中學生通訊解題第 102-103 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10201

設有 n 個實數 $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ ，其中每一個 x_i ，不是 $+1$ 就是 -1 ，且 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$ 。試證：n是 4 的倍數。

參考解答：

令 $\frac{x_i}{x_{i+1}}=y_i(1\le i\le n-1)$ ，$\frac{x_n}{x_1}=y_n$ ，

因為 x_i 不是 $+1$ 就是 -1 ，所以 y_i 不是 $+1$ 就是 -1 。

設 $y_1,y_2,...,y_n$ 這 n 個數中有 a 個 $+1$ ，b 個 -1 ，則 $a+b=n$ 。

又 $y_1+y_2+...+y_n=a\times(+1)+b\times(-1)=a-b$ ，

因為 $a-b=0$ ，即 $a=b$ ，所以 $n=2b$ 。

又由於 $y_1y_2...y_n=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot...\frac{x_n}{x_1}=1$ ，

即 $(+1)^a\cdot(-1)^b=1$ ，所以 $(-1)^b=1$ 。

故 b 為偶數，設 $b=2m$ ，則 $n=4m$ ，故 n 是 4 的倍數。

【解題評析】

1. 有些同學直接討論 $n=4$，或 4 的倍數使得原式成立，論述的方式不足以解決本題。
2. 有些同學未將(-1)代表何式作說明，即展開論述，以致表達不清，文字表達的能力需要再加強練習。

問題編號
10202

設 a,b,c 為正整數，且滿足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=13$ ，求 $a+b+c$ 的最小值。

簡答：8

參考解答：

由 a,b,c 的輪換對稱性，不妨設 $a\ge b\ge c$ 。

令 $a-b=m,b-c=n$ ，則 $a-c=m+n$ ，且

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[m^2+n^2+(m+n)^2]=13$$ ，

即 $m^2+mn+n^2=13$ 。

對於 m 的方程式有判別式 $D=n^2-4(n^2-13)=52-3n^2\ge 0$

又 n 為非負整數 得$n^2\le\frac{52}{3}\Rightarrow 0\le n\le 4$ ，

又 m 為非負整數，故判別式 D 必須為完全

平方數，且 $m=\dfrac{-n+\sqrt{D}}{2}$ ，

檢驗如下：

(1) 當 $n=0$ 時， $D=52$ (不合)。

(2) 當 $n=1$ 時， $D=49=7^2$ ，此時，

$m=\dfrac{-1+7}{2}=3$ 。

$\begin{cases}a-b=3\\b-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b+3=c+4\\b=c+1\end{cases}$ (因為 $c\geq 1$)。
$\Rightarrow a+b+c=3c+5\geq 8$

(3) 當 $n=2$ 時， $D=40$ (不合)。

(4) 當 $n=3$ 時， $D=25=5^2$ ，此時，

$m=\dfrac{-3+5}{2}=1$ 。

$\begin{cases}a-b=1\\b-c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b+1=c+4\\b=c+3\end{cases}\Rightarrow a+b+c$
$=3c+7\geq 10$
(因為 $c\geq 1$)。

