必歐-沙伐定律的相對論性之推導

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

電流產生磁場的規律，是由法國兩位物理學家必歐和沙伐(Biot-Savart)，研究分析很多實驗的資料總結出來的，稱必歐-沙伐定律。我們知道靜電場是靜止電荷造成的場，磁場是運動電荷產生的場，然而靜止和運動是相對的概念。靜止於一慣性坐標系內的電荷造成的是電場，而相對該坐標系作等速度運動的另一慣性坐標系，卻觀察到了磁場，這說明了必歐-沙伐定律應能運用相對論的勞倫茲變換推導出來。

貳、線性算符 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的變換

如圖 1 所示，若坐標系 $S'(O'x'y'z')$以速度 $\vec{v}$ 相對於坐標系 $S(O\,x\,y\,z)$沿著 Ox 軸正方向作等速直線運動，三對坐標軸分別平行，且 $t'=t=0$ 時，原點 O' 與 O 重合，根據光速不變原理和相對性原理可導出勞倫茲坐標變換：

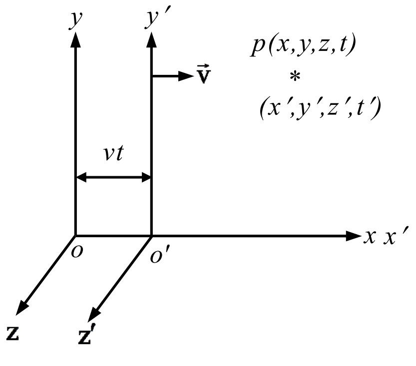

圖 1、勞倫茲坐標變換

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

其中　$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$

因 $x = x(x', t')$，$t = t(x', t')$，根據偏微分的性質可導出線性算符 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的變換關係如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}) \end{cases} \cdots\cdots (2)$$

參、電流面密度 $\vec{j}$ 和電荷體密度 ρ 的相對論性變換

根據電荷守恆定律和線性算符 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的變換式(2)可導出 $\vec{j}$ 和 ρ 的相對論性變換。電荷守恆定律為：

$$\nabla \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ [註 1]} \cdots\cdots (3a)$$

或

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \cdots\cdots (3b)$$

由相對性原理知電荷守恆定律在系 S' 中也應有相同的形式

$$\nabla \bullet \vec{j}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0 \cdots\cdots (4a)$$

或

$$\frac{\partial j'_x}{\partial x'} + \frac{\partial j'_y}{\partial y'} + \frac{\partial j'_z}{\partial z'} + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0 \cdots\cdots (4b)$$

稍後會證明(3a)與(4a)具有相同的物理形式所代表的物理意義是電荷在相對論性的轉換下

具有不變量。

將(2)式代入(3b)式可得：

$$\gamma(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})j_x+\frac{\partial j_y}{\partial y'}+\frac{\partial j_z}{\partial z'}+\gamma(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'})\rho=0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x'}[\gamma(j_x-v\rho)]+\frac{\partial j_y}{\partial y'}+\frac{\partial j_z}{\partial z'}+\frac{\partial}{\partial t'}[\gamma(\rho-\frac{v}{c^2}j_x)]=0$$

將上式與(4b)式對比，可得：

$$j'_x=\gamma(j_x-v\rho) \quad \text{(5a)}$$

$$j'_y=j_y \quad \text{(5b)}$$

$$j'_z=j_z \quad \text{(5c)}$$

$$\rho'=\gamma(\rho-\frac{v}{c^2}j_x) \quad \text{(5d)}$$

同理，寫出 ρ 和 $\vec{j}$ 的逆變換式

$$j_x=\gamma(j'_x+v\rho') \quad \text{(6a)}$$

$$j_y=j'_y \quad \text{(6b)}$$

$$j_z=j'_z \quad \text{(6c)}$$

$$\rho=\gamma(\rho'+\frac{v}{c^2}j'_x) \quad \text{(6d)}$$

現在證明電荷在相對論性的轉換下具有不變性。假設靜止在系 S' 內有一無限小的體積 $dV'=dx'dy'dz'$，其內充滿著電荷體密度 ρ'，因電荷係靜止，故 $\vec{j}'=0$，得 $\rho=\gamma\rho'$。設在系 S' 內的觀察者測得電荷 $q'=\rho'dV'=\rho'dx'dy'dz'$，而在系 S 內的觀察者測得電荷 $q=\rho dV=\rho dxdydz$。又 $dx=\frac{1}{\gamma}dx'$ (長度收縮)、 $dy=dy'$、 $dz=dz'$ 並將 $\rho=\gamma\rho'$ 式代入 q，得 $q=\gamma\rho'(\frac{1}{\gamma}dx'dy'dz')=q'$。

