平面凸五邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式

李輝濱

壹、前言

平面凸五邊形圖形內部共有 5 條對角線段，這 5 條對角線段恰圍成一封閉的五角星形結構。每一條對角線段皆與其餘另 4 條對角線段相交叉，以對角線段 $\overline{A_1A_3}$ 為例；見下圖 1。

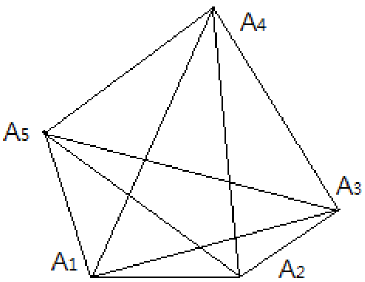


圖 1

可看見，有線段 $\overline{A_4A_1}$ 及線段 $\overline{A_3A_5}$ 恰與線段 $\overline{A_1A_3}$ 相交在兩端點 A_1 與 A_3 的位置上，而另 2 條對角線段 $\overline{A_2A_4}$ 與 $\overline{A_5A_2}$ 則與 $\overline{A_1A_3}$ 相交在線段兩端點之間的內側位置。本篇論文的目標是選定如 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 這兩交叉對角線長度乘積的類型為主，事實上；推論的結果全都適合於所有相交在線段兩端點之間內側位置上的兩交叉對角線類型。

如圖 2，平面凸四邊形領域裡有一個遠古迄今的著名定理；那就是圓內接四邊形的托勒密定理(Ptolemy theorem)。見下圖 3，一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，

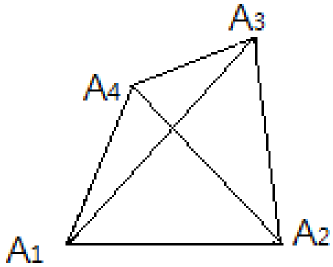


圖 2

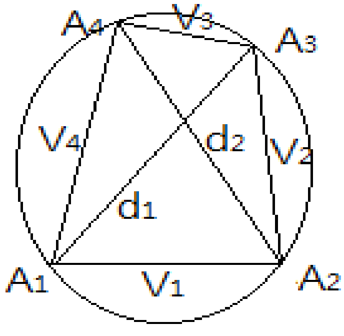


圖 3

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，$\overline{A_1A_3}=d_1$ ，$\overline{A_2A_4}=d_2$，則托勒密定理公式型式為

$$d_1 d_2 = V_1 V_3 + V_2 V_4 \quad \cdots\cdots (1)$$

再看下圖 4，一個平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，$\overline{A_1A_3}=d_1$，$\overline{A_2A_4}=d_2$，則由本文論證所得到的平面凸五邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式為

$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2 &= (V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)\\ &\quad -2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)-2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \quad \cdots\cdots (2)\end{aligned}$$

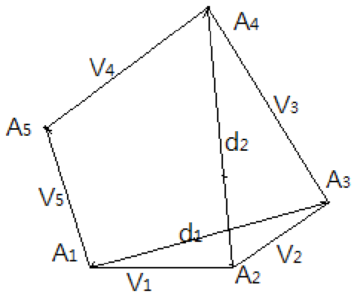


圖 4

比較這兩方程式(1)與(2)，可清楚看出四邊形及五邊形圖形上的所有邊長線段都很有秩序地分別出現在方程式的對應項數中！並且更看得出由本文論證出的平面凸五邊形一般化方程式(2)完全涵蓋統一了四邊形公式型態(1)，使托勒密定理成為凸五邊形一般化方程式下的一個特例，此一般化方程式(2)也正是托勒密定理公式的推廣！眾所周知，托勒密定理公式結構型式具備非常簡潔完美規律性，而五邊形圖形雖然只有比四邊形多出一邊長及一個頂角，但其推演導證過程中的複雜程度與難度可謂更勝一籌。方程式(2)雖較為多項，但仔細比對觀察公式中的各項量綱內容，它們也都能在邊長與頂角的組合上依序呈現出規律性分佈 ，並與平面凸四邊形公式型態內涵相互輝映！