(5) 當 $n=4$ 時， $D=4=2^2$ ，此時，

$m=\dfrac{-4+2}{2}=-1$ (不合)。

所以，當 $a=5,b=2,c=1$ 時， $a+b+c$ 取得最小值 8 。

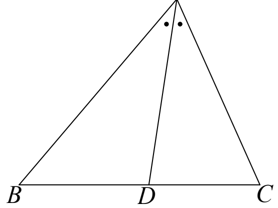
【解題評析】

1. 本題詳解解題重點是由 a,b,c 的輪換對稱性出發(設 $a\geq b\geq c$)，再配合方程式的改寫，及判別式的討論，最後由 a,b,c 皆為正整數的條件，即可討論出 $a+b+c$ 的最小值。
2. 大部分作答同學是由 a,b,c 的輪換對稱性出發(設 $a\geq b\geq c$)，並化簡成 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=26$ 後，討論滿足方程式時， $(a-b)^2,(b-c)^2,(a-c)^2$ 的兩類可能為 1,9,16 或 0,1,25 的排列，再經計算後可得 0,1,25 必不滿足方程式，但 1,9,16 有解，且 $a=5,b=2,c=1\Rightarrow a+b+c=8$ ，而 $a=5,b=4,c=1\Rightarrow a+b+c=10$ ，因此最小值為 8 。
3. 另有一部分同學是由 a,b,c 的輪換對稱性出發(設 $a\geq b\geq c$)，直接由 a,b,c 皆為正整數的條件，窮舉討論 $a+b+c=3,4,5,\cdots,8$，分析各種情形下代回原式是否成立，最後得到 $a+b+c=3,4,5,\cdots,7$ 皆不合，但是 $a=5,b=2,c=1\Rightarrow a+b+c=8$ 滿足原式，進而可得 8 為最小值。
4. 未得滿分的同學幾乎都有掌握本題的重點，只是有的是討論過程有疏漏或是沒說明窮舉討論 $a+b+c=3,4,5,\cdots,7$ 都不合後，為何 $a+b+c=8$ 可以是最小值？才因此被扣分。

問題編號 10203

如圖，在△ ABC 中，點 D 在 $\overline{BC}$ 上，已知 $\overline{AD}$ 是∠BAC 的平分線，

試證明： $\overline{AD}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{DB}\cdot\overline{DC}$ 。



參考解答：

如下圖，在 $\overrightarrow{AD}$ 上取一點 E 使 $\angle 1=\angle 2$，連接 $\overline{BE}$，

令

$\overline{AB}=c, \overline{AC}=b, \overline{AD}=x, \overline{DE}=y, \overline{BD}=\alpha, \overline{CD}=\beta$

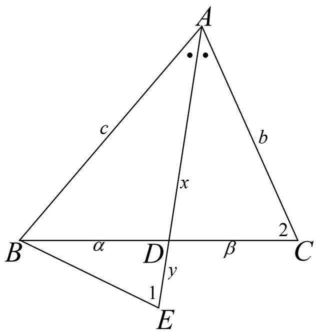
，則 $\Delta ADC \sim \Delta ABE \Rightarrow \dfrac{x}{c}=\dfrac{b}{x+y}$

$$\Rightarrow x^2=bc-xy \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Delta ADC \sim \Delta BDE \Rightarrow \frac{x}{\alpha}=\frac{\beta}{y}$$

$$\Rightarrow xy=\alpha\beta$$

代入(1)式 $\Rightarrow x^2=bc-\alpha\beta$。



【解題重點】

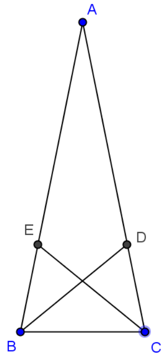
本題是屬於較容易的幾何證明題，有幾個思考方向；

1. 作 ΔABC 之外接圓，利用圓冪定理處理之。
2. 過 D 點作 $\overline{AB}$ 之平行線，利用相似三角形解之。
3. 作 $\overline{BC}$ 之垂線段 $\overline{AH}$，利用畢氏定理暴力解之。
4. 利用餘弦定理(不鼓勵此方法)。

問題編號

10204

如圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BD}, \overline{CE}$ 分別為 $\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分線，且 $\overline{BD}=\overline{CE}$，試證明：$\angle ABC=\angle ACB$。



參考解答：

如圖，令

$\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c, \overline{CD}=d, \overline{BE}=e,$

已知 $\overline{BD}=\overline{CE}$，則

$\overline{BD}^2=ac-d(b-d)=ab-e(c-e)=\overline{CE}^2$，

$ac-bd+d^2=ab-ce+e^2$ ---------(a)

