費氏數列相鄰項乘積猜想的證明：$\dfrac{F_nF_{n-1}\cdots\cdots F_{n-k+1}}{F_kF_{k-1}\cdots\cdots F_1}=h_{n-k}(\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\cdots,\alpha\beta^{k-1},\beta^k)$的證明

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言：

一方面，滿足「$F_0=0$，$F_1=1$，以及遞迴關係$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，其中$n=0,1,2,\cdots$」的數列，稱為「費氏數列」(Fibonacci Numbers)。設方程式$x^2-x-1=0$的兩根為α與β，其中$\alpha>\beta$，則費氏數列的一般項為

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\text{ 。}$$

另一方面，定義$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數$a_1,a_2,\cdots,a_n$的$k$次完全齊次對稱多項式」。特別地，有$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，與$h_k(a)=a^k$。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$h_n(\alpha,\beta)=\sum\limits_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}}(\alpha^i\beta^j)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。

注意到$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}=h_{n-1}(\alpha,\beta)$，此式將**費氏數$F_n$用完全齊次對稱多項式$h_{n-1}(\alpha,\beta)$**加以表示，這是此兩概念連結的開始。在「費氏數列相鄰項乘積的完全齊次對稱多項式表示法」[1]一文中，進一步地證明了

$$F_n\cdot F_{n-1}=h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)\text{，其中 }n\ge 2\text{ 以及}$$

$$F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=2\cdot h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)\text{，其中 }n\ge 3\text{ 。}$$

此兩等式相當於

$$\frac{F_n\cdot F_{n-1}}{F_2\cdot F_1}=h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)\ \text{與}\ \frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}}{F_3\cdot F_2\cdot F_1}=h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)\text{。}$$

於是，在該文文末，提出了如下的猜想：

$$\frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdot\cdots\cdot F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdot\cdots\cdot F_1}=h_{n-k}(\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\alpha^{k-2}\beta^2,\cdots,\alpha^2\beta^{k-2},\alpha\beta^{k-1},\beta^k)\text{，其中 } n\ge k\ge 2\text{。}$$

本文的目的，在使用數學歸納法，給出此猜想的證明。

貳、本文：

一、介紹兩個性質：

首先，關於完全齊次對稱多項式，在結構上，有兩個主要的性質[2][3]：

1. 減元降次遞迴式：

$$h_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1})=\underbrace{h_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)}_{\text{減元}}+a_{n+1}\cdot\underbrace{h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1})}_{\text{降次}}$$

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$$=(a^2+b^2+ab)+c\cdot(a+b+c)=h_2(a,b)+c\cdot h_1(a,b,c)$$

此為 $n=2$ ， $k=1$ 的情形，其中 $a_1=a$ ， $a_2=b$ ， $a_3=c$ 。

說明：以 a_{n+1} 作分類，沒有 a_{n+1} 的集成一組，有 a_{n+1} 的集成另一組，

將 $(n+1)$ 元 $(k+1)$ 次齊次式寫成 n 元 $(k+1)$ 次和 $(n+1)$ 元 k 次齊次式的組合。

在本文的工作中，會用到的情形是：

取 $k=N-m-1$ ， $n=m+1$ ， $a_1=\alpha^{m+1}$ ， $a_2=\alpha^m\beta$ ，⋯⋯， $a_n=\alpha\beta^m$ ， $a_{n+1}=\beta^{m+1}$ ，

得 $h_{N-m}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$

$$=h_{N-m}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha^2\beta^{m-1},\alpha\beta^m)+\beta^{m+1}\cdot h_{N-m-1}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})\text{。}$$

2. 次方乘法的分配律：$r^n \cdot h_n(a_1, a_2, \cdots, a_p) = h_n(a_1 r, a_2 r, \cdots, a_p r)$

例：$r^2 \cdot h_2(a,b,c) = a^2 r^2 + b^2 r^2 + c^2 r^2 + abr^2 + bcr^2 + car^2$

$= (ar)^2 + (br)^2 + (cr)^2 + (ar)(br) + (br)(cr) + (cr)(ar) = h_2(ar, br, cr)$。

證明：

$$r^n \cdot h_n(a_1, a_2, \cdots, a_p) = r^n \cdot \left[\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p \ge 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_p^{\lambda_p}) \right] = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p \ge 0}} (r^n a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_p^{\lambda_p})$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p \ge 0}} (r^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p} \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_p^{\lambda_p}) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p \ge 0}} \left[(ra_1)^{\lambda_1} (ra_2)^{\lambda_2} \cdots (ra_p)^{\lambda_p} \right]$$

$= h_n(a_1 r, a_2 r, \cdots, a_p r)$。

在本文的工作中，會用到的情形是：

取 $r = \alpha$，$n = N - m$，$p = m + 1$，$a_1 = \alpha^m$，$a_2 = \alpha^{m-1}\beta$，……，$a_{p-1} = \alpha\beta^{m-1}$，$a_p = \alpha^m$，

得 $\alpha^{N-m} \cdot h_{N-m}(\alpha^m, \alpha^{m-1}\beta, \cdots, \alpha\beta^{m-1}, \beta^m) = h_{N-m}(\alpha^{m+1}, \alpha^m\beta, \cdots, \alpha^2\beta^{m-1}, \alpha\beta^m)$　。

