

運用新興科技進行高中數學函數教學之 操作介紹

陳香妘

國立彰化師範大學科學教育研究所博士生

壹、前言

讓學生經由「動手做」方式學習，不但能培養學生動手解決問題的技能，且能讓學生透過與實際生活環境類似的經驗歷程，理解主要學習概念，亦能增加學生在上課時的參與感(Xiang,Kong,Chen , Huang & Luo,2017)。現代科技發達，有許多與數學學習有關的電腦軟體或手機應用軟體(APP)出現，並且平版電腦或智慧型手機上網普及，能即時互動，因此筆者提出運用新興科技，進行高中數學函數教學，以協助學生將部分抽象概念透過新興科技幫助學習並且加深印象。本文以「函數作圖」為例介紹手機應用程式 APP 數學軟體 Mathway 及電腦數學軟體 Geogebra，當學生學習函數作圖時，不僅可以利用透過科技清楚看見函數圖形的呈現，更可結合 3D 列印機將函數圖形列印成實體作品。再者，學生把螢幕上的二維圖形具體的以 3D 列印出來，落實數學教育與創客教育結合，達成數學科教學與科技跨領域整合的目的。

貳、函數作圖及軟體說明

一、手機 APP 數學軟體 Mathway

首先介紹手機 APP 應用軟體 Mathway，只需要輸入數學公式就能使用，可以算基礎數學、初級代數、代數、初級微積分、微積分和三角函數等各種數學細分的題目，甚至是圖表題目都可以處理，解題過程和步驟陳述相當詳細，有中文簡體字版及英文版。



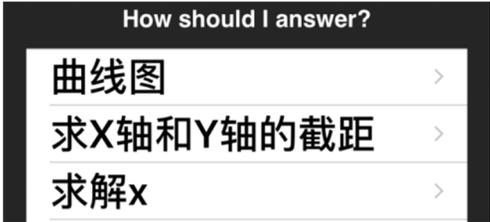
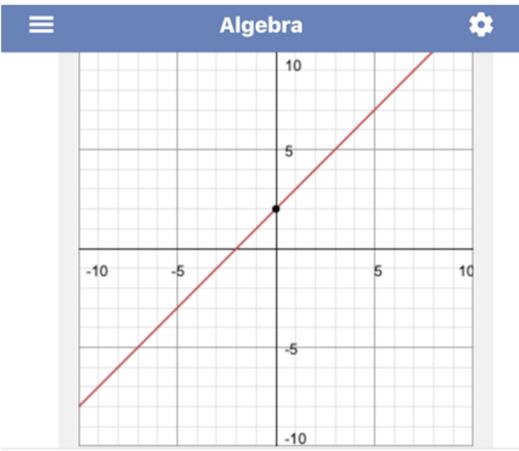
在高中數學教材中關於函數作圖的單元計有第一冊<多項式函數>單元的一次函數及二次函數作圖，第三冊<直線與圓>單元的直線方程式及其圖形，第四冊<二次曲線>單元的拋物線、橢圓及雙曲線等圖形探討。教師可教導學生下載並使用手機數學應用軟體 Mathway，進行作圖相關教學，並且能夠讓學生對於函數的性質迅