自托勒密定理公式發現以來約略經過 2000 年久遠時光，其公式的唯美精緻深受世人的讚嘆傳頌，無人能出其右。世界上沒有人繼續接棒研究推廣五邊形及六邊形等等的後續同性質定理公式，今天作者有幸能躬逢其會並創新深化鑽研而獲得這平面凸五邊形一般化推廣公式理論，盼讀者諸君誠心參考察驗，期望能獲取新啟示並展開更寬廣領域的研發應用！

以下是作者精心規劃、創新研究出的完整思考歷程，請仔細閱讀、品味、模擬推演運算，以充分理解本文創作的實質內涵。

貳、本文

在下列撰文推理演繹的運算過程中，需應用或對照到下述已知的數個基本數學性質；

一、數學基本性質—引理

引理 1. 平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$的向量為$\vec{V_1}$，$\overline{A_2A_3}=V_2$的向量為$\vec{V_2}$,⋯, $\overline{A_nA_1}=V_n$的向量為$\vec{V_n}$，則此平面凸 n 邊形即為此 n 個向量按順序箭頭接箭尾相加而成的封閉凸 n 邊形。

依向量加法性質知；$\sum_{m=1}^{n}\vec{V_m}=\vec{0}=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\,\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\,\vec{j}=0$ 此處 θ_m為V_m在直角坐標平面上的方位角。$\vec{i}$ 為正 X 軸方向的單位向量，$\vec{j}$ 為正 Y 軸方向的單位向量，再由平面正交坐標系性質知；

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \quad \text{且} \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

現在，將頂點 A_1置於直角坐標平面上的原點 O，如下圖 5，使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

且 $$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

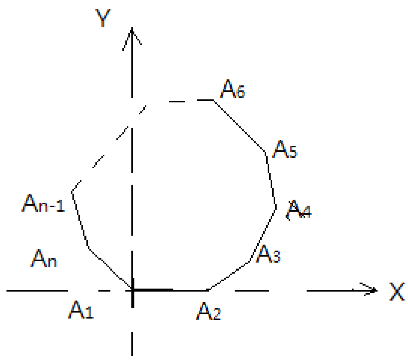


圖 5、凸 n 邊形

證明：由圖 5 知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$,而 V_1的方位角 θ_1為零，V_2的方位角 θ_2 為 π − A_2，V_3的方位角 θ_3為 (π − A_2) + (π − A_3)，V_4的方位角 θ_4 為(π−

A_2)+(π− A_3)+(π− A_4),…, V_n 的方位角 θ_n 為(n−1)π−($A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_n$)。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中：

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m \cos\theta_m) = 0 \quad \text{且} \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m \sin\theta_m) = 0$$

，則

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m \cos\theta_m) = 0$$

$$= V_1 + V_2\cos(\pi - A_2) + V_3\cos(2\pi - A_2 - A_3) + \cdots + V_n\cos[(n\text{-}1)\pi - \sum_{k=2}^{n} A_k] = 0$$

將上列等式改寫成下式；

得 $V_1 + \sum_{m=2}^{n} V_m \cos[(m-1)\pi - \sum_{k=2}^{m} A_k] = 0$ ……………………………………(3)

同理，再得 $\sum_{m=2}^{n} V_m \sin[(m-1)\pi - \sum_{k=2}^{m} A_k] = 0$ ……………………………………(4)

證明完成。

引理 1 的一組方程式(3)與(4)所顯示的幾何意義是；方程式(3)代表此凸多邊形各邊長在 X 軸方向的投影向量總和為零，方程式(4)則表示凸多邊形各邊長在 Y 軸方向的投影向量總和為零。

引理 1 的一組方程式(3)與(4)是因以線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$ 為底，疊置在水平方向 X 軸所求得的結果，若換成以 $\overline{A_2A_3} = V_2$ 為底，將求得類似的另一組方程式；以此類推， 總共會得出 n 組。這 n 組方程式是非常好應用的，尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的組合關係式時至為有效！

引理 2. 在平面上給定一個凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$，則此凸多邊形所有內角總和為

