費氏數列相鄰項乘積的完全齊次對稱多項式表示法

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、序言：

設方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α 與 β，且 $\alpha>\beta$，則由費氏數列的比內(Binet)公式，有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}=h_{n-1}(\alpha,\beta)$$

此式將費氏數 F_n 用完全齊次對稱多項式 $h_{n-1}(\alpha,\beta)$ 加以表示，這是本篇文章的出發點。注意到 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ 可視為 α 與 β 的 n 次方的線性組合，而 $h_{n-1}(\alpha,\beta)$ 是 α 與 β 的完全齊次對稱多項式。

進一步地，考慮費氏數的平方 $F_n^{\ 2}$，是否有類似的表達式呢？

注意到

$$F_n^{\ 2}=\frac{1}{5}(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2\alpha^n\beta^n)=\frac{1}{5}[(\alpha^2)^n+(\beta^2)^n-2(\alpha\beta)^n]$$

可視為 α^2，β^2 與 $\alpha\beta$ 的 n 次方的線性組合。那麼，$F_n^{\ 2}$ 與 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的關係是什麼呢？這是本文所要探討的主題所在。經過一番探索之後，所得的結果為兩個等式：

$$F_n\cdot F_{n-1}=h_{n-2}(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)\text{，其中 } n\geq 2$$

與 $$F_n^{\ 2}=h_{n-1}(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)-h_{n-2}(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)\text{，其中 } n\geq 2\text{ 。}$$

接著，向費氏數列相鄰三項的乘積 $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}$ 推進，在分別研究了 $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}$ 與 $h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$ 的展開式之後，得到了一個結論：

$$F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} = 2 \cdot h_{n-3}(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3)$$，其中 $n \geq 3$

進一步地，再探索相鄰四項與相鄰五項的乘積，最後提出一般化的猜想：

$$\frac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot \cdots \cdot F_{n-k+1}}{F_k \cdot F_{k-1} \cdot \cdots \cdot F_1} = h_{n-k}(\alpha^k, \alpha^{k-1}\beta, \alpha^{k-2}\beta^2, \cdots, \alpha^2\beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}, \beta^k)$$，其中 $n \geq k \geq 2$。

貳、引用的記號與公式：

(一) 費氏數列(Fibonacci Numbers)：

定義：滿足「$F_1 = 1$，$F_2 = 1$，以及遞迴關係 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，其中 $n = 1, 2, \cdots$」的數列，稱為「費氏數列」(Fibonacci Numbers)，此數列的前幾項為：1，1，2，3，5，8，……。

費氏數列的一般項為 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$，其中 α 與 β 為方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩根，且 $\alpha > \beta$。

(二) 完全齊次對稱多項式 $\boldsymbol{h_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$：

定義：$\boldsymbol{h_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k \\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「$n$ 元 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，$h_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$，且 $h_k(a) = a^k$。

例：$h_2(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$。

例：$h_2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$。

例：$h_n(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 0}} (\alpha^i \beta^j) = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$。

(三) 拉格朗日插值型式：

定義：$L_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\,k}}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$，稱為「變數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 k 次拉格朗日插

值型式」。

註：以分子的次方來定義 L 的下標。

例：$L_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i=1}^{3}\dfrac{a_i^{\,2}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$

$$=\frac{a_1^{\,2}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^{\,2}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^{\,2}}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

例：$L_7(a,b,c,d)=\dfrac{a^7}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^7}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\dfrac{c^7}{(c-a)(c-b)(c-d)}$

$$+\frac{d^7}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

(四) $h-L$ 轉換公式：

$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $n\ge 2$，$k\ge 0$

說明：此一公式，可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換，詳細證明請見參考資料[1]。

例：$L_{k+1}(a,b)=\dfrac{a^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}}{b-a}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}=a^k+a^{k-1}b+\cdots+ab^{k-1}+b^k=h_k(a,b)$，此為 $n=2$ 的情形。

取 $a=\alpha$，$b=\beta$，$k=n-1$，即有 $F_n=\dfrac{\alpha^n}{\alpha-\beta}+\dfrac{\beta^n}{\beta-\alpha}=L_n(\alpha,\beta)=h_{n-1}(\alpha,\beta)$，