又 $\overline{BD}, \overline{CE}$ 分別為 $\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分線，則 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{e}{c-e}$ 且 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b-d}$，則 $ac-ae=be$

且 $ab-ad=cd$

則 $ac=ae+be$ 且 $ab=ad+cd$ ---------(b)

將(b)代入(a)之中，

得 $ae+be-bd+d^2=ad+cd-ce+e^2$

$$ae+be+ce-ad-bd-cd+d^2-e^2=0$$
$$(a+b+c)e-(a+b+c)d+(d+e)(d-e)=0$$
$$(a+b+c)(e-d)+(d+e)(d-e)=0$$
$$(a+b+c-d-e)(e-d)=0$$

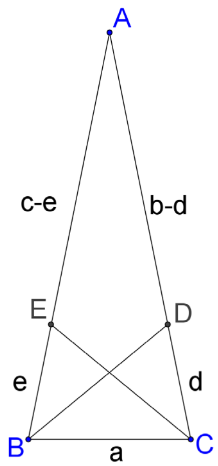
則 $a+b+c-d-e=0$ 或 $e-d=0$

但 $b>d$ 且 $c>e$，故 $a+b+c-d-e\neq 0$，因此 $e-d=0$，即 $d=e$ ---------(c)

將 (c) 代回 (b) 之中 $ac=ad+bd$ 且 $ab=ad+cd$，

相除得 $\dfrac{ac}{ab}=\dfrac{ad+bd}{ad+cd}$，則 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+b}{a+c}$

則 $ac+c^2=ab+b^2, (a+b+c)(b-c)=0$，但 $a+b+c\neq 0$，故 $b=c$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$。



【解題評析】

這一道數學題是在西元 1840 年時，由雷姆斯(C.Lehmus)向斯坦納(J.Steiner)提出的問題，後世稱為 Steiner-Lehmus 定理。多數同學以巧添輔助線的幾何作法答對，只要在搜尋網頁中輸入關鍵字「角平分線等長」就可找到許多相關證明；在此提供另一種代數作法，我們利用本期通訊解題中的 10203 題，關於角平分線長度的公式來證明此題。

利用幾何作法向外作輔助線造出平行四邊形的有王子瑜、陳宗葳、徐嘉宏、江陸、陳柏宇、葉峻豪、游承洋、鍾尚軒、李承翰同學；利用幾何作法向內作輔助線造出等腰三角形的有余竑勳、吳晟維、曾則皓、謝耀慶、游垚騰、蔡子暘、蔡宜庭同學；利用向內造輔助線利用類似解答所附代數作法計算的有顏君瑋、蔡沛愷、高暐竣、鄭容濤同學。以上同學都可獲得滿分 7 分。另外有少數同學犯了使用結論來作推導依據的錯誤，一開始就認定兩底角相等，或者腰上兩點連線平行底邊，只獲得 1 分。

會來投稿建中通訊解題，多數是所謂「數學感」較佳的同學，許多定理已經操作的相當熟練，表示平日數學訓練充足，值得欣慰；但也正因如此，所以在證明過程中常會有省略、跳步驟、上下句邏輯銜接不夠的小毛病。以本題為例，許多同學不自覺得使用例如「樞紐定理」、「樞紐逆定理」、「大邊對大角定律」、「大角對大邊定律」、「三一律」等，但有些同學卻沒有詳述何時使用何者推導；如果同學們將來證明時，能夠補上在每一步驟使用的定律或定理，那證明會更加完美。

問題編號
10205

甲乙丙丁四個人做傳球練習，球首先由甲傳出，每個人得到球後都等機率地傳給其餘三個人之一，設 P_n 表示經過 n 次傳遞後球回到甲手中的機率，求：

(1) P_6 之值。

(2) P_n (以 n 表示之)

簡答：(1) $\frac{61}{243}$　(2) $P_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$

參考解答：

經過一次傳遞後，落在乙丙丁手中的機率分別為 $\frac{1}{3}$，而落在甲手中的機率為 0，因此 $P_1=0$，兩次傳遞後球落在甲手中的機率為 $P_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