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_{n-1} + A_n = (n-2)\pi$$

證明：略。

引理 3. 三角函數角度的和差

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

引理 4. 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 6。

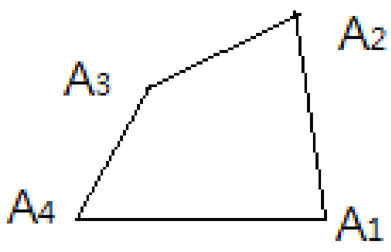


圖 6

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$， $\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$， $\overline{A_4A_1}=V_4$，則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

$$V_4^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - 2\ V_1V_2\cos A_2 - 2\ V_2V_3\cos A_3 + 2V_1\ V_3\cos(A_2 + A_3)$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 1)

引理 5. 兩相似三角形，其所有對應邊長必成正比例。

證明：略。

引理 6. 兩相異三角形，其對應的兩邊長成正比例且此兩邊長所夾的夾角又相等，則這兩相異三角形必為相似三角形。

證明：略。

二、論證平面凸五邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式

對於任意形狀的平面凸五邊形 而言，欲完整清晰地推導驗證出本主題的一般化方程式(2)，須遵循下列的六個步驟依先後次序來進行；

(一) 作輔助線；

先求出這五邊形內的凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式，請參閱下圖 7 任意形狀的平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 。

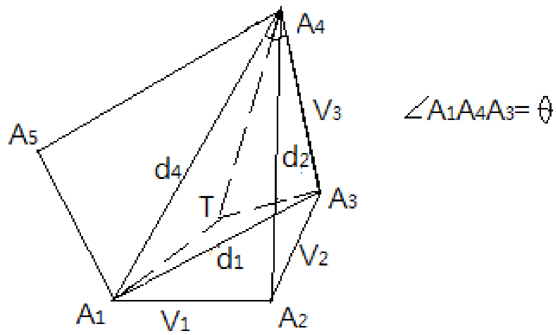


圖 7

(1) 選取四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，在頂點 A_4 處對圖形內側作一射線 A_4T，使 $\angle A_1A_4T=\angle A_2A_4A_3$，又在頂點 A_1 處對圖形內側作另一射線 A_1T，使 $\angle A_4A_1T=\angle A_4A_2A_3$，此兩射線交在 T 點；則 $\Delta A_1A_4T \approx \Delta A_2A_4A_3$(互為相似形)且 $\angle A_4TA_1=\angle A_4A_3A_2$。並繼續連接 T 與 A_3 兩點，使形成線段 TA_3 。

(2) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係，得 $d_4 : d_2 = \overline{A_1T} : V_2 = \overline{A_4T} : V_3 \Rightarrow$ 可得

$d_4 : \overline{A_4T} = d_2 : V_3$ ，再由 $\angle A_1A_4A_2 = \angle TA_4A_3$ 及引理 6.得知相似形關係 $\Delta A_1A_4A_2 \approx \Delta TA_4A_3$，因此可得 $\angle A_4A_1A_2 = \angle A_4TA_3$，且有另一組正比例關係為 $d_4 : \overline{A_4T} = d_2 : V_3 = V_1 : \overline{A_3T}$ 。

(3) 對作圖 7 中的 ΔTA_1A_3 言，由餘弦定理知

$d_1^{\ 2} = (\overline{A_1T})^2 + (\overline{A_3T})^2 - 2(\overline{A_1T})(\overline{A_3T})\cos(\angle A_1TA_3)$，而在上述(2)的兩組正比例關係式中可求得 $\overline{A_1T} = (V_2d_4)/d_2$ 及 $\overline{A_3T} = (V_1V_3)/d_2$，將此兩者代入餘弦定理公式內並化簡、移項，可得下列新方程式(5)；

$$d_1^{\ 2}d_2^{\ 2} = (V_1V_3)^2 + (V_2d_4)^2 - 2V_1V_2V_3d_4\cos(\angle A_1TA_3) \cdots\cdots (5)$$