速加以驗證，如：一次函數直線方程式的斜率、截距，二次函數拋物線函數的開口方向，橢圓長軸、短軸及雙曲線的焦點分布、漸近線…等。說明操作過程如下：

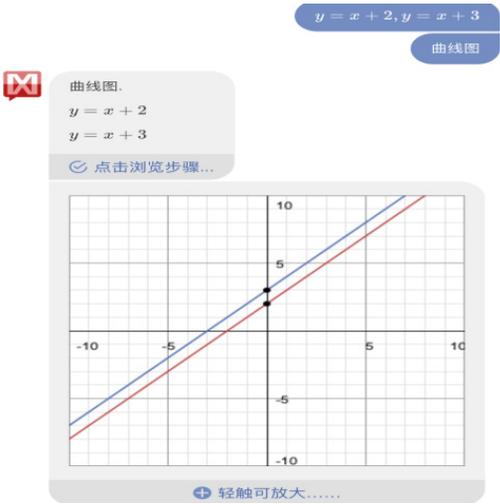
(一) 高中數學第一冊<多項式函數>單元

1. 一次函數作圖

例 1：畫出 $y=x+2$ 的圖形

說明	圖示
1.在輸入列輸入: $y= x+2$	
2.選擇畫圖(曲線圖)	
3.出現 $y= x+2$ 圖形	

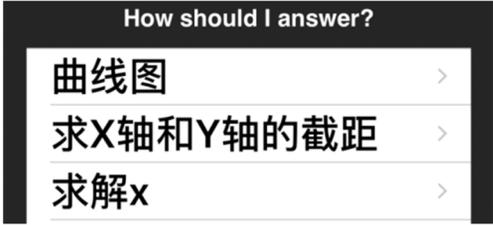
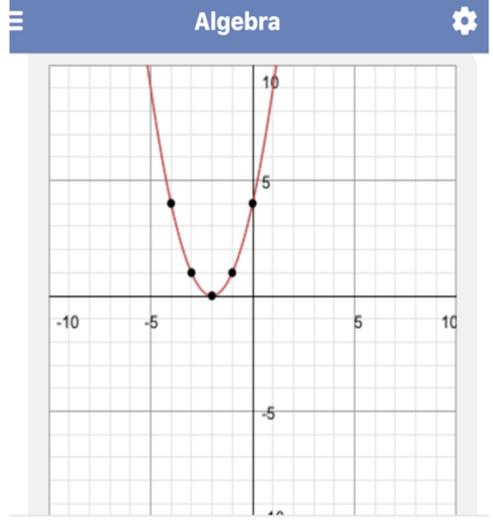
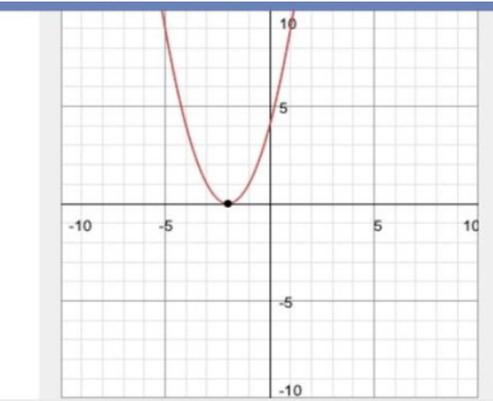
例 2：比較 $y=x+2$ 與 $y=x+3$ 的圖形差異

說明	圖示
<p>教學時可讓學生在輸入列輸入： $y=x+2$，$y=x+3$</p>	
<p>可同時畫出 $y=x+2$ 與 $y=x+3$ 的圖形進行比較。 可藉此圖進行直線方程式之 y 截距 名詞教學</p>	

2. 二次函數作圖

例 3：畫出 $y = x^2 + 4x + 4$ 的圖形

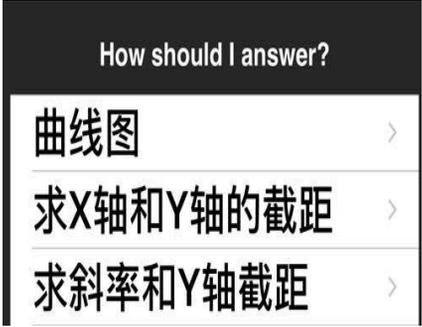
說明	圖示
<p>1. 輸入 $y = x^2 + 4x + 4$</p>	

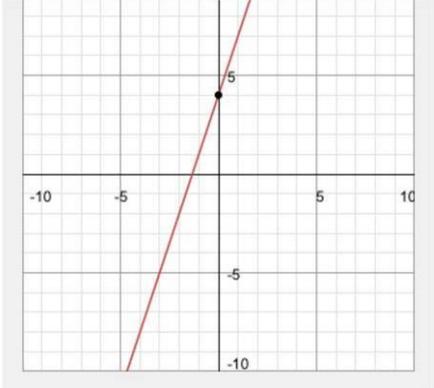
說明	圖示
<p>2. 選擇</p>	
<p>3. 出現圖形</p>	
<p>4. 如果將步驟 2 改成選擇「求頂點」，則出現圖形並只標示頂點位置，學生可以藉此檢視經過配方成形如 $y = (x + 2)^2$，所找頂點(-2,0)的正確性。</p>	