此即費氏數的完全齊次對稱多項式表示法。

例：$L_5(a,b,c,d)=h_2(a,b,c,d)$

公式運用與記憶方式：首先，有 4 個變數 a,b,c,d，可知 $n=4$。再來，$\dfrac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ 的分子的次方是 5，分母的次方是 3，化簡後所得齊次式的次數為 $5-3=2$，於是有 $L_5(a,b,c,d)=h_2(a,b,c,d)$。

從此例也可看出，L **與** h **的下標之差，恰為變數個數減 1**。由此，$h-L$ 轉換公式也可寫成：$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $n\ge 2$，$k\ge n-1$。

例：$L_5(a,b,c,d)=h_{5-(4-1)}(a,b,c,d)=h_2(a,b,c,d)$。

在本篇文章中，會用到的情形是：

1. 在 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 之中，

   取 $n=3$，$a_1=\alpha^2$，$a_2=\alpha\beta$，$a_3=\beta^2$，可得 $h_k(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)=L_{k+2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$，其中 $k\geq 0$。再令 $k=n$，得 $h_n(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)=L_{n+2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$，其中 $n\geq 0$。

2. 在 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 之中，

   取 $n=4$，$a_1=\alpha^3$，$a_2=\alpha^2\beta$，$a_3=\alpha\beta^2$，$a_4=\beta^3$，

   可得 $h_k(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=L_{k+3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$，其中 $k\geq 0$。

   再令 $k=n-3$，得 $h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=L_n(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$，其中 $n\geq 3$。

參、探索歷程：

一、將費氏數平方用「完全齊次對稱多項式」表示

(一) $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)=$？

先看前幾項：

$$h_1(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2，$$

$$\begin{aligned}h_2(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)&=\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4+\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\alpha^2\beta^2，\\&=\alpha^4+\beta^4+\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+2\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_3(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)&=\alpha^6+\beta^6+\alpha^3\beta^3+\alpha^4\beta^2+\alpha^5\beta+\alpha^2\beta^4+\alpha\beta^5+\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\alpha^3\beta^3\\&=\alpha^6+\beta^6+\alpha^5\beta+\alpha\beta^5+2\alpha^4\beta^2+2\alpha^2\beta^4+2\alpha^3\beta^3，\end{aligned}$$

由前三項看來，想將 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的展開式，寫成 α^2，β^2 與 $\alpha\beta$ 的 n 次方的線性組合，似乎並不容易。事實上，由所謂的 轉換公式，可得

$$h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)=L_{n+2}(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$$

$$=\frac{(\alpha^2)^{n+2}}{(\alpha^2-\alpha\beta)(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{(\beta^2)^{n+2}}{(\beta^2-\alpha\beta)(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{(\alpha\beta)^{n+2}}{(\alpha\beta-\alpha^2)(\alpha\beta-\beta^2)}$$ ，其中 $n\geq 0$ 。

第一項的分母 $(\alpha^2-\alpha\beta)(\alpha^2-\beta^2)$

$=\alpha\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha\cdot(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=\alpha\cdot(\sqrt{5})^2\cdot 1=5\alpha$ ，

同理，第二項的分母 $(\beta^2-\alpha\beta)(\beta^2-\alpha^2)$

$=\beta\cdot(\beta-\alpha)\cdot(\beta-\alpha)\cdot(\beta+\alpha)=\beta\cdot(\beta-\alpha)^2\cdot(\beta+\alpha)=\beta\cdot(-\sqrt{5})^2\cdot 1=5\beta$ ，

接著，第三項的分母 $(\alpha\beta-\alpha^2)(\alpha\beta-\beta^2)$

$=\alpha\cdot(\beta-\alpha)\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta)=-(\alpha\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2=-(-1)\cdot(\sqrt{5})^2=5$

因此，可得

$h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)=\frac{(\alpha^2)^{n+2}}{5\alpha}+\frac{(\beta^2)^{n+2}}{5\beta}+\frac{(\alpha\beta)^{n+2}}{5}=\frac{1}{5}[\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}+(\alpha\beta)^{n+2}]$ ，

又已知 ${F_n}^2=\frac{1}{5}[\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n]$，看起來， ${F_n}^2$ 似乎無法直接寫成 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的形式。