二、建立一個引理

接著，關於費氏數列，有如下的「一分為二」引理：

引理：$F_n = \alpha^{n-m} \cdot F_m + \beta^m \cdot F_{n-m}$，其中 $n \ge m \ge 0$

證明：

右式=$\alpha^{n-m} \cdot F_m + \beta^m \cdot F_{n-m}$

$$= \alpha^{n-m} \cdot \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} + \beta^m \cdot \frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta}$$

$$=\frac{\alpha^n-\alpha^{n-m}\beta^m+\alpha^{n-m}\beta^m-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$=F_n$ ＝ 左式。

推論：在 $F_n=\alpha^{n-m}\cdot F_m+\beta^m\cdot F_{n-m}$ 之中，將 n,m 分別以 $N+1,m+1$ 代入，可得

$$F_{N+1}=\alpha^{N-m}\cdot F_{m+1}+\beta^{m+1}\cdot F_{N-m}$$ 。

三、猜想的證明

命題：

$\dfrac{F_n\cdot F_{n-1}\cdot\cdots\cdot F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdot\cdots\cdot F_1}=h_{n-k}(\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\alpha^{k-2}\beta^2,\cdots,\alpha^2\beta^{k-2},\alpha\beta^{k-1},\beta^k)$，其中 $n\geq k\geq 1$。

證明：對變數 k 進行數學歸納法：

當 $k=1$ 時，由 $\dfrac{F_n}{F_1}=F_n=h_{n-1}(\alpha,\beta)$，可知等式成立。

當 $k=2$ 時，有 $\dfrac{F_nF_{n-1}}{F_2F_1}=h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$ (見參考資料[1])，等式成立。

假設當 $k\leq m$ 時等式成立，

則當 $k=m+1$ 時，

首先，有 $\dfrac{F_{m+1}\cdot F_m\cdot\cdots\cdot F_{(m+1)-(m+1)+1}}{F_{m+1}F_m\cdot\cdots\cdot F_1}=1=h_{m+1-(m+1)}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$，

接著，假設當 $k=m+1$，且 $m+1\leq n\leq N$ 時，等式亦成立。

那麼，當 $k=m+1$, 且 $n=N+1$ 時，

$$\frac{F_{N+1}F_N\cdot\cdots\cdot F_{(N+1)-(m+1)+1}}{F_{m+1}F_m\cdot\cdots\cdot F_1}=\frac{(\alpha^{N-m}F_{m+1}+\beta^{m+1}F_{N-m})\cdot F_N\cdot\cdots\cdot F_{N-m+1}}{F_{m+1}F_m\cdot\cdots\cdot F_1}$$ (由引理的推論)

$$=\alpha^{N-m}\cdot\frac{F_{m+1}\cdot F_N\cdot\cdots\cdot F_{N-m+1}}{F_{m+1}\cdot F_m\cdot\cdots\cdot F_1}+\beta^{m+1}\cdot\frac{F_N\cdot\cdots\cdot F_{N-m+1}F_{N-m}}{F_{m+1}F_m\cdot\cdots\cdot F_1}$$

$$=\alpha^{N-m}\cdot\frac{F_N\cdot\cdots\cdot F_{N-m+1}}{F_m\cdot\cdots\cdot F_1}+\beta^{m+1}\cdot\frac{F_N\cdot\cdots\cdot F_{N-m+1}F_{N-(m+1)+1}}{F_{m+1}F_m\cdot\cdots\cdot F_1}$$

$$=\alpha^{N-m}\cdot h_{N-m}(\alpha^m,\alpha^{m-1}\beta,\cdots,\alpha\beta^{m-1},\beta^m)+\beta^{m+1}\cdot h_{N-(m+1)}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$$

(由歸納法假設)

$$=h_{N-m}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha^2\beta^{m-1},\alpha\beta^m)+\beta^{m+1}\cdot h_{N-m-1}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$$

(由次方乘法的分配律)

$$=h_{N-m}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$$ (由減元降次遞迴式)

$=h_{(N+1)-(m+1)}(\alpha^{m+1},\alpha^m\beta,\cdots,\alpha\beta^m,\beta^{m+1})$，可得所欲證之等式亦成立，

故由數學歸納法，所欲證之等式成立。

參、結語：

本文證明了：$\dfrac{F_n\cdot F_{n-1}\cdot\cdots\cdot F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdot\cdots\cdot F_1}=h_{n-k}(\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\alpha^{k-2}\beta^2,\cdots,\alpha^2\beta^{k-2},\alpha\beta^{k-1},\beta^k)$，其中 $n\geq k\geq 1$。此一命題，當 增大時，次方上升；當 增大時，變數個數增加。在使用數學歸納法的過程中，「減元降次遞迴式」、「次方乘法的分配律」與「一分為二引理」，皆發揮了作用，從中也顯示出完全齊次對稱多項式與費氏數列的內在結構，以及兩者之間的對應關係。

參考資料：

1. 陳建燁：費氏數列相鄰項乘積的完全齊次對稱多項式表示法。**科學教育月刊，第 405 期**，中華民國 106 年 12 月，P02～11。
2. 陳建燁，推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)，**高中數學學科中心電子報第 114 期**，2016 年 9 月，P6。
3. 陳建燁(2017)：循環數列的「完全齊次對稱多項式」表示法。**科學教育月刊，第 401 期**，中華民國 106 年 8 月，P21～22。