(二) 高中數學第三冊<直線與圓>單元

1. 斜截式： $y=mx+b$ ，斜率為 m ， y 截距為 b

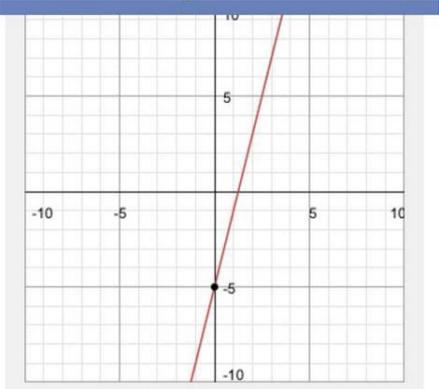
例 4：畫出 $y=3x+2$ 的圖形

說明	圖示
<p>1. 輸入 $y = 3x + 2$</p>	
<p>2. 求斜率和 y 截距</p>	
<p>3. 顯示斜率和 y 截距</p>	

說明	圖示
4.出現圖形	

教學應用時可以讓學生畫出其他斜截式圖形，比較斜率與 y 軸截距改變後圖形的差異。此外，也可進行 X 軸截距教學。

2. 點斜式： $y - y_0 = m(x - x_0)$ ，斜率為 m ，過 (x_0, y_0)
 例 5：畫出斜率為 4，過 $(2, 3)$ 的圖形

說明	圖示
1.輸入	
2. 出現圖形	

(三) 高中數學第四冊<二次曲線>

1. 拋物線方程式

例 6：畫出 $y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形

在輸入列輸入 $y = (x - 2)^2 + 3$ ，也會顯示開口方向、頂點、焦點、對稱軸、準線。

方向：向上開口

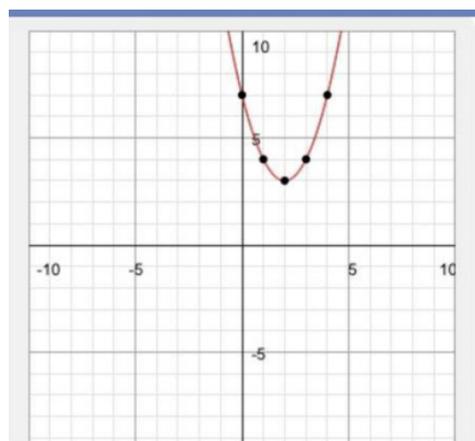
頂點：(2, 3)

焦點： $(2, \frac{13}{4})$

對稱軸： $x = 2$

準線： $y = \frac{11}{4}$

x	y
0	7
1	4
2	3
3	4
4	7



例 7：畫出 $y = x^2 - 4x + 7$ 的圖形

在輸入列輸入 $y = x^2 - 4x + 7$ ，因為 $y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$

所以也會出現如 $y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形。

$$y = x^2 - 4x + 7$$

曲线图



利用方向、頂點、焦點和對稱軸畫出拋物線的圖像

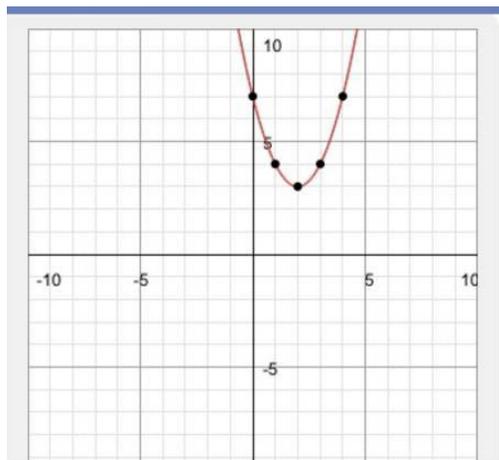
方向：向上開口

頂點：(2, 3)