(二) $F_{n+1}\cdot F_{n+2}=$？

轉而考慮費氏數列相鄰兩項的乘積 $F_{n+1}\cdot F_{n+2}$ ：

$$F_{n+1}\cdot F_{n+2}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\cdot[(\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3})-(\alpha\beta)^{n+1}(\alpha+\beta)]$$

$$=\frac{1}{5}\cdot[\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}+(\alpha\beta)^{n+2}]$$

注意到 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)=\frac{1}{5}[\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}+(\alpha\beta)^{n+2}]$ ，

至此，可以得到 $F_{n+1}\cdot F_{n+2}=h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$，其中 $n\geq 0$，一個出乎意料的等式！

此式也相當於 $F_n\cdot F_{n-1}=h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$，其中 $n\geq 2$。

(三) $F_n{}^2$ 與 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的關係：

回到原先的探討主題，費氏數的平方 $F_n{}^2$：

注意到 $F_n{}^2=F_n\cdot(F_{n+1}-F_{n-1})$

$=F_n\cdot F_{n+1}-F_{n-1}\cdot F_n$

$=h_{n-1}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)-h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$，其中 $n\geq 2$。

此式的意義為：

雖然 $F_n{}^2$ 無法直接寫成 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的形式，卻可以由 $h_{n-1}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$ 與 $h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$ 相減而得，也就是說，$F_n{}^2$ 可用 $h_n(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta)$ 的線性組合加以表達。

二、費氏數列相鄰三項乘積

(一) $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=$？

$$F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\cdot[(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})-(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha+\beta)]\cdot\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot[(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})+(-1)^n]\cdot\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{[(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})\cdot(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})+(-1)^n\cdot(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})]}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{[(\alpha^{3n-3}-\beta^{3n-3})-(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+(-1)^n\cdot(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})]}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{5}[F_{3n-3}-(-1)^n F_{n+1}+(-1)^n F_{n-2}]=\frac{1}{5}[F_{3n-3}+(-1)^n(F_{n-2}-F_{n+1})]$$

$$=\frac{1}{5}[F_{3n-3}+(-1)^n(F_n-F_{n-1}-F_n-F_{n-1})]=\frac{1}{5}[F_{3n-3}+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot F_{n-1}]\text{。}$$

(二) $h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=$？

$h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=L_n(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$　　(由 $h-L$ 轉換公式)

$$=\frac{(\alpha^3)^n}{(\alpha^3-\alpha^2\beta)(\alpha^3-\alpha\beta^2)(\alpha^3-\beta^3)}+\frac{(\alpha^2\beta)^n}{(\alpha^2\beta-\alpha^3)(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)(\alpha^2\beta-\beta^3)}$$

$$+\frac{(\alpha\beta^2)^n}{(\alpha\beta^2-\alpha^3)(\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2-\beta^3)}+\frac{(\beta^3)^n}{(\beta^3-\alpha^3)(\beta^3-\alpha^2\beta)(\beta^3-\alpha\beta^2)}$$

其中，第一項的分母

$$(\alpha^3-\alpha^2\beta)(\alpha^3-\alpha\beta^2)(\alpha^3-\beta^3)=\alpha^2\cdot(\alpha-\beta)\cdot\alpha\cdot(\alpha^2-\beta^2)\cdot(\alpha^3-\beta^3)$$

$$=\alpha^3\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\cdot(\alpha-\beta)^3=\alpha^3\cdot F_1\cdot F_2\cdot F_3\cdot(\sqrt{5})^3=10\sqrt{5}\cdot\alpha^3\text{，}$$

同理，第四項的分母

$$(\beta^3-\alpha^3)(\beta^3-\alpha^2\beta)(\beta^3-\alpha\beta^2)=(\beta^3-\alpha^3)\cdot\beta\cdot(\beta^2-\alpha^2)\cdot\beta^2\cdot(\beta-\alpha)$$

$$=\beta^3\cdot\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot(\beta-\alpha)^3=\beta^3\cdot F_3\cdot F_2\cdot F_1\cdot(-\sqrt{5})^3=-10\sqrt{5}\cdot\beta^3$$

第二項的分母

$$(\alpha^2\beta-\alpha^3)(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)(\alpha^2\beta-\beta^3)=\alpha^2\cdot(\beta-\alpha)\cdot\alpha\beta\cdot(\alpha-\beta)\cdot\beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)$$

$$=-\alpha^3\beta^2\cdot(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha^2-\beta^2)=-(\alpha\beta)^2\cdot\alpha\cdot(\alpha-\beta)^3\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$=-(-1)^2\cdot\alpha\cdot(\sqrt{5})^3\cdot F_2=-5\sqrt{5}\cdot\alpha\text{，}$$