肆、電磁場向量 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的相對論性變換

先寫出系 S 中的 Maxwell 方程

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j} \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

的三維分量形式，又 $\mu_0\varepsilon_0=\dfrac{1}{c^2}$ ，得

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\mu_0 j_x \tag{9a}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\mu_0 j_y \tag{9b}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\mu_0 j_z \tag{9c}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9d}$$

由相對性原理在系 S'中也應有：

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'}-\frac{\partial B'_y}{\partial z'}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}+\mu_0 j'_x \tag{10a}$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'}-\frac{\partial B'_z}{\partial x'}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_y}{\partial t'}+\mu_0 j'_y \tag{10b}$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'}-\frac{\partial B'_x}{\partial y'}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_z}{\partial t'}+\mu_0 j'_z \tag{10c}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'}+\frac{\partial E'_y}{\partial y'}+\frac{\partial E'_z}{\partial z'}=\frac{\rho'}{\varepsilon_0} \tag{10d}$$

將變換式(2)及式(6b)代入(9b)式，得

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)B_z=\frac{1}{c^2}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)E_y+\mu_0 j'_y$$

整理後得

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}[\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)]=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}[\gamma(E_y-vB_z)]+\mu_0 j'_y$$

將上式與(10b)式比較有

$$\begin{cases} B'_x=B_x \\ B'_z=\gamma(B_z-\dfrac{v}{c^2}E_y) \\ E'_y=\gamma(E_y-vB_z) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

將變換式(2)和式(6c)代入(9c)式，得

$$\gamma(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})B_y-\frac{\partial B_x}{\partial y'}=\frac{1}{c^2}\gamma(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'})E_z+\mu_0 j'_z$$

整理後得

$$\frac{\partial}{\partial x'}[\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)]-\frac{\partial B_x}{\partial y'}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}[\gamma(E_z+vB_y)]+\mu_0 j'_z$$

將上式與(10c)式比較有

$$\begin{cases} B'_x=B_x \\ B'_y=\gamma(B_y+\dfrac{v}{c^2}E_z) \\ E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

將變換式(2)和式(6a)代入(9a)式，得

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'}-\frac{\partial B_y}{\partial z'}=\frac{1}{c^2}\gamma(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'})E_x+\mu_0\gamma(j'_x+v\rho')$$

兩邊乘以γ並整理得

$$\gamma\frac{\partial B_z}{\partial y'}-\gamma\frac{\partial B_y}{\partial z'}+\frac{\gamma^2 v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial x'}=\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\mu_0\gamma^2(j'_x+v\rho') \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(11)}$$

將變換式(2)及(6d)式代入(9d)式有

$$\gamma(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})E_x+\frac{\partial E_y}{\partial y'}+\frac{\partial E_z}{\partial z'}=\frac{\gamma}{\varepsilon_0}(\rho'+\frac{v}{c^2}j'_x)$$

兩邊乘以 $-\gamma\dfrac{v}{c^2}$ 並整理得

$$-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial y'}-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial z'}-\frac{\gamma^2 v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial x'}=-\frac{\gamma^2 v^2}{c^4}\frac{\partial E_x}{\partial t'}-\frac{\gamma^2 v}{c^2\varepsilon_0}(\rho'+\frac{v}{c^2}j'_x)\cdots(12)$$

將(11)式+(12)式，並注意到

$$\gamma^2=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1}\text{，}\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial y'}[\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)]-\frac{\partial}{\partial z'}[\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)]=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\mu_0 j'_x$$

將上式與(10a)式比較，可得

$$\begin{cases}E'_x=E_x\\ B'_y=\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)\\ B'_z=\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)\end{cases}\cdots\cdots(\text{III})$$

由(I)、(II)和(III)式，我們已完全得到了電磁場的變換公式如下：

$$\boxed{\begin{array}{l}E'_x=E_x\\ E'_y=\gamma(E_y-vB_z)\\ E'_z=\gamma(E_z+vB_y)\end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{l}B'_x=B_x\\ B'_y=\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)\\ B'_z=\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)\end{array}}\cdots\cdots(\text{IV})$$

其逆變換為

$$\boxed{\begin{array}{l}E_x=E'_x\\ E_y=\gamma(E'_y+vB'_z)\\ E_z=\gamma(E'_z-vB'_y)\end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{l}B_x=B'_x\\ B_y=\gamma(B'_y-\frac{v}{c^2}E'_z)\\ B_z=\gamma(B'_z+\frac{v}{c^2}E'_y)\end{array}}\cdots\cdots(\text{V})$$