焦點： $(2, \frac{13}{4})$

對稱軸： $x = 2$

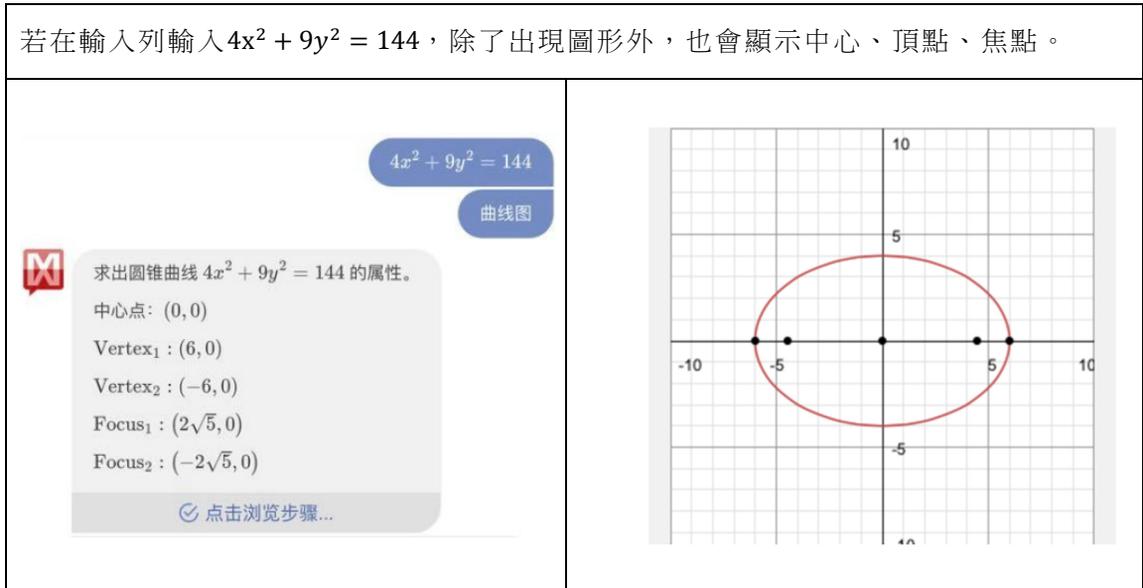
準線： $y = \frac{11}{4}$



2. 橢圓方程式

例 8：畫出橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 的圖形

若在輸入列輸入 $4x^2 + 9y^2 = 144$ ，除了出現圖形外，也會顯示中心、頂點、焦點。

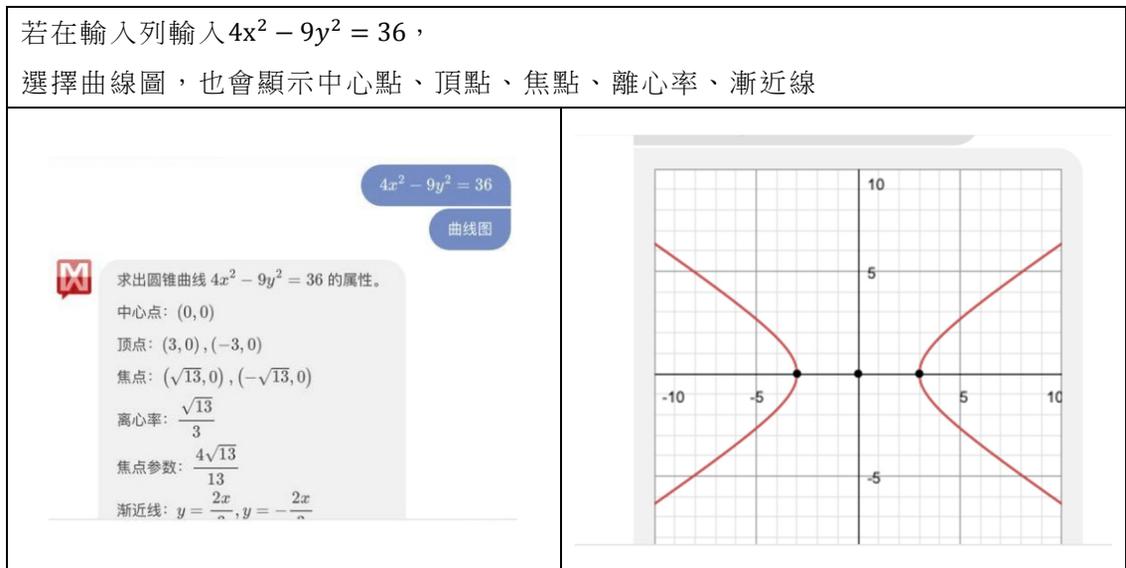


3. 雙曲線方程式

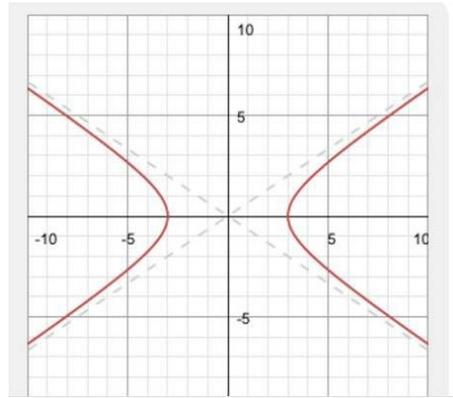
例 9：畫出雙曲線 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 的圖形

若在輸入列輸入 $4x^2 - 9y^2 = 36$ ，

選擇曲線圖，也會顯示中心點、頂點、焦點、離心率、漸近線



特別說明：若只選擇漸近線，出現圖形會把漸近線特別標示出來。



在教學時，教師可以先詢問方程式相關問題如求出中心點、頂點、焦點、離、漸近線。請同學以紙筆求出答案後，再畫圖驗證，以加深印象。

二、數學軟體 Geogebra

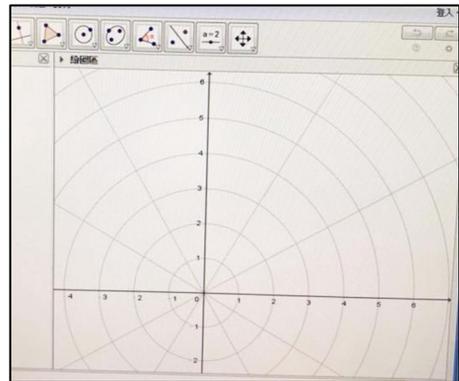
數學軟體 Geogebra 是一動態數學軟體，師生都能輕易取得，涵蓋幾何、代數、試算表、繪圖、統計以及微積分功能。

高中數學內容包含直角坐標轉換成極坐標，但是沒有極坐標函數作圖。其實利用電腦軟體 Geogebra，畫出極坐標函數作圖之輸入並不困難。

以畫出 $r=3 \sin 4\theta$ 的圖形說明如下：

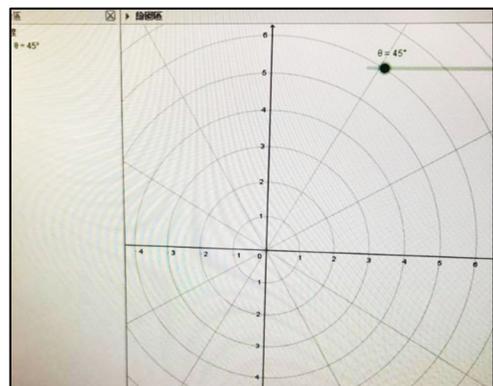
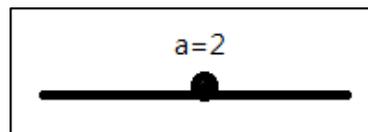
(一) 畫面改成極坐標