同理，第三項的分母

$$(\alpha\beta^2-\alpha^3)(\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2-\beta^3)=\alpha\cdot(\beta^2-\alpha^2)\cdot\alpha\beta\cdot(\beta-\alpha)\cdot\beta^2\cdot(\alpha-\beta)$$

$$=\alpha^2\beta^3\cdot(\alpha^2-\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)^2=(\alpha\beta)^2\cdot\beta\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\cdot(\alpha-\beta)^3$$

$$=(-1)^2\cdot\beta\cdot F_2\cdot(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}\cdot\beta$$

於是，第一項與第四項之和為

$$\frac{(\alpha^3)^n}{(\alpha^3-\alpha^2\beta)(\alpha^3-\alpha\beta^2)(\alpha^3-\beta^3)}+\frac{(\beta^3)^n}{(\beta^3-\alpha^3)(\beta^3-\alpha^2\beta)(\beta^3-\alpha\beta^2)}$$

$$=\frac{(\alpha^3)^n}{10\sqrt{5}\cdot\alpha^3}+\frac{(\beta^3)^n}{-10\sqrt{5}\cdot\beta^3}=\frac{1}{10\sqrt{5}}\cdot(\alpha^{3n-3}-\beta^{3n-3})=\frac{1}{10}\cdot\frac{\alpha^{3n-3}-\beta^{3n-3}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{10}\cdot F_{3n-3}$$

而第二項與第三項之和為

$$\frac{(\alpha^2\beta)^n}{(\alpha^2\beta-\alpha^3)(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)(\alpha^2\beta-\beta^3)}+\frac{(\alpha\beta^2)^n}{(\alpha\beta^2-\alpha^3)(\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2-\beta^3)}$$

$$=\frac{(\alpha^2\beta)^n}{-5\sqrt{5}\alpha}+\frac{(\alpha\beta^2)^n}{5\sqrt{5}\beta}=-\frac{1}{5}\cdot(\alpha\beta)^n\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=-\frac{1}{5}\cdot(-1)^n\cdot F_{n-1}=\frac{1}{5}\cdot(-1)^{n+1}\cdot F_{n-1}$$

至此，可得 $h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=L_n(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$

$$=\frac{1}{10}\cdot F_{3n-3}+\frac{1}{5}\cdot(-1)^{n+1}\cdot F_{n-1}=\frac{1}{10}\cdot[F_{3n-3}+2\cdot(-1)^{n+1}\cdot F_{n-1}]$$

(三) $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}$ 與 $h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$

一方面，$F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=\frac{1}{5}\cdot[F_{3n-3}+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot F_{n-1}]$，

另一方面，$h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)=\frac{1}{10}\cdot[F_{3n-3}+2\cdot(-1)^{n+1}\cdot F_{n-1}]$，

至此，證明了 $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=2\cdot h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$，其中 $n\geq 3$。

也就是說，費氏數列相鄰三項的乘積，可表示成完全齊次對稱多項式的 2 倍。

三、費氏數列相鄰數項的乘積

觀察 $F_n\cdot F_{n-1}=h_{n-2}(\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2)$ 與 $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}=2\cdot h_{n-3}(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3)$ ，形式上，費氏數列相鄰 k 項的乘積，是完全齊次對稱多項式 h_{n-k} 的某個倍數，而其中的變數，從 α^k 開始，到 β^k 結束， α 的次方遞減， β 的次方遞增。

由這樣的規律，可以作出推測：

$F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}\cdot F_{n-3}=p\cdot h_{n-4}(\alpha^4,\alpha^3\beta,\alpha^2\beta^2,\alpha\beta^3,\beta^4)$，其中 p 為一待定之常數。或許有讀者會猜測 $p=4-1=3$ ，實際上，可用 $n=5$ 投石問路：

一方面， $F_5\cdot F_4\cdot F_3\cdot F_2=5\cdot 3\cdot 2\cdot 1=30$ ，

另一方面，$h_1(\alpha^4,\alpha^3\beta,\alpha^2\beta^2,\alpha\beta^3,\beta^4)=\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4=\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}=F_5=5$，