伍、運動電荷的電磁場

設有一個帶正電的點電荷 q 靜止在慣性系 S' 的原點 O'處，系 S'相對於慣性系 S 以速度 $\vec{v}$ 沿 x 軸方向運動，三對坐標軸分別平行，且 $t'=t=0$ 時，原點 O' 與 O 重合，如圖 2 所示。

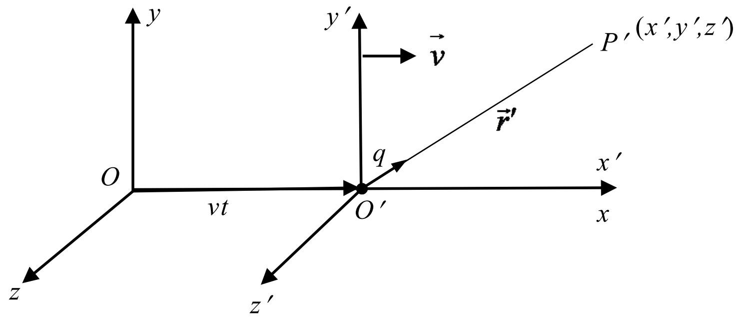

圖 2、系 S′相對系 S 以 $\vec{v}$ 向右運動

系 S'內的觀察者認為空間只有靜電場，t'時刻系 S'內空間任一點 P'處的電場、磁場為

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\vec{r}' \text{ ， } \vec{B}' = 0$$

即　$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \text{ ， } E'_y = \frac{qy'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \text{ ， } E'_z = \frac{qz'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \text{ ； } B_x' = B_y' = B_z' = 0$$

系 S 內的觀察者認為點電荷 q 以速度 $\vec{v}$沿 x 軸方向運動，除產生電場外，還產生磁場。利用(V)式電磁場的相對論變換，得系 S 的 $\vec{E}$ 、$\vec{B}$ ：

$$\begin{cases} E_x = E'_x = \dfrac{qx'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \\ E_y = \gamma E'_y = \gamma \dfrac{qy'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \\ E_z = \gamma E'_z = \gamma \dfrac{qz'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\gamma \dfrac{v}{c^2} \dfrac{qz'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \\ B_z = \gamma \dfrac{v}{c^2} \dfrac{qy'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \end{cases}$$

注意到　$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = [\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \dfrac{q\gamma(x-vt)}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\ E_y = \dfrac{\gamma q y}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\ E_z = \dfrac{\gamma q z}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\dfrac{v}{c^2}E_z \\ B_z = \dfrac{v}{c^2}E_y \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI)}$$

由此可見，系 S 中觀察到以等速度 $\vec{v}$ 運動的電荷 q 產生的場為兩部分：
第一部分是運動電荷 q 造成的電場

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

它與靜電場是不一樣的，沒有中心對稱性，如圖 3 所示，描述場的電力線密集於電荷運動的垂直方向，且密集程度與電荷 q 運動速度密切相關。第二部分是運動電荷 q 造成的磁場，將(VI)式的磁場公式寫成向量式為

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(13)}$$

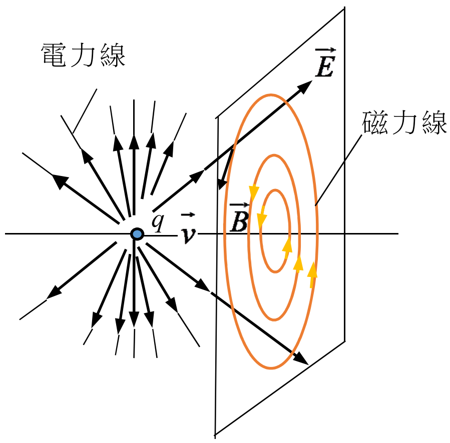

圖 3、等速運動點電荷 q 所生的電場、磁場

當電荷低速運動時，$\gamma \approx 1$　由(VI)式得

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{q(x-vt)}{4\pi\varepsilon_0[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\ E_y &= \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\ E_z &= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \quad \cdots (14)$$

其中 $\vec{e_r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \dfrac{\vec{r}}{r}$。

將(14)式代入(13)式，得

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}\vec{v}\times\vec{e_r} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}\vec{v}\times\vec{e_r} \quad \cdots\cdots (15)$$