1. 繪圖區空白處按右鍵出現選單
2. 選擇繪圖區出現設定畫面
3. 點「格線」
4. 選「極座標」
5. 選線的樣式(可自行挑選)
6. 關閉設定畫面



(二) 工具列選擇角度

1. 按一下下列標示

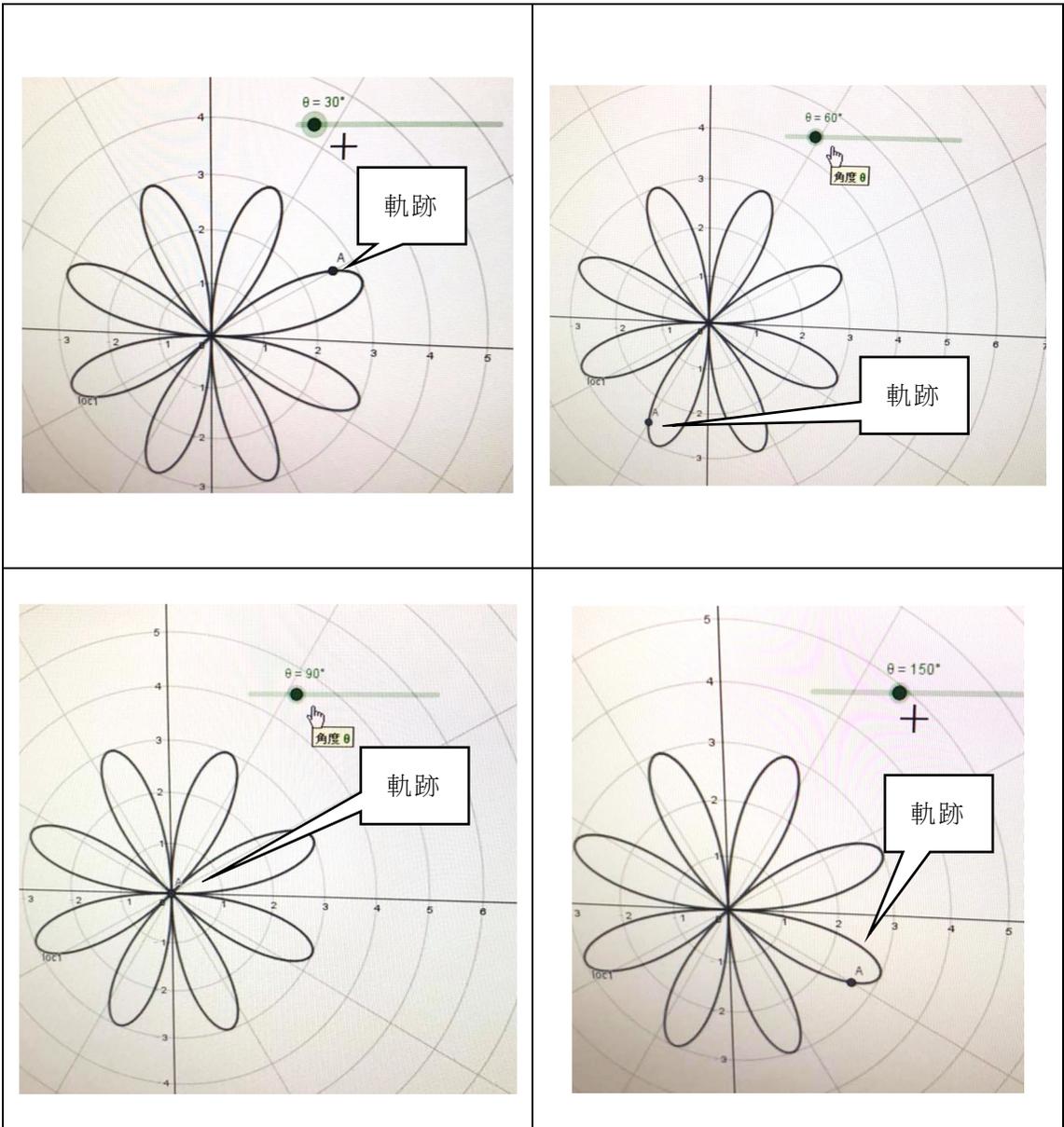


2. 繪圖區按一下
3. 點角度
4. 點 α 出現鍵盤
5. 選 θ
6. 按確定

(三) 畫圖(輸入列在最下方空白處)