(4) 在頂點 T 處四周圍角度關係可知

$\angle A_1TA_3 = 2\pi - \angle A_4TA_3 - \angle A_1TA_4 = 2\pi - \angle A_4A_1A_2 - \angle A_4A_3A_2 = A_2$(頂角)$+\theta$，此處對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，其四個頂角總和為 2π ，並令 $\angle A_1A_4A_3 = \theta$ ，所以將 $\angle A_1TA_3 = A_2$(頂角)$+\theta$ 代入方程式(5)，即得凸四邊形兩交叉對角線長度乘積一般化方程式為下方程式(6)；

$$d_1^{\ 2}d_2^{\ 2} = (V_1V_3)^2 + (V_2d_4)^2 - 2V_1V_2V_3d_4\cos(A_2+\theta) \cdots\cdots (6)$$

(二) 接下來，要將四邊形的方程式(6)推廣至一般化凸五邊形公式，請看下圖 8。

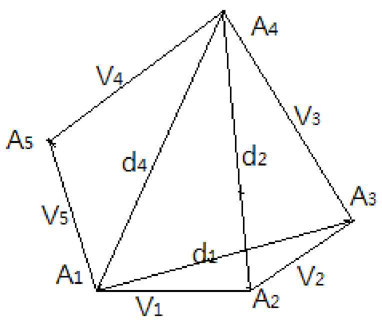


圖 8

圖中的三角形 $\Delta A_1A_4A_5$ 有下式關係；$d_4^{\ 2} = V_4^{\ 2} + V_5^{\ 2} - 2V_4V_5\cos A_5$，將此式代入方程式(6)中即得出下列方程式(7)；

$$d_1^{\ 2}d_2^{\ 2} = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_2^{\ 2}V_4V_5\cos A_5 - 2V_1V_2V_3d_4\cos(A_2+\theta) \cdots\cdots (7)$$

(三) 接著要將方程式(7)內的最後一項有 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 的成份代換成五邊形的某些邊長與頂角的適當組合。這需應用到引理 1.與角度修正參數法及幾何作圖分析法。

(1) 應用引理 1. 取 n=5 代入一組方程式(3)與(4)，並化簡可得

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_2+A_3+A_4) + V_5\cos A_1 \quad \cdots\cdots (3\text{-p})$$

$$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_2+A_3+A_4) - V_5\sin A_1 = 0 \quad \cdots\cdots (4\text{-p})$$

(2) 將此五邊形的內角分成兩組；A_1, A_4 為一組，而 A_2, A_3, A_5 為另一組！將平面凸多邊形所有內角分成兩組的組合情形有很多種,需要詳盡觀察比對才能找到最適合的兩組組合。

****角度修正參數法****：以下即為角度修正參數法的應用；見下圖 9。

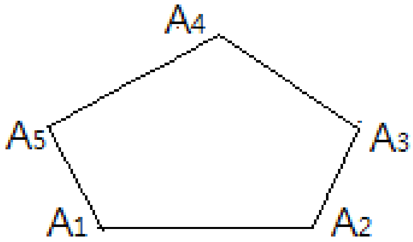


圖 9

平面凸五邊形內角總和為 3π，令 ϕ 為角度修正參數，並設定 $A_1 + A_4 = \frac{3}{2}\pi - \phi$ 且

$A_2 + A_3 + A_5 = \frac{3}{2}\pi + \phi$，將這 2 個組合代入方程式(3-p)及(4-p)中；得

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_2+A_3+A_4) + V_5\cos A_1 \quad \cdots\cdots (3\text{-p})$$

$$V_1 = V_2\cos(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_3-A_5) - V_3\cos(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_5) + V_4\cos(\frac{3\pi}{2}+\phi+A_4-A_5)$$

$$+V_5\cos(\frac{3\pi}{2}-\phi-A_4)$$

$$= V_2\sin(\phi-A_3-A_5) - V_3\sin(\phi-A_5) + V_4\sin(\phi+A_4-A_5) - V_5\sin(\phi+A_4)$$

$$= \sin\phi\cdot[V_2\cos(A_3+A_5) - V_3\cos A_5 + V_4\cos(A_4-A_5) - V_5\cos A_4]$$

$$+\cos\phi\cdot[-V_2\sin(A_3+A_5) + V_3\sin A_5 + V_4\sin(A_4-A_5) - V_5\sin A_4] \quad \cdots\cdots (3\text{-p-a})$$