下面考慮遞推，要想經過 n 次傳遞後球落在甲的手中，那麼在 $n-1$ 次傳遞後球一定不在甲手中，所以 $P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$, $n=1$, 2, 3, 4, …, 因此

$$P_3=\frac{1}{3}(1-P_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ ,$$

$$P_4=\frac{1}{3}(1-P_3)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{27}\ ,$$

$$P_5=\frac{1}{3}(1-P_4)=\frac{1}{3}\times\frac{20}{27}=\frac{20}{81}\ ,$$

$$P_6=\frac{1}{3}(1-P_5)=\frac{1}{3}\times\frac{61}{81}=\frac{61}{243}\ ,$$

$$\because P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$$

$$\therefore P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{4})$$

$$P_n-\frac{1}{4}=(P_1-\frac{1}{4})\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

所以 $P_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}$ 。

【解題重點】

1. 首先，當球在甲手中時，經過一次傳遞後，落在乙丙丁手中的機率分別為 $\frac{1}{3}$，而落在甲手中的機率為 0，根據這個數學性質遞推下去。
2. 先求 $P_1=0$，再思考 P_n 、 P_{n-1} 的關係：在 $n-1$ 次傳遞後

$$\begin{cases} \text{球在甲手中機率}=P_{n-1} \xrightarrow{\text{一次傳遞}} \\ \text{不可能再傳給甲} \\ \text{球不在甲手中機率}=(1-P_{n-1}) \xrightarrow{\text{一次傳遞}} \\ \text{再傳給甲機率}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

因此 $P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$, $n=1, 2, 3,\cdots$，由遞迴數列求出 P_n ，這是此題的思考過程。

3. 一些同學利用 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6 推測出 P_n ，但未加以說明 P_n 對所有正整數結論都成立，過程不夠嚴謹。

問題編號
10301

設 p_1、p_2、…、p_n 是由質數組成的 n 項數列，已知 $p_1 \le p_1 \le \cdots \le p_n$ 且這 n 個質數的乘積等於其總和的 5 倍，試求 n 的值及此數列的各項。

簡答：$n=3$，（2、5、7）及 $n=4$，（2、2、3、5）

參考解答：

由已知條件，至少有一個 $p_j=5$。

令 p 為其餘質數中的最大值，A 為 5、p 以外 $n-2$ 個質數的總和，B 為 5、p 以外 $n-2$ 個質數的乘積，則有 $5(5+p+A)=5pB$，

即 $5+p+A=pB \cdots\cdots\cdots(1)$

又，當 $x,y\ge 2$，

$xy-x-y=(x-1)(y-1)-1\ge 0$，即 $xy\ge x+y$。

由(1)式，若 $n=2$，則 $A=0$，$B=1$，不符合。

故 $n\ge 3$，$B\ge A$（若 $n=3$，則 $B=A$）。

由 (1) 得知，$5+p+A\ge pA\ (n\ge 3)$ $\Rightarrow (p-1)(A-1)\le 6$ 因 $A\ge 2 \Rightarrow p\le 7$，

故 p 可能的值為 2、3、5、7。

① $p=7\Rightarrow A=2$，僅有另一項 2，（2、5、7）符合。（此時 $n=3$）

② $p=5\Rightarrow A=2$，亦僅有另一項 2，但（2、5、5）不符合。

③ $p=3\Rightarrow A\le 4$，可能有一個 2，或一個 3，或二個 2，即（2、3、5），（3、3、5），（2、2、3、5），其中符合的為（2、2、3、5）

④ $p=2\Rightarrow A\le 7$，可能有一個 2，或二個 2，或三個 2，但（2、2、5），（2、2、2、5），（2、2、2、2、5）均不符合。