比較之後，可得 $30=5p$ ，即 $p=6$ 。

同樣地，可以推測：

$F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}\cdot F_{n-3}\cdot F_{n-4}=q\cdot h_{n-5}(\alpha^5,\alpha^4\beta,\alpha^3\beta^2,\alpha^2\beta^3,\alpha\beta^4,\beta^5)$，其中 q 為一待定之常數。

或許有讀者會猜測 $q=(5-1)!=4!=24$ ，實際上，也可用 $n=6$ 作測試：

一方面， $F_6\cdot F_5\cdot F_4\cdot F_3\cdot F_2=8\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1=240$ ，

另一方面， $h_1(\alpha^5,\alpha^4\beta,\alpha^3\beta^2,\alpha^2\beta^3,\alpha\beta^4,\beta^5)$

$$=\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\beta^5=\frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha-\beta}=F_6=8 ,$$

比較之後，可得 $240=8q$ ，即 $q=30$ 。

在上述的兩個例子中， p 與 q 的規律是什麼呢？

其實，在在 $F_n\cdot F_{n-1}\cdot F_{n-2}\cdot F_{n-3}\cdot F_{n-4}=q\cdot h_{n-5}(\alpha^5,\alpha^4\beta,\alpha^3\beta^2,\alpha^2\beta^3,\alpha\beta^4,\beta^5)$ 之中，只要 q 為一恆定之常數，即無論 n 如何變化，q 恆為一定值。那麼，只要看當 $n=6$ 時，就可以確定 q 的值：

$$F_6\cdot F_5\cdot F_4\cdot F_3\cdot F_2=q\cdot h_1(\alpha^5,\alpha^4\beta,\alpha^3\beta^2,\alpha^2\beta^3,\alpha\beta^4,\beta^5)=q\cdot F_6\Rightarrow q=F_5\cdot F_4\cdot F_3\cdot F_2\cdot F_1$$

如此，則原式可改寫為：$\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot F_{n-3} \cdot F_{n-4}}{F_5 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1} = h_{n-5}(\alpha^5, \alpha^4\beta, \alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^3, \alpha\beta^4, \beta^5)$

這是一個漂亮的等式！

至此，可提出一般化的猜想：

$\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot \cdots \cdot F_{n-k+1}}{F_k \cdot F_{k-1} \cdot \cdots \cdot F_1} = h_{n-k}(\alpha^k, \alpha^{k-1}\beta, \alpha^{k-2}\beta^2, \cdots, \alpha^2\beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}, \beta^k)$，其中 $n \ge k \ge 2$。

對於此一猜想，目前已證明了當 $k=2$ 與 $k=3$ 時，猜想皆成立，即

$\dfrac{F_n \cdot F_{n-1}}{F_2 \cdot F_1} = h_{n-2}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$ 與 $\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{F_3 \cdot F_2 \cdot F_1} = h_{n-3}(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3)$ 皆成立。各位親愛的讀者，您願意嘗試一般情形的證明嗎？

肆、總結：

回顧本文的工作：先由「類比」的想法，猜測 ${F_n}^2$ 與 $h_n(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$ 有關，將各自的展開式寫開之後，找出了具體的關係式：

$F_n \cdot F_{n-1} = h_{n-2}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$ 與 ${F_n}^2 = h_{n-1}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) - h_{n-2}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$，其中 $n \ge 2$。

接著，探索費氏數列相鄰三項的乘積 $F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ 與完全齊次對稱多項式的關係，證明了 $F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} = 2 \cdot h_{n-3}(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3)$，其中 $n \ge 3$。

進一步地，猜想將費氏數列相鄰數項乘積用完全齊次對稱多項式表示的一般公式為：

$\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot \cdots \cdot F_{n-k+1}}{F_k \cdot F_{k-1} \cdot \cdots \cdot F_1} = h_{n-k}(\alpha^k, \alpha^{k-1}\beta, \alpha^{k-2}\beta^2, \cdots, \alpha^2\beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}, \beta^k)$，其中 $n \ge k \ge 2$。

參考資料：

1. 陳建燁，推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)，高中數學學科中心電子報第 114 期，2016 年 9 月，P1,3,4,8,11,12。