另 $V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_2+A_3+A_4) - V_5\sin A_1 = 0 \quad \cdots\cdots (4\text{-p})$

$$V_2\sin(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_3-A_5) - V_3\sin(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_5) + V_4\sin(\frac{3\pi}{2}+\phi+A_4-A_5)$$

$-V_5\sin(\frac{3\pi}{2}-\phi-A_4)=0$，展開此等式，得

$$0=-V_2\cos(\phi-A_3-A_5)+V_3\cos(\phi-A_5)-V_4\cos(\phi+A_4-A_5)+V_5\cos(\phi+A_4)$$

$$=\cos\phi\cdot[-V_2\cos(A_3+A_5)+V_3\cos A_5-V_4\cos(A_4-A_5)+V_5\cos A_4]$$

$$+\sin\phi\cdot[-V_2\sin(A_3+A_5)+V_3\sin A_5+V_4\sin(A_4-A_5)-V_5\sin A_4]\cdots\cdots\text{(4-p-a)}$$

現在令 $P_5=V_2\cos(A_3+A_5)-V_3\cos A_5+V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4$

$$Q_5=-V_2\sin(A_3+A_5)+V_3\sin A_5+V_4\sin(A_4-A_5)-V_5\sin A_4$$

則 (3-p-a)式　變成　$V_1=\sin\phi\cdot P_5+\cos\phi\cdot Q_5$ ……………………………(3-p-b)

(4-p-a)式　變成　$0=\cos\phi\cdot(-P_5)+\sin\phi\cdot Q_5$ ……………………………(4-p-b)

聯立解(3-p-b)式與(4-p-b)式，得 $V_1\cos\phi=Q_5$ 且 $V_1\sin\phi=P_5$

而 $\cos(A_1+A_4)=\cos(\frac{3}{2}\pi-\phi)=-\sin\phi$　，代入　$V_1\sin\phi=P_5$ 中，得

$$-V_1\cos(A_1+A_4)=V_2\cos(A_3+A_5)-V_3\cos A_5+V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4$$

移項整理後即得到下述方程式(8-1)了；

$$V_3\cos A_5-V_4\cos(A_4-A_5)+V_5\cos A_4=V_1\cos(A_1+A_4)+V_2\cos(A_3+A_5)\cdots\cdots\text{(8-1)}$$

(3) 同理，現在將方程式(3)與(4)式換成以 $\overline{A_4A_5}=V_4$ 為底，見下圖 10，再仿效這上述第(2)節的運算即可得到同類型的下列方程式(8-2)了；

$$V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=V_4\cos(A_4+A_2)+V_5\cos(A_1+A_3)\cdots\cdots\text{(8-2)}$$

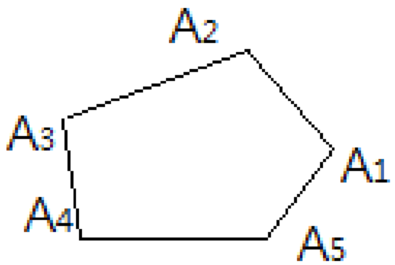


圖 10

觀察此方程式(8-2)的右側兩項 $V_4\cos(A_4+A_2)+V_5\cos(A_1+A_3)$，再根據 $\Delta A_1A_4A_5$ 圖形關係即可推測(8-2)式的右側兩項必與 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 具有相等關係！