故恰有兩數列（2、5、7）或（2、2、3、5）滿足題意。

【解題評析】

1. 本題要檢查出兩組解（2、5、7）與（2、2、3、5）是容易的，重點在於說明其他狀況是無解的。
2. 本題徵答的同學均由 n 之值去討論解，可惜的是大部分的同學在說明無解的情況，並未證明。其中衛道國中高暐竣同學利用不等式來估計質數範圍，化簡了討論的過程，過程相當完整，值得鼓勵，可惜未說明 $n\ge 7$ 無解。天母國中余竑勳利用奇偶分析協助討論，使得整個過程相當的簡潔與漂亮，值得嘉勉，可惜在討論 $n\ge 5$ 時，使用的不等式有問題。

問題編號
10302

共有幾個正整數 n 使 $1+5n$ 是完全平方數，並且 $1+3n\le 2013$？

簡答：22

參考解答：

[方法一]

① $\because 1+3n\leq 2013$ $\therefore n\leq 670$

② 設 $1+5n=m^2$ ，m 為正整數，則 $n=\dfrac{m^2-1}{5}$，$\because n$ 為正整數

$\therefore \dfrac{m^2-1}{5}=\dfrac{(m+1)(m-1)}{5}$ 為正整數不妨設

$m+1=5k$ 或 $m-1=5k$，k 為正整數

❶當 $m+1=5k$ 時，

$\because n=\dfrac{25k^2-10k}{5}=5k^2-2k$

$\therefore 5k^2-\ \ 2k\leq 670$，$1\leq k\leq 11$

❷當 $m-1=5k$ 時，

$\because n=\dfrac{25k^2+10k}{5}=5k^2+2k$

$\therefore 5k^2+2k\leq 670$，$1\leq k\leq 11$

③ 若 $5k_1^2-2k_1=5k_2^2+2k_2$，則（k_1+k_2）（$5k_1-5k_2+2$）$=0$

但 $k_1+k_2\neq 0$ 且 $5k_1-5k_2+2\neq 0$ 所以 $5k_1^2-2k_1\neq 5k_2^2+2k_2$ 此 22 個 n 值均不相等。故有 22 個 n 值。

[方法二]

① $\because 1+3n\leq 2013$ $\therefore n\leq 670$

② 設 $1+5n=m^2$ ，m 為正整數，則 $m^2\equiv 1 \pmod 5$，又

m 的個位數字	m^2 的個位數字
0	0
1.9	1
2.8	4
3.7	9
4.6	6
5	5

唯有 m 的個位數字為 1,4,6,9 時，滿足 $m^2\equiv 1 \pmod 5$

$\because n\leq 670$

$\therefore m^2=1+5n\leq 3351 \Rightarrow m\leq 57$

得 $m=4,6,9,11,14,16,19,21,24,26,29,31,34$
$,3639,41,44,46,49,51,54,56$

故有 22 個 n 值。

【解題評析】

先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

[方法一]

(1)正整數 n，$1+3n\leq 2013$，是限定 n 的範圍為 $n\leq 670$。

(2)設 p 為質數，a、b 為正整數，$p|ab$，則 $p|a$ 或 $p|b$ 。

(3)解一元二次不等式。

(4)說明所求出的 22 個 n 值均不相等

[方法二](窮舉法)

(1) $(1+5n)\equiv 1 \pmod 5$，得 $m^2\equiv 1 \pmod 5$。

(2)窮舉 m 的個位數字和 m^2 的個位數字的關係，得到 m 的個位數字的條件。

(3)求出 m 的範圍，列出所有的 m 值。

問題編號
10303

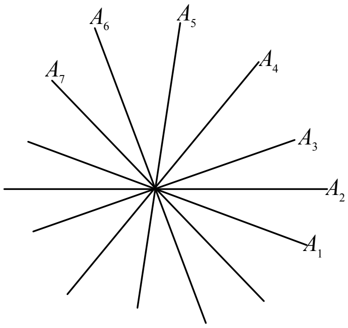
過點 O 任意作 7 條直線，試證：以 O 為頂點的角中必有一個小於 26°。

參考解答：

如圖，點 O 把 7 條直線分成 14 條射線，

記為 $\overrightarrow{QA_1}, \overrightarrow{QA_2}, \ldots, \overrightarrow{QA_{14}}$，相鄰兩射線組成 14 個角，記為 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{14}$，其和為一個周角，即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{14} = 360^0$。