$\vec{B}$ 垂直於 $\vec{v}$ 與 $\vec{e_r}$ 組成的平面，磁力線是以運動方向為軸的一組同心圓，如圖 3 所示。

陸、電流源所生的磁場

如圖 4 所示，以 I 表示電流源上的電流，以 $d\vec{l}$ 表示該段電流源向量，其長度為 dl 、方向為電流的方向，A 表示其截面積。以 n 表示電流源中的載子(如金屬導線中的自由電子)的數量密度，則其中的載子總數為 $n\mathrm{A}dl$。以 q 表示每個載子的電量，並設想它們都以漂移速度 $\vec{v}$ 運動。由(15)式並根據疊加原理，距離電流源 $\vec{r}$ 處之 P 點的總磁場 $\vec{B}$ 為

$$d\vec{B} = n\mathrm{A}dl\,\frac{\mu_o q}{4\pi r^2}\vec{v}\times\vec{e}_r = \frac{\mu_o}{4\pi r^2}qn\mathrm{A}dl\vec{v}\times\vec{e}_r$$

又 $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{qn\mathrm{A}vdt}{dt} = qn\mathrm{A}v$，且 $d\vec{l}$ 方向與 $\vec{v}$ 相同，所以

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}d\vec{l}\times\vec{e}_r}$$

上式即所謂的必歐-沙伐定律。

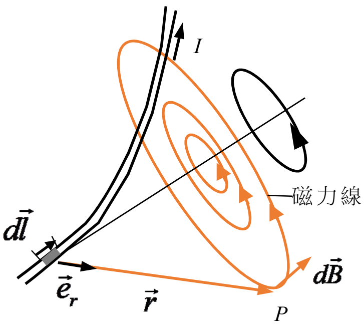

圖 4、電流源激發的磁場

柒、結論

本文在推導電磁場相對論性的變換時，運用了微積分的連鎖律和勞倫茲變換推導出線性算符 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的變換。其次，再根據相對論性原理，即普遍的物理規律在不同的慣性坐標系中應有相同的形式，經由電荷守恆定律、線性算符的變換式和電荷是一相對論性的不變量，進一步導出了電流面密度 $\vec{j}$ 和電荷體密度 ρ 的相對論性變換。最後再配合 Maxwell 方程得出電磁場的相對論性的變換。在此變換公式中得知電磁場是一個統一的整體，而在相對於靜止的電場源做等速運動的慣性坐標系中便自然而然地出現磁場。因此必歐-沙伐定律是能從靜電場的庫倫定律運用相對論的勞倫茲變換推導出來，磁場力是電場力的一種相對論性效應。

備　　註

註 1：在電荷守恆下，電流面密度 $\vec{j}$ 與電荷體密度 ρ 的關係：假設在空間中有電荷在流動，取一個封閉曲面 A 如圖 5 所示，這時候 A 裡面的電荷量就等於 $\iiint_V \rho dV$，其中的 V 是封閉面積 A 所包圍的體積，所以這裡面的電荷量隨時間的改變量為 $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$。

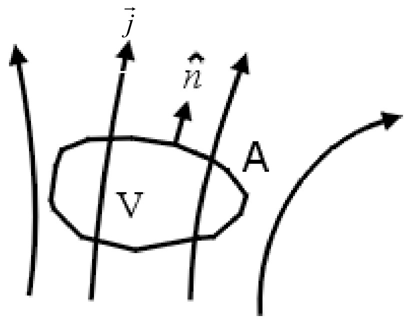

圖 5、電流面密度 $\vec{j}$ 與電荷體密度 ρ 的關係

另一方面，電荷的流進或流出，造成該區域的電荷量隨時間的改變量為 $-\oiint_{A} \vec{j}\cdot\hat{n}da$。由於電荷守恆，因此

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V}\rho dV = -\oiint_{A}\vec{j}\bullet\hat{n}da$$

因為習慣上取 $\hat{n}$ 為向外的方向，所以流出為正，流入為負。不過，電荷量的導數，增加時為正，減少時為負，所以上式中有一負號。利用散度定理(Divergence theorem)定理，就得到 $-\oiint_{A}\vec{j}\cdot\hat{n}da = -\iiint_{V}\nabla\cdot\vec{j}dV$，代入上式，得 $\iiint_{V}\left(\nabla\bullet\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV = 0$。又 A 是任意取的，所以等式對於任意 V 都要成立，於是得到 $\nabla\bullet\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。

參考文獻

吳波、劉以康(1999) 導出電磁場相對論變換的又一種嘗試。**上饒師範學院學報[J]，19(6)**：19-24。

吳波、寧長華(2002) 電磁場相對論變換的初等推導。**上饒師範學院學報[J]，22(6)**：20-24。

付林興、鄒志武(2006) 必歐-沙歐定律的推導。**湘潭師範學院學報[J]，28(1)**：28-29。

黃光照(2017) 勞倫茲力的相對論性之解釋。**科學教育月刊，396**，17-21。