1. 輸入 $r=3 \sin 4 \theta$
2. 輸入 $A=(r; \theta)$
3. 輸入 Locus [A, θ]

出現玫瑰線如下圖，移動滑桿可以看出軌跡：

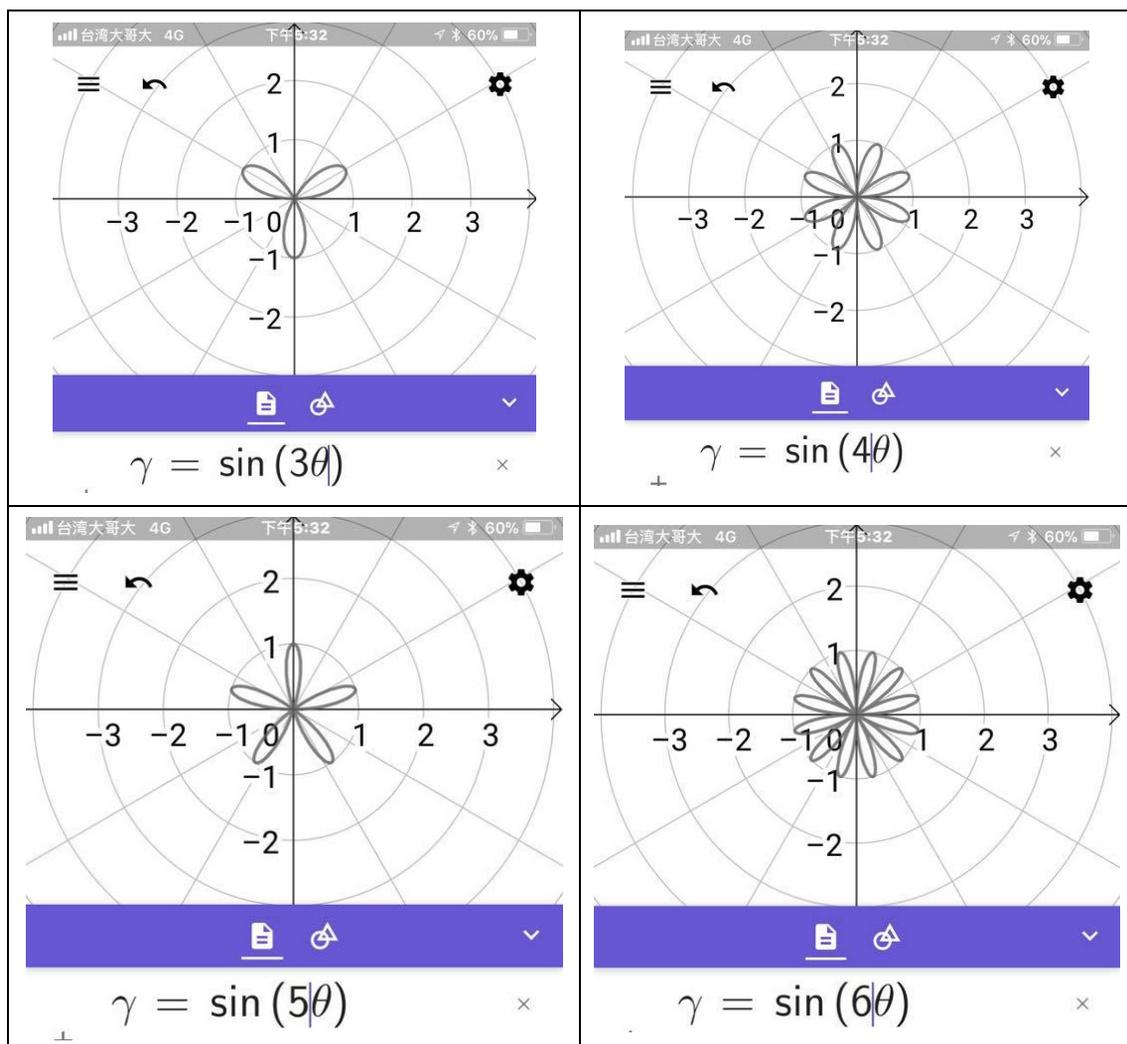


將 $r = \sin k\theta$ 的 k 值改變，則可得到不同瓣數的玫瑰線，例如： $r = 3 \sin 2\theta$ 圖形為 4 瓣玫瑰線， $r = 3 \sin 3\theta$ 圖形為 3 瓣玫瑰線，

$r = 3 \sin 4\theta$ 圖形為 8 瓣玫瑰線， $r = 3 \sin 5\theta$

圖形為 5 瓣玫瑰線，其原因與函數週期有關，可以讓學生由動態過程自行發現。

Geogebra 也有手機板可以下載，操作更方便。



三、3D 列印

Geogebra 所得到的圖形，可以經由轉換以 3D 列印機列印成型。說明如下：

1. 將圖檔匯入小畫家做初步的編輯。

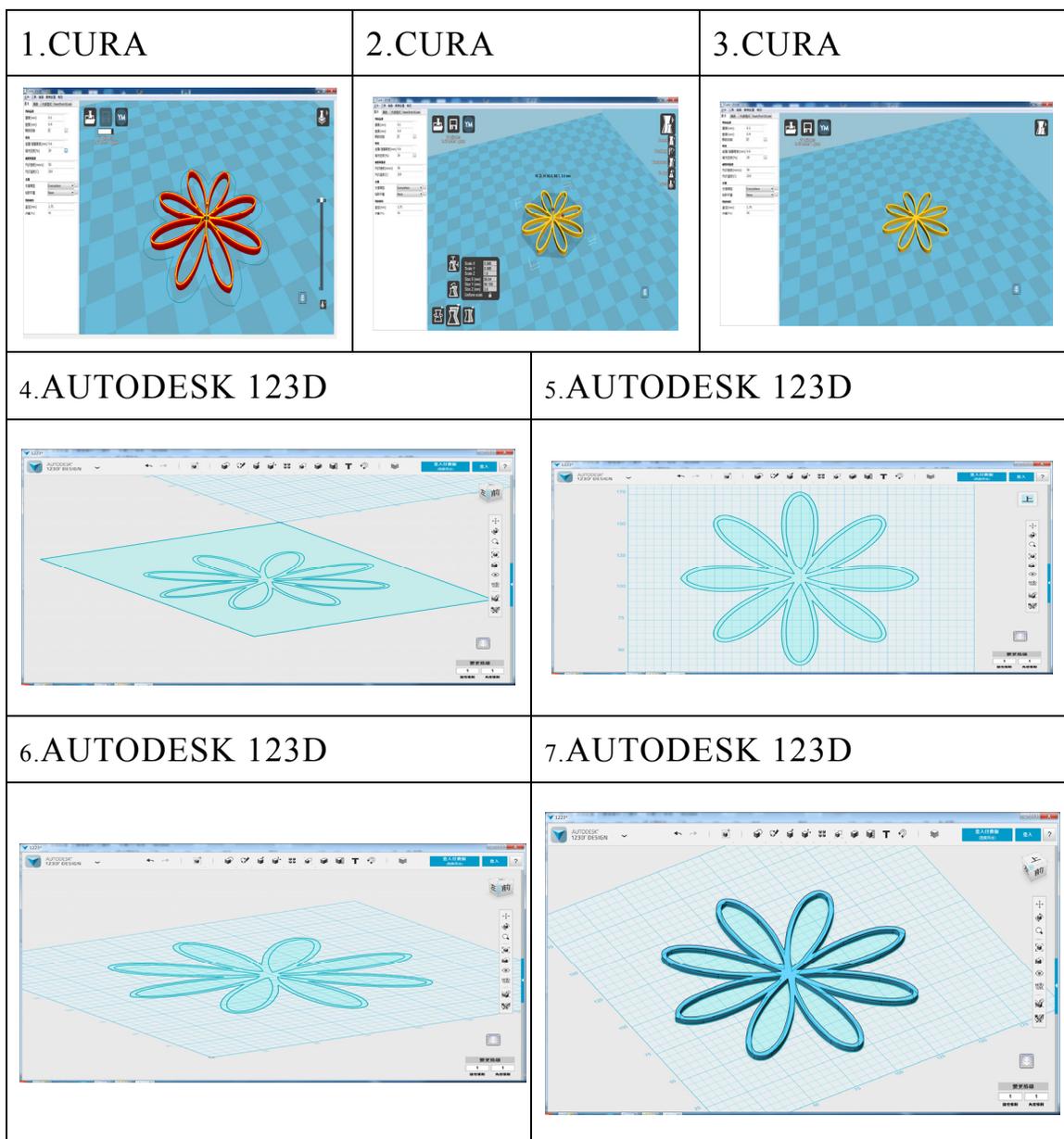
2. 使用 Vector Magic 做鋸齒消除及轉成 SVG 檔。

3. SVG 檔匯入 AUTODESK 123D 軟體，圖檔向上拉伸 3mm 成立體圖轉 STL

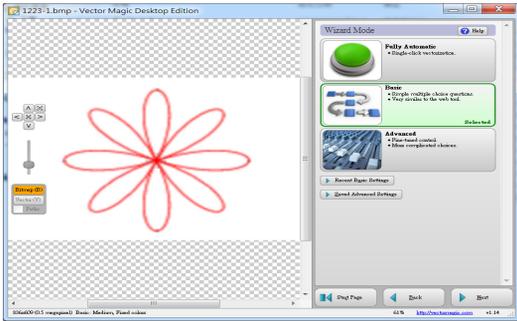
檔。

4. 將 STL 檔匯入 CURA 切片軟體，設定
列印相關參數後輸出成 gcode 檔。

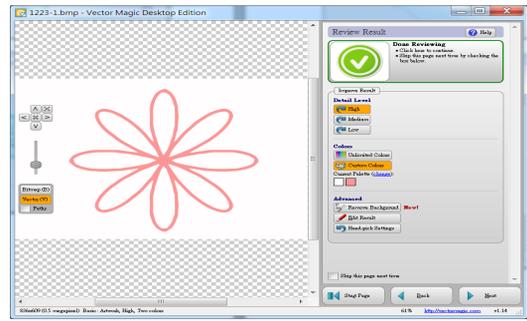
5. 將 gcode 檔讀入 3D 列印機後開始列
印其流程如下：



8.Vector Magic



9.Vector Magic



列印情形及成品如下圖：



以 3D 印表機列印



3 瓣、4 瓣及 5 瓣玫瑰線成品，為避免圖形斷裂，圖形中央加入圓形。

參、討論

筆者曾經請服務學校之一名數學老師與一名資訊科教師實施約 12 小時協同教學，過程中發現：

- 一、在手機使用過程中，當手機螢幕結果出現時，表情是喜悅及驚訝聲連連。讓學生具備使用手機 APP 軟體解決

數學問題之經驗，日後遇到相關問題，就會嘗試適當使用手機 APP 軟體。

- 二、在 Geogebra 操作過程中，學生對於工作列輸入指令部分，能力較強學生可以及時完成，能力較差學生略顯不能順利。但是當電腦螢幕結果出現時，表情均是驚喜，特別是參數改變使瓣

數變化時，學生於心得中多數表示有興趣。

三、在 3D 列印過程中，學生看到作品印出非常開心。部分作品因為印表機調整問題，造成成形失敗，但是學生仍是正向有興趣。

肆、建議

一、在手機 APP 軟體教學上的建議

手機 APP 軟體關於數學方面的有許多，除了本文所提之 Mathway 以外，其他有部分 APP 說明為英文，教師進行教學前，則需先翻譯成中文說明。

二、在電腦數學軟體教學上的建議

因為 Geogebra 軟體是下載網路版，教學前應先讓學生建立 Google 之 Gmail 帳號以利教學進行；指令步驟較多，應該一步一步進行，以免學生無法完成。

三、在 3D 列印教學上的建議

因為列印需要較多時間完成，可讓學生於課後完成，以利教學進行。玫瑰線圖形列印，必須中間加入圓形才能成功。資訊科教師也是實際列印發現不能成型，才予以改進調整。

四、學生用科技輔助學習，還需要其他相關知識學習

應讓學生在玫瑰線學習時，複習函數週期概念，才能理解為什麼 $r=3\sin N\theta$ ， N 為奇數與偶數之圖形變化。並可藉由 θ 的

變動以動態變化，觀察圖形軌跡。

伍、結論

Ausubel (1968) 提出意義學習理論，強調所學的事物必須對學習者具有意義，才能夠產生學習，並認為學習者的先備知識是意義學習產生的必要條件。學習不是被動的，不僅需要「眼到」，也需要「手到」和「心到」(郭文金、梁惠珍、柳賢, 2015)。動手做活動可促進學生參與學習數學的動機，培養其解題的信心，增進學習的效能，提升數學作業的成就(易正明, 2004；簡佳雯, 2003)。

許多與數學相關的手機 APP 或電腦軟體是免費即可取得，加上 3D 列印機在台灣高中已經非常普及。筆者希望透過本文，引起高中數學教師嘗試結合新興科技教學，以增進學生動手做的方式學習，提升數學學習興趣。科技時代的數學課應與科技發明結合，讓學生上學課使用手機、電腦和 3D 列印機等科技發明，除了讓數學學習能與新興科技結合，也能增加學生對科技產品的熟悉及透過科技驗證數學內容。

陸、參考文獻

- 易正明 (2004)。有趣的數學活動。**國教輔導**, 44 (1), 14- 20。
- 郭文金、梁惠珍、柳賢 (2015)。數學動手做活動對六七年級女學生數學學習自我效能影響之初探。**屏東大學科學教育**, 1, 54-82。
- 簡佳雯 (2003)。國民教育與科普讀物的避構—閱讀科普讀物的啟示看數學教

- 育。國教新知，50(1)，122-127。
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology : a cognitive view*. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Xiang T.R., Kong , G.W. Chen , George Q. Huang & Hao Luo(2017). Ubiquitous auction learning system with TELD (Teaching by Examples and Learning by Doing) approach: A quasiexperimental study. *Computers & Education* ,111 , 144-157.

致謝

本文感謝國立岡山高級農工職業學校顏技文老師提供 3D 列印指導、吳鐵國老師進行數學教學及宋維哲老師提供數學教學意見。