若以 O 為頂點的每一個角都不小於 26^0，則 $360^0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{14} \geq 26^0 \times 14 = 364^0$，顯然矛盾，故在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{14}$ 中，必有一個角小於 26°。



【解題重點】

本題是典型的「鴿籠原理」問題，若不使用「鴿籠原理」解之，亦可用「反證法」處理。來函的同學大都採用「反證法」，另有少數同學使用直接解法，只有桃園市新興國際中小國中部游垚騰是用「鴿籠原理」解題。

問題編號 10304

由字母 A 和 B 組成“單詞”，單詞中字母的個數稱為長度。至少有兩個 A 相連的單詞稱為“好詞”，試問：長度為 6 的“好詞”有多少個？

簡答：43

參考解答：

(1)沒有 B 的“好詞”：1 個；

(2)僅有一個 B 的“好詞”：相當於 B 插在 5 個 A 之間，或在單詞的兩端，故有 6 個；

(3)僅有二個 B 的“好詞”：無論這兩個 B 置於何處，皆為好詞，相當於在 6 個位置放兩個 B，有 $\frac{6\times5}{2}=15$ 個；

(4)僅有三個 B 的“好詞”：將連續的兩個 A 看作 1 個，插在 ABBB，BABB，BBAB，BBBA 中，共有 16 個好詞”；

(5)僅有四個 B 的“好詞”：也就是僅有二個 A 的“好詞”，AA 插在 BBBB 中或兩端，故有 5 個。

共 43 個好詞”。

問題編號 10305

在無窮大的方格紙上的每個方格中分別寫有數字 1,2,3,4 之一，並且每種數字至少出現一次。如果一個方格裡面所寫的數字剛好等於寫在他的四個(以邊相鄰的)鄰格中的不同數字的個數，則稱此方格是「好的」。試問：所有的方格能否都是好的。若可能請舉例說明，若不可能請證明之。

簡答：不可能

參考解答：不可能。

假設存在一種寫法，使得所有的方格都是「好的」。

取出一個寫著4的方格 A，那麼，在它的一個鄰格(稱為 B)中也寫著4，在它的其餘三個鄰格 C,D,E 之一中寫著1 (如圖1)，顯然，1不能寫在 C 中，若不然，F 中也必須寫4，此時，方格 B 就有兩個鄰格都寫著4，產生矛盾。

同理，1不能寫在 E 中，於是，1就只能寫在 D 中，對 B 的鄰格做類似的討論，知道1只能寫在 G 中。

	F	C	
G	B	A	D
		E	

(圖1)

從而，在無窮大的方格紙上寫有數字1,4的方格如圖2所示。

而數字2,3只能寫在其分成的2×2方格中，其中，至少有一格寫3(不妨假設為 H)，則 I,J 中所填的數字其一為2、其一為3，不妨假設 J 為3，則 I,K 均寫2，但 I 的鄰格中有3個不同數字，矛盾。

4			4			4		
1	4	4	1	4	4	1	4	4
4			4	H	I	4		
4			4	J	K	4		
1	4	4	1	4	4	1	4	4
4			4			4		
4			4			4		

(圖2)

【解題重點】

本題解題重點在先取出一個寫著4的方格，由於4旁邊一定要有1,2,3,4，1的旁邊如果有4，則四周一定都是4，2旁邊只能有兩組數字相同，3旁邊只能有一組數字相同。先找出4和1所組成的骨架後，再討論中間的部分在放入數字2,3之後有矛盾，即可證明本題不可能存在方格是「好的」。