(四) 幾何作圖；利用輔助線作圖法以理解方程式(8-2)的圖形意義！請看下圖 11。

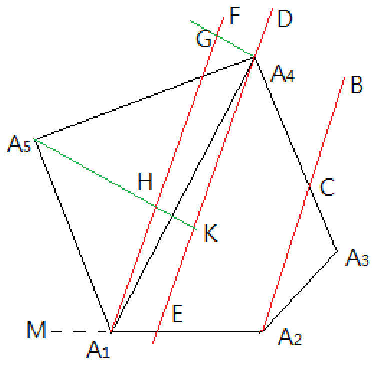


圖 11

(1) 在方程式(8-2)的左側第 2 項裡出現 $A_2 - A_3$ 的角度差，令頂角角度 A_2 大於 A_3，這不失為作圖的一般性。由圖 11.中自頂點 A_2 處作一直線 A_2B，使 $\angle A_1A_2B = A_3$ 頂角角度，並令 $\alpha = \angle CA_2A_3 = A_2 - A_3$。

(2) 通過頂點 A_4 處作一直線 DE 平行於直線 A_2B，連接對角線 $A_4A_1 = d_4$，

(3) 通過頂點 A_1 處作一直線 A_1F 平行於直線 A_2B 與 DE，

(4) 自頂點 A_4 處對直線 A_1F 作一垂直線 A_4G，使 G 點為垂直交點。

(5) 自頂點 A_5 處對直線 A_1F 與直線 DE 作一垂直線 A_5HK，使 H 點與 K 點各為相異的兩垂直交點。

以上作圖完成。這經過規劃設計完工的圖形中共有兩組平行輔助線；紅色的一組有 3 條平行線，綠色的另一組有 2 條平行線，且這兩組平行線是互為垂直的。

(五) 現在要分析所有作出的圖形輔助線及方程式(8-2)的圖形意義，及其與重要的一項 $d_4 \cos(A_2 + \theta)$ 之間的相連結關係；請見下圖 12。

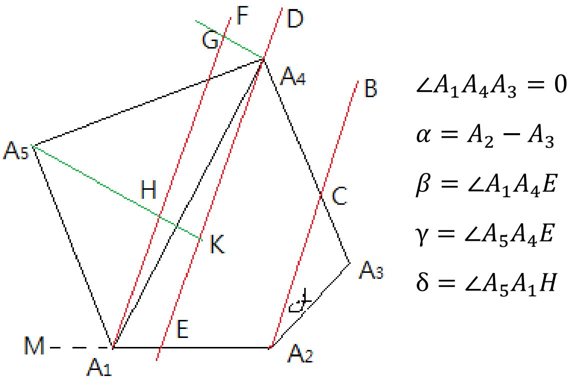


圖 12

(1) 對 ΔCA_2A_3 言，因 $\alpha = \angle CA_2A_3 = A_2 - A_3$，故得 $\angle A_4CA_2 = A_2$ 頂角角度。

(2) 由平行線內側角性質知 $\angle DA_4C = \angle A_4CA_2 = A_2$ 頂角。

(3) 令 $\beta = \angle A_1A_4E = \angle A_4A_1G$，在頂點 A_4 處周圍可知 $\angle DA_4C + \theta = A_2 + \theta = \pi + \beta$，故 $d_4\cos(A_2+\theta) = d_4\cos(\pi+\beta) = -d_4\cos\beta = -d_4\cos(\angle A_4A_1G)$，得 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 在圖形上的值等於線段 A_1G 長度的負值，因 ΔA_4A_1G 是直角三角形

(4) 又在頂點 A_4 處周圍，頂角角度的和 $A_2 + A_4 = \pi + \gamma$，此處 $\gamma = \angle A_5A_4E$。由 $V_4\cos(A_2+A_4) = V_4\cos(\pi+\gamma) = -V_4\cos\gamma$，得 $V_4\cos(A_2+A_4)$ 在圖形上的值等於線段 A_4K =線段 GH 長度的負值，因 ΔA_4A_5K 是直角三角形。

(5) 在頂點 A_1 處周圍，由平行線同位角性質知 $\angle MA_1H = \angle A_1A_2B = A_3$ 頂角，故頂角角度的和 $A_1 + A_3 = \pi + \delta$，此處 $\delta = \angle A_5A_1H$。由 $V_5\cos(A_1+A_3) = V_5\cos(\pi+\delta) = -V_5\cos\delta$，得 $V_5\cos(A_1+A_3)$ 在圖形上的值等於線段 A_1H 長度的負值，因 ΔA_1A_5H 是直角三角形。

