所求

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{A\alpha^{n+1}+B\alpha+C}{\alpha^2+D\alpha+1}-\frac{A\beta^{n+1}+B\beta+C}{\beta^2+D\beta+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)-(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)}{(\alpha^2+D\alpha+1)(\beta^2+D\beta+1)}\right]$$

其中，$(\alpha^2+D\alpha+1)(\beta^2+D\beta+1)=1+4\sin^2\theta$ ························ [註 1]

接著，$(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)$

$=A\alpha^{n+1}-AD\alpha^n+A\alpha^{n-1}+(CD-B)\beta+C\beta^2+B\alpha+(C-BD)$ ·········· (3) [註 2]

同理，$(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)$

$=A\beta^{n+1}-AD\beta^n+A\beta^{n-1}+(CD-B)\alpha+C\alpha^2+B\beta+(C-BD)$ ·········· (4)

將 $(3)-(4)$ 之後，再除以 $\alpha-\beta$，可得

$$\frac{(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)-(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)}{\alpha-\beta}$$

$=AF_{n+1}-ADF_n+AF_{n-1}+2B-C-CD$ ······························ [註 3]

於是可得

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)-(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)}{(\alpha^2+D\alpha+1)(\beta^2+D\beta+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{(\alpha^2+D\alpha+1)(\beta^2+D\beta+1)}\cdot\left[\frac{(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)-(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)}{\alpha-\beta}\right]$$

$$=\frac{1}{1+4\sin^2\theta}\cdot(AF_{n+1}-ADF_n+AF_{n-1}+2B-C-CD)$$

$$=\frac{\sin\theta\cdot F_{n+1}+2\cos\theta\sin\theta\cdot F_n+\sin\theta\cdot F_{n-1}-2\sin(n+1)\theta-\sin n\theta+2\cos\theta\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta\cdot F_{n+1}+2\cos\theta\sin\theta\cdot F_n+\sin\theta\cdot(F_{n+1}-F_n)-2\sin(n+1)\theta-\sin n\theta+2\cos\theta\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cdot F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta\cdot F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

至此，證明了

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-2)\theta\cdot F_2+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

$$=\frac{2\sin\theta\cdot F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta\cdot F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$ 。

參、結語：

本篇文章所使用的概念與工具，僅為高中數學中的遞迴數列、和差化積公式與多項式乘除法，特將其中較複雜的代數運算放在註 1、註 2 與註 3，以凸顯主軸。一連串的代數運算，彷佛費波那契正撥弄著琴弦，也好像正訴說著他與正弦的故事，在此請親愛的讀者們細細品味！

備註：

[註 1]：$(\alpha^2+D\alpha+1)(\beta^2+D\beta+1)$

$$=(\alpha\beta)^2+D\alpha\beta^2+\beta^2+D\alpha^2\beta+D^2\alpha\beta+D\beta+\alpha^2+D\alpha+1$$

$$=(\alpha\beta)^2+(D\alpha^2\beta+D\alpha\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)+D^2\alpha\beta+(D\alpha+D\beta)+1$$

$$=(\alpha\beta)^2+D\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+D^2\alpha\beta+D(\alpha+\beta)+1$$

$$=1-D+1+2-D^2+D+1$$

$$=5-D^2=5-4\cos^2\theta=1+4\sin^2\theta$$

[註 2]：$(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)$

$$=A\alpha^{n+1}\beta^2+B\alpha\beta^2+C\beta^2+AD\alpha^{n+1}\beta+BD\alpha\beta+CD\beta+A\alpha^{n+1}+B\alpha+C$$

$$=A\alpha^{n-1}(\alpha\beta)^2+B(\alpha\beta)\cdot\beta+C\beta^2+AD\alpha^n(\alpha\beta)+BD(\alpha\beta)+CD\beta+A\alpha^{n+1}+B\alpha+C$$

$$=A\alpha^{n-1}-B\beta+C\beta^2-AD\alpha^n-BD+CD\beta+A\alpha^{n+1}+B\alpha+C$$

$$=A\alpha^{n+1}-AD\alpha^n+A\alpha^{n-1}+(CD-B)\beta+C\beta^2+B\alpha+(C-BD)$$

[註 3]：$\dfrac{(A\alpha^{n+1}+B\alpha+C)(\beta^2+D\beta+1)-(A\beta^{n+1}+B\beta+C)(\alpha^2+D\alpha+1)}{\alpha-\beta}$

$$=A\cdot\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-AD\cdot\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+A\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+(CD-B)\cdot\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}+C\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha-\beta}+B\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}$$

$$=AF_{n+1}-ADF_n+AF_{n-1}-(CD-B)-C\cdot(\alpha+\beta)+B$$

(由費氏數列的 Binet 公式：$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，其中 $n\geq 0$。)

$$=AF_{n+1}-ADF_n+AF_{n-1}-(CD-B)-C+B$$

$$=AF_{n+1}-ADF_n+AF_{n-1}+2B-C-CD$$

舉例：對於

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-2)\theta\cdot F_2+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

$$=\frac{2\sin\theta\cdot F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta\cdot F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

當 $n=12$ ，$\theta=30°$ 時：

一方面， $\sin\theta\cdot F_{11}+\sin 2\theta\cdot F_{10}+\cdots+\sin 10\theta\cdot F_2+\sin 11\theta\cdot F_1$

$$=\sin 30°\cdot F_{11}+\sin 60°\cdot F_{10}+\sin 90°\cdot F_9$$
$$+\sin 120°\cdot F_8+\sin 150°\cdot F_7+\sin 180°\cdot F_6$$
$$+\sin 210°\cdot F_5+\sin 240°\cdot F_4+\sin 270°\cdot F_3$$
$$+\sin 300°\cdot F_2+\sin 330°\cdot F_1$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 89+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 55+1\cdot 34+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 21+\frac{1}{2}\cdot 13+0\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 5-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3-1\cdot 2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1$$
$$=80+36\sqrt{3}\text{，}$$

另一方面，

$$\frac{2\sin 30°\cdot F_{13}+(2\cos 30°-1)\sin 30°\cdot F_{12}-2\sin(13\cdot 30°)+(2\cos 30°-1)\cdot\sin(12\cdot 30°)}{1+4\sin^2 30°}$$

$$=\frac{233+(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 144-2\cdot\frac{1}{2}+(\sqrt{3}-1)\cdot 0}{1+4\cdot\frac{1}{4}}=80+36\sqrt{3}\text{。}$$

參考資料：

陳建燁，推導費氏數列性質三部曲(中)：用根與係數關係，**高中數學學科中心電子報第 109 期**，2016 年 4 月，P1。

陳建燁(2017)，一般的二階線性遞迴數列(起)，**高中數學學科中心電子報第 118 期**，P2～3。