(6) 現在由(3)、(4)、(5)的敘述分析，可比較出 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 在圖形上的值恰等於 $V_4\cos(A_2+A_4) + V_5\cos(A_1+A_3)$ 在圖形上的值，故下式必成立；

$$d_4\cos(A_2+\theta) = V_4\cos(A_2+A_4) + V_5\cos(A_1+A_3) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8\text{-}3)$$

(六) 現在要將等式(8-3)式代入(二)的方程式(7)中，整理後即得方程式(2)如下；

得證平面凸五邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式為

$$(d_1d_2)^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

三、檢驗

(一) 若令 $V_5 = 0$，使頂點 A_5 趨近至 A_1，則平面凸五邊形退化成平面凸四邊形，而方程式(2)也退化成平面凸四邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式為

$$(d_1d_2)^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

這方程式(9)正是托勒密定理的推廣。若這凸四邊形又內接於一圓，則 $A_4 + A_2 = \pi$，代入方程式(9)內，再化簡後，即得托勒密定理； $d_1d_2 = V_1V_3 + V_2V_4$。因此，方程式(2)完美涵蓋統一了托勒密定理與方程式(9)！方程式(2)是至極的正確且其內涵用途比公元 100 年時的托勒密定理公式更強大！

(二) 若是圓內接五邊形，則方程式(2)將作如下變換；

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2[\cos^2(A_2+A_4)+\sin^2(A_2+A_4)]$$

$$+(V_2V_5)^2[\cos^2(A_1+A_3)+\sin^2(A_1+A_3)]-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)+2V_2^2V_4V_5\cos(A_1+A_2+A_3+A_4)$$

$$=\ [V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3)]^2$$

$$+[V_2V_4\sin(A_4+A_2)-V_2V_5\sin(A_1+A_3)]^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10\text{-}1)$$

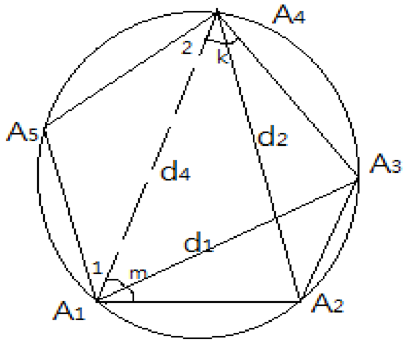
在圓內接五邊形中，$V_2V_4\sin(A_4+A_2)-V_2V_5\sin(A_1+A_3)=0$，(註：請參考下列結論(一)第(2)節敘述)，則方程式(10-1)就化簡成下式；

$$d_1d_2=V_1V_3-V_2V_4\cos(A_2+A_4)-V_2V_5\cos(A_1+A_3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

此方程式(10)就是圓內接五邊形的兩交叉對角線長度乘積公式。可看出與圓有關聯的圓內接五邊形公式型態之方程式(10)，其結構真的很簡潔明暢。

參、結論

(一) 事實上，一開始作此研究是從圓內接五邊形(見下圖 13) 的特例出發的，



角度 $1=\angle A_5A_1A_4$

角度 $2=\angle A_5A_4A_1$

角度 $\mathrm{m}=\angle A_4A_1A_2$

角度 $\mathrm{K}=\angle A_1A_4A_5$

圖 13

(1) 觀察圖形中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，必存在有托勒密定理公式為

$$d_1d_2=V_1V_3+V_2d_4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{-}1)$$

(2) 對 $\Delta A_1A_5A_4$ 言，邊長線段 $d_4=V_4\cos(\angle 2)+V_5\cos(\angle 1)=V_4\cos(A_4-k)+V_5\cos(A_1-m)=V_4\cos(A_4+A_2-\pi)+V_5\cos(A_1+A_3-\pi)$

$=-V_4\cos(A_4+A_2)-V_5\cos(A_1+A_3)$，將此 d_4 代入(9-1)式中，得

$$d_1d_2 = V_1V_3 - V_2V_4\cos(A_2 + A_4) - V_2V_5\cos(A_1 + A_3) \cdots\cdots (10)$$

又在 $\Delta A_1A_5A_4$ 中，$V_4\sin(\angle 2) - V_5\sin(\angle 1) = 0$，再經過同樣的角度轉換，可得

$$0 = V_4\sin(A_4 + A_2) - V_5\sin(A_1 + A_3) \cdots\cdots (11)$$

將(11)式乘上 V_2，即得 $0 = V_2V_4\sin(A_4 + A_2) - V_2V_5\sin(A_1 + A_3) \cdots\cdots (12)$

(3) 由方程式(10)的獨自平方再加上方程式(12)的獨自平方，再化簡，可得

$$(d_1d_2)^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \cdots\cdots (2)$$

因為圓內接五邊形的任意兩內角的和並無特定關係值，所以推測這個方程式必定也是一般形平面凸五邊形的一般化方程式！亦即先有了這假設的特例雛型概念，再思考尋求理論的有效推證方法，進而論證出完整的結果來。

(4) 方程式(10)就是圓內接五邊形的兩交叉對角線長度乘積公式，它也可以由方程式(2)被逆向推導出來！如同上述三、檢驗中的第(二)節敘述。

(二) 若僅以三角形的基本餘弦定理公式來描述推求兩對角線長度乘積方程式，其結果也就不足為奇，無法達到方程式(1)、(2)、(9)、(10)的公式型態，也與本文的理念大相逕庭，無法比擬！試看下列以純餘弦定理來作凸五邊形的推演運算；

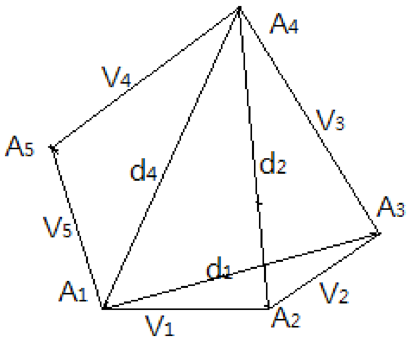


圖 8

參考圖 8 $d_1^{\ 2} = V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2} - 2V_1V_2\cos A_2$

$$= V_3^{\ 2} + V_4^{\ 2} + V_5^{\ 2} - 2V_3V_4\cos A_4 - 2V_4V_5\cos A_5 + 2V_3V_5\cos(A_4 + A_5)$$

且 $d_2^{\ 2} = V_2^{\ 2} + V_3^{\ 2} - 2V_2V_3\cos A_3$

$$= V_1^{\ 2} + V_4^{\ 2} + V_5^{\ 2} - 2V_4V_5\cos A_5 - 2V_5V_1\cos A_1 + 2V_4V_1\cos(A_5 + A_1)$$

則 $d_1^{\ 2}d_2^{\ 2}$ 相乘的四種結果必然至少有一個邊長不會出現在各公式中，都無法見

到邊長與角度在組合型式上依序呈現出完整規律性分佈！而此四種結果也與托勒密定理公式型態無關，完全沒有感受見到托勒密公式的蹤影。

(三) 本文演繹敘述過程中出現兩個亮點；第一個是角度修正參數法，應用適宜角度組合的特徵，求得所需要之邊長與角度組合恆等式。因為角度組合的方式多樣化，充分利用可達成意想不到的效果，在推演過程中它必扮演著重要且決定性的任務！第二個亮點是幾何作圖分析法，它提供了一個清晰理解恆等式各項線段圖形意義的視窗，使我能找到各線段的相互依存關係，並應用於解決難度較高的問題，也一樣執行著艱鉅且適切決定性的任務！

(四) 創作者須抱持的恆常一貫思維理念，就是對所有選定主題論證都要合理精確地尋找出一套一般化方法，藉以獲得完美奇妙廣義式的結果。希望本文的論述能榮獲讀者的青睞與迴響！

參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形面積研究。**數學傳播季刊 141 期**，2012 年 3 月。

李輝濱，圓內接五邊形面積研究。**數學傳播季刊 144 期**，2012 年 12 月。

李輝濱，預測與驗證平面凸多邊形面積公式。**科學教育月刊 398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**。三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .