從費氏數列到黃金矩形

李政憲 [1]* 陳柏昇 [2] 馮鈞羿 [2]
[1]新北市立林口國民中學
[2]臺北市立建國高級中學

筆者於科教月刊 345 期曾撰寫「摺紙中學數學」之名片試金石一文，並將名片拼組正立方體課程設計「巧拼連方塊」課程，施作於本校自然科學研究社與本校及台北市學校營隊，且將相關施作心得投稿 HPM 通訊第十六卷第二、三期合刊[註 1]，將日常生活中常見的名片拼組後發展學生的創造力與團隊合作，頗受學生好評；而關於名片的延伸課程更設計「摺出黃金/白銀比」課程，結合教具與實作作品陸續施作於本校、新北市碧華國中、桃園縣石門國中與南崁國中資優班與假日充實課程（如圖 1~圖 2），調整難易度與廠商合作出版「財源滾滾包」教具包（如圖 3），並於科教館今年度所舉辦之「科學玩意節」進行分享（如圖 4），提供更多現場老師與家長、同學參考使用。茲將相關施作心得與延伸思考內容撰文於後，提供各位讀者參考。

此課程一開始以常聽到的費氏數列介紹起，說明費氏數列與黃金比例的關係。透過簡報的設計（如圖 5），使學生理解斐波那契兔子產生前後項的關聯性，待學生

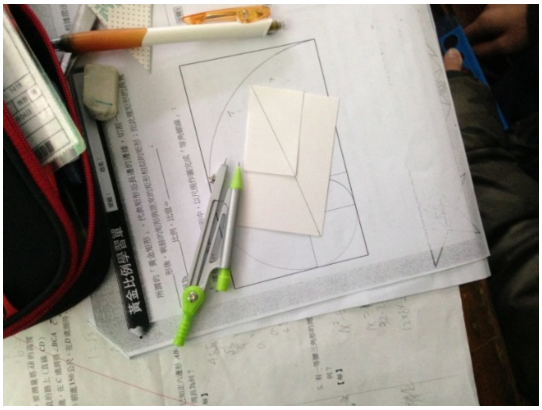

圖 1、「黃金比例」學習單暨學生作品

圖 2、「影印紙拼組十二面體」實作作品

推導出 f(n)=f(n-1)+f(n-2)（即第 n 個月的兔子數=第 n-1 個月的兔子數+第 n-2 個月的兔子數）的結果後，加上首項與第二項為 1 的條件，即可透過降階看出費氏數列與巴斯卡三角形的關聯性（如圖 6），並藉

*為本文通訊作者

圖 3、「財源滾滾包」教具包海報內容

圖 4、科教館「科學玩意節」榮耀舞台分享

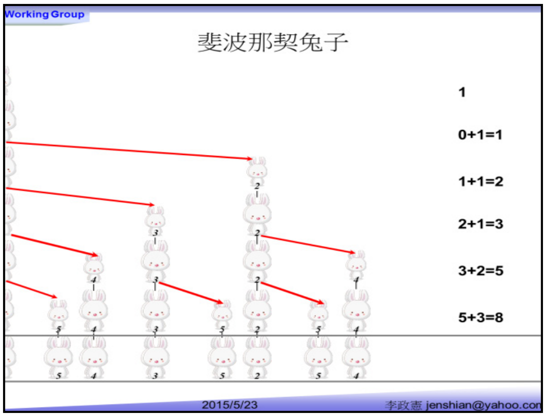

圖 5、斐波那契兔子前後項觀察

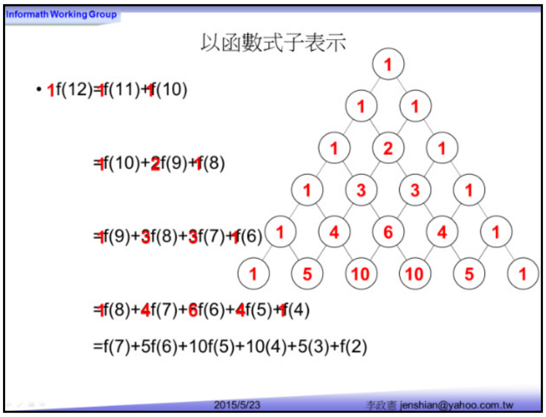

圖 6、費氏數列與巴斯卡三角

由教師提出費氏數列的通項表達式$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ [註 2]，理解當 n 趨近無限大時，費氏數列的一般項會趨近於 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，可視為後項為前項的 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 倍的數列，便可讓學生看到費氏數列與黃金比例的關聯性。

接下來教師可以透過圖形，接著說明費氏數列與正方形拼貼的關聯性，從邊長為 1、1 的正方形逐漸向外拼貼（如圖 7），並觀察面積與邊長關係：$F(1)^2+F(2)^2+\cdots\cdots+F(n-1)^2=F(n)\times F(n-1)$（如圖 8），接著觀察前後項的比值為一個全部由 1 組成的連分數（如圖 9），最後可以透過四分之一圓的連續繪製，畫出費氏數列螺旋（如圖 10）。

而在學生有了費氏數列的基本概念後，接下來要進行的是黃金比例 Φ 的計算，此處教師不妨可以透過黃金矩形的切割（如圖 11）與正五角星的繪製（如圖 12，可藉由角度相同則邊長成比例說明）的相似關係，探討並比較方程式 $x^2-x-1=0$ 所產

生的方式。

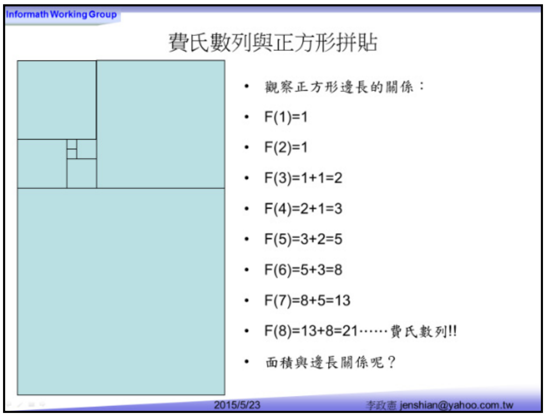

圖 7、正方形拼貼費氏數列

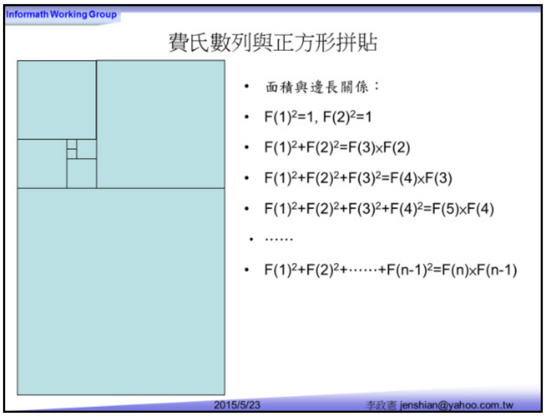

圖 8、費氏數列面積和與第 n 項關聯性

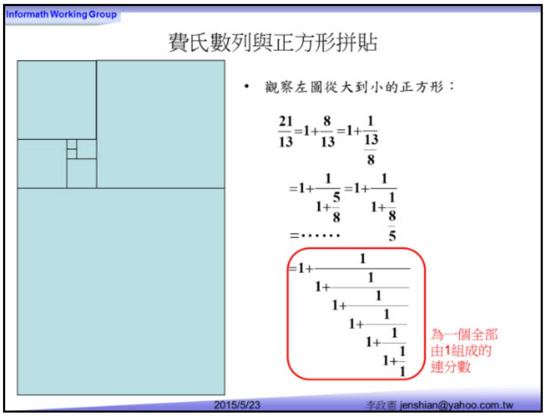

圖 9、費氏數列與連分數

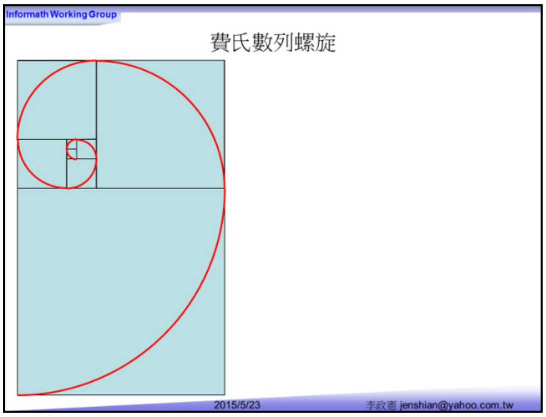

圖 10、費氏數列螺旋示意圖

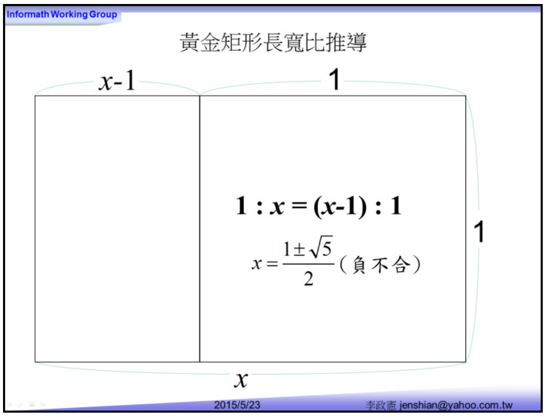

圖 11、黃金矩形切割與計算

而每每進行完此課程後，筆者總會提出一個開放性的思考題：「如何以其他方式，證明名片紙的長寬比接近黃金比例？」三年前於本校資優班進行此課程時，經由當初八年級馮鈞羿同學[註 3] 所提供的十七種證明方式，讓上課的同學與老師們頗為驚豔。茲經由今年高一的陳柏昇[註 4] 整理，分別分類說明如下：

一、拼組法：

在說明這類方法前，需要先理解所謂

的黃金三角形:即腰長與底邊呈現黃金比例的等腰三角形。我們可以在正五角星中發現這兩種三角形，內角分別為 36-72-72 度與 36-36-108 度(參考圖 12)。是故我們便可以透過拼組的方式，製造出黃金三角形，進而解釋名片紙的邊長為黃金比例。以下舉出一些例子：

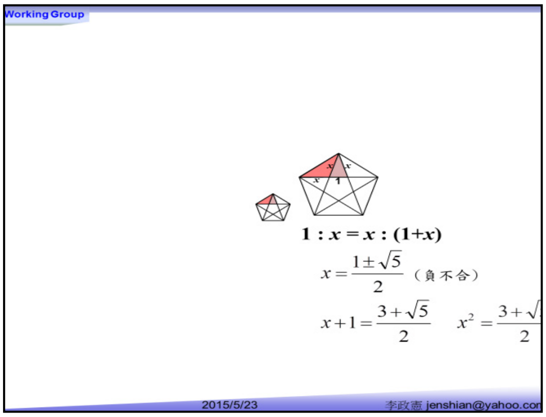

圖 12、正五角星邊長比例計算

以下的證明以名片紙長邊長作為 x、短邊長作為 1，

方法(1)

用 3 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位 1(如圖 13)，此時有一個兩腰長為 x、底邊為 1 的等腰三角形 ACB 產生，將兩個基本單位 1 鏡射重疊(如圖 14)；接著另取三張名片，再製作做一個基本單位 1，並以疊合方式檢驗$\angle ACA'$與基本單位 1 的底角是否相同。若$\angle ACA'(= 2\angle ACB) = \angle CBA = \angle CAB$，則三角形內角度數比為$1:2:2$，即三內角為 36、72 與 72 度，故 $x = \varphi$。

我們接著利用類似的概念來說明方法(2)：

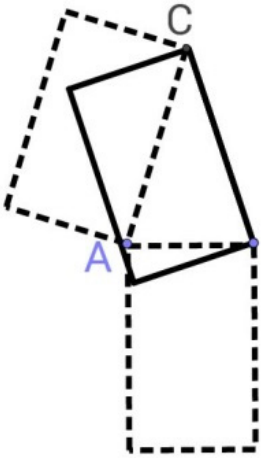

圖 13、基本單位 1

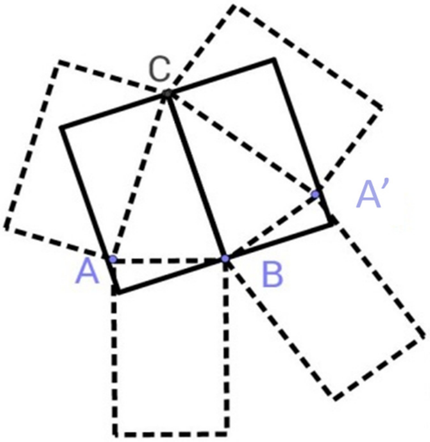

圖 14

方法(2)

用 5 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位 2(如圖 15)，將兩個基本單位 2 鏡射重疊（如圖 16）；利用方法(1)的疊合檢驗方法，確認基本單位 2 的三內角為 36、72、72 度，便能將$\overline{AB} = x$；$\overline{AC} = \overline{BC} = x + 1$代入得到 $x:(x+1) = 1:\varphi$，簡化得到 $x = \varphi$。

即可證明其長寬比為黃金比例。

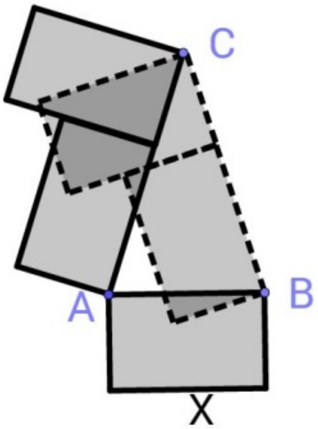

圖 15、基本單位 2

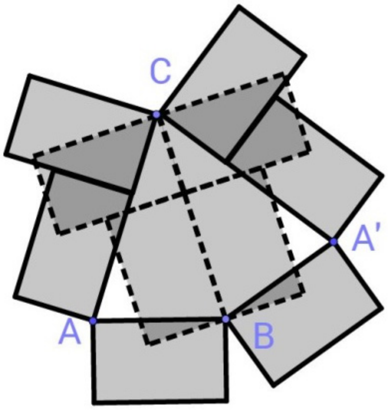

圖 16

方法(3)

用 3 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位 3（如圖 17）此時有一個兩腰長為 1、底邊為 x 的等腰特徵三角形 ACB 產生，將三個基本單位 3 重疊，使三個特徵三角形底角合併（如圖 18）；再製作一個基本單位 3，並將此單位的頂角對至重疊後的 $\angle ABC''$，若

$\angle ABC'' = 3\angle ABC = \angle ACB$，

則三角形內角度數比為 1:1:3，即三內角為 36、36 與 108 度，故 $x=\varphi$。

方法(4)

仿照方法(3)，用 4 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位 4（如圖 19），將三個基本單位 4 重疊（同圖 19）；利用方法(3)的疊合檢驗方法，得到 $\overline{BC}:\overline{AB} = 1:\varphi$ 將 $\overline{AC} = \overline{BC} = x$；$\overline{AB} = x + 1$ 代入得 $x:(x+1) = 1:\varphi$，簡化得到 $x = \varphi$。

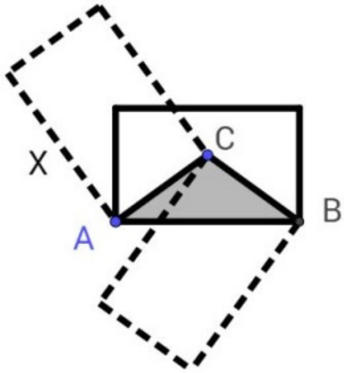

圖 17、基本單位 3

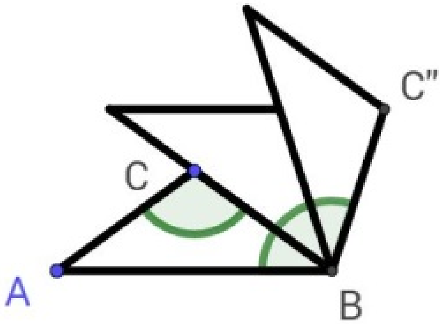

圖 18

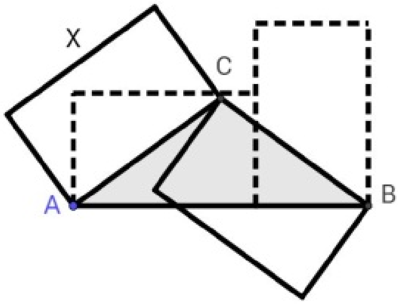

圖 19、基本單位 4

以上四種方法，皆是利用黃金三角形內角的特殊關係來作說明，以此類推，只要可以生成黃金三角形，便可以透過黃金三角形角度的關係作驗證，只是原則上多為這些方法的延伸，於此不再贅述。進一步我們再透過 5 個 72 度角或 10 個 36 度角便可以組成周角 360 度的概念，再說明接下來的四種證明方法：

首先是 36-72-72 的黃金三角形：

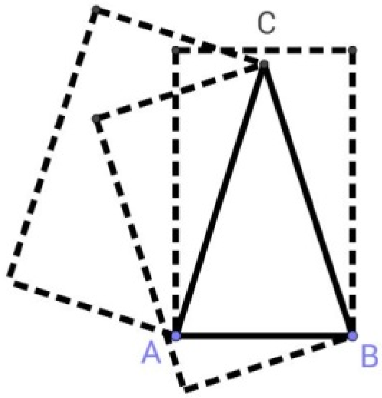

圖 20、基本單位 5

方法(5)

先以 3 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組做做成基本單位 5（如圖 20），可以發現特徵三角形 ACB，再將五組基本單位 5 重疊（如圖 21）；若此五組基本單位 5 疊合後 5 個特徵三角形的底角恰可繞一周角，即 5∠CBA=360°，則三角形內角度數為 36、72 與 72 度，故 x=φ

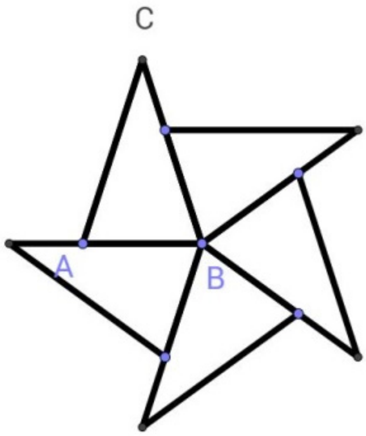

圖 21

方法(6)

用 5 張名片紙以頂點對頂點的方式拼組做做成基本單位 6（如圖 22），仿照方法(5)將五組基本單位 6 繞一圈重疊（同圖 21），可得 5∠CBA=360°，故三角形內角度數為 36、72 與 72 度，即$(x+1)=x\varphi\ \rightarrow x=\varphi$

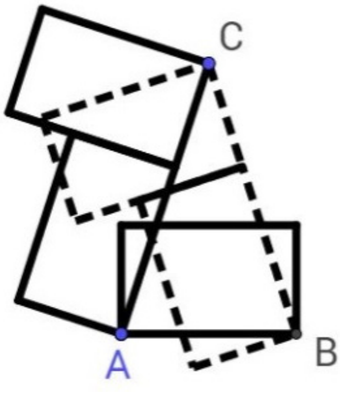

圖 22、基本單位 6

接著我們再用到方法(3)、(4)的基本單位，也就是 36-36-108 的黃金三角形來圍成周角 360 度。

方法(7)

將十個基本單位3重疊放置，使特徵三角形的底角合併(如圖23)，若 $10\angle CBA=360°$，則三角形內角度數為36、36與108度，故 $x=\varphi$。

方法(8)

將十個基本單位4重疊放置，使特徵三角形的底角合併（如圖23），

同上法可得 $10\angle CBA=360°$，故 $(x+1)=x\varphi \rightarrow x=\varphi$ 。

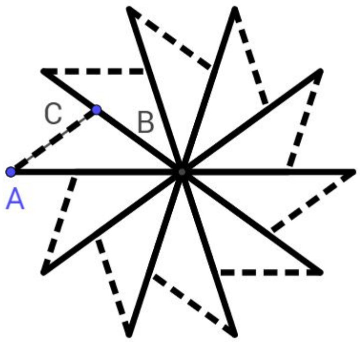

圖 23

接著我們再利用黃金三角形，組成正五邊形與正十邊形：

方法(9)

用3張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位7（如圖24）可以找到特徵三角形ACB，將五組基本單位7重疊放置，使特徵三角形重疊成五邊形(如圖25)；由於正五邊形邊長(矩形短邊)與對角線(矩形長邊)之比例為黃金比例，故 $x=\varphi$。

方法(10)

用4張名片紙以頂點對頂點的方式拼組成基本單位8（如圖26），將五組基本單位8重疊放置，使特徵三角形重疊成五邊形（同圖25）；同樣藉由正五邊形邊長(矩形短邊)與對角線(矩形長邊)之比例為黃金比例，故 $(x+1)=x\varphi$，簡化得 $x=\varphi$。

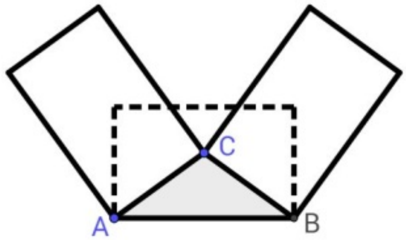

圖 24、基本單位 7

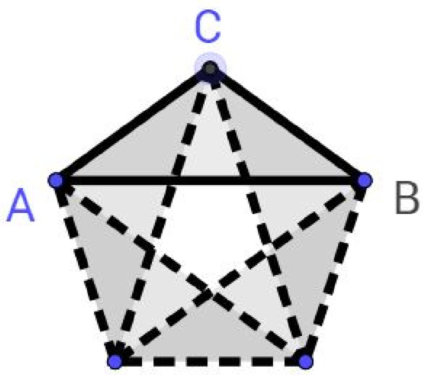

圖 25

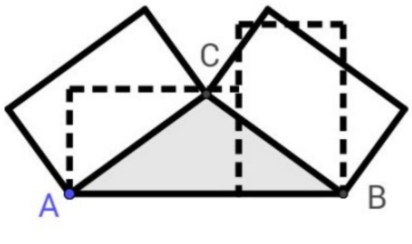

圖 26、基本單位 8

接下來我們再用36-72-72的黃金三角形組成的正十邊形來作說明，在此我們會用到方法(1)、(2)的基本單位：

方法(11)

將十組基本單位 1 重疊放置，使特徵三角形頂角合併（如圖 27），由於正十邊形之外接圓半徑（矩形長邊）與邊長（矩形短邊）之比例為黃金比例，故$x=\varphi$。

方法(12)

將十組基本單位 2 重疊放置，使特徵三角形頂角合併（如圖 27），同方法(11)可得：$(x+1)=x\varphi \rightarrow x=\varphi$。

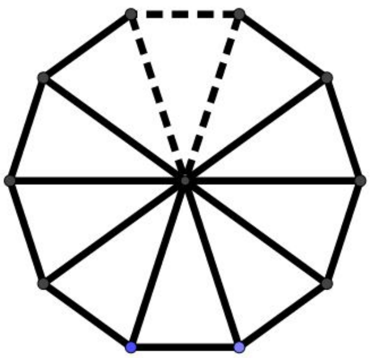

圖 27

至此我們共計 12 種拼組式的證明方式。

二、相似法

方法(1)

步驟(1)將名片直向擺放（如圖 28-1），摺出左下方底角∠A 的角平分線，交右側邊於 B 點，過 B 摺出水平線交左側於 C 點（如圖 28-2）。

步驟(2)摺出對角線$\overline{AD}$與過$\overline{CB}$水平線交於 E 點（如圖 28-3）

步驟(3)過 E 摺出鉛直線交短邊於 F、G 兩點（如圖 28-4）

步驟(4)沿$\overline{FC}$對摺，若 H 點與 E 點重合，則名片紙即為黃金比例（如圖 28-5）

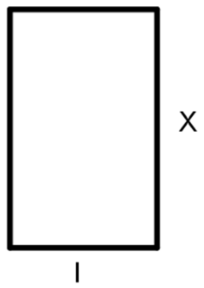

圖 28-1

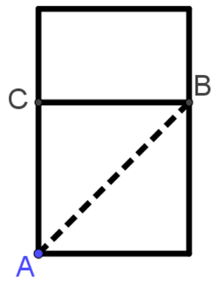

圖 28-2

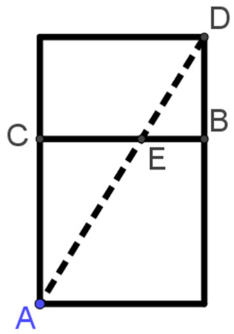

圖 28-3

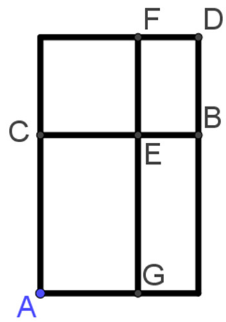

圖 28-4

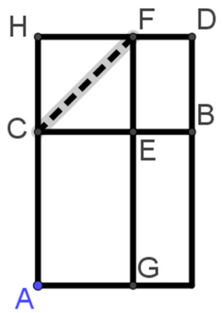

圖 28-5

說明：在圖 28-3 與圖 28-5，因為$\overline{CB}//\overline{DH}$，由平行線截等比例線段與矩形對邊等長可得知
$1:\overline{FG}=\overline{DH}:\overline{AH}=\overline{CE}:\overline{AC}=\overline{CE}:\overline{EG}$，即$\overline{CE}\times\overline{FG}=1\times\overline{EG}$ 簡化與代入可得$\overline{CE}=\frac{1}{x}$，且$\overline{CH}=x-1$，若 E 點和 H 點重合，即$x-1=\frac{1}{x}$ 整理可得$x^2-x-1=0$，即$x=\varphi$。

方法(2)

如圖 29，將 4 張名片如圖方式擺放，若 A、C、B 共線，我們便可以透過平行線截比例線段性質來證明，即$\overline{AC}:\overline{AB}=1:x=x:(x+1)$，簡化得$x^2-x-1=0$，故 $x=\varphi$。

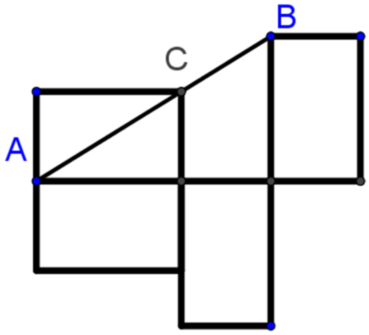

圖 29

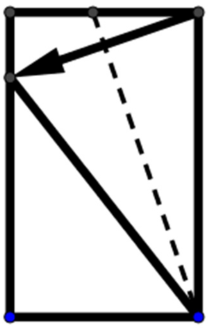

圖 30-1

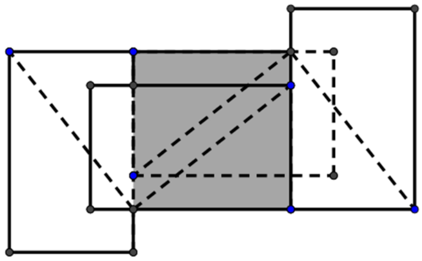

圖 30-2

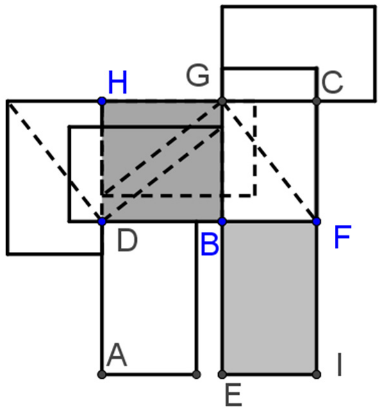

圖 30-3

方法(3)

步驟(1)如上圖 30-1，把名片紙直向擺放，將右上頂點摺至長邊上，且摺線（如圖 30-1 虛線）通過右下方頂點，並將新點與右下方頂點連線（如圖 30-1 實線），製作 4 張後重疊（如圖 30-2），此時中央會有一正方形。

步驟(2)再外加 3 張名片紙（如圖 30-3），若 A、B、C 共線，則名片紙即為黃金比例。

說明：先由畢氏定理得知$\overline{BD}=\sqrt{x^2-1}$，若 ABC 共線，$\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{AE}:\overline{BE}$，所以$\overline{DB}\times\overline{GB}=\overline{BE}\times\overline{BF}\rightarrow\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2-1}=x\times 1\rightarrow x^2-x-1=0\rightarrow x=\varphi$，至此共 3 種證明方法。

三、畢氏定理

步驟(1)摺出左下角的角平分線完成等腰直角三角形，即 A 點至左下頂點距離為 1（如圖 31-2）。

步驟(2)摺出 A 點與左下方頂點之中垂線，此時 A 到此中垂線的距離為$\frac{1}{2}$（如圖 31-3、36-4）

步驟(3)將右上 C 點摺至底邊上，若與 A 點重合，即為黃金比例（如圖 31-4）

說明：若步驟(3)成立，則$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=(x-\frac{1}{2})$。在三角形 ABD 中，$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$ 即 $(x-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2+1^2$，化簡得 $x^2-x-1=0$，即 $x=\varphi$。

圖 31-1

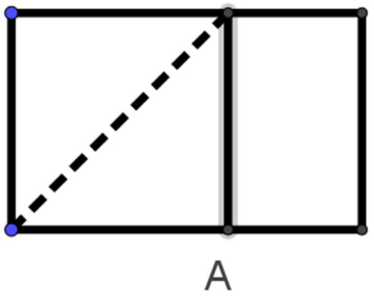

圖 31-2

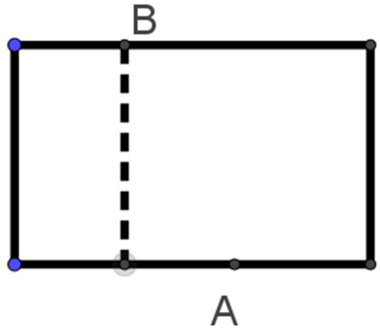

圖 31-3

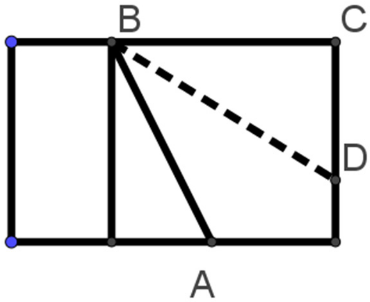

圖 31-4

四、其他

步驟(1)將兩張名片紙並排（如圖 32-1），此時$\overline{\mathrm{AB}}=x+1$

步驟(2)找出$\overline{\mathrm{AB}}$中點（如圖 32-2），再以 B 為圓心，$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}$ 為半徑畫圓，與過 B 之 $\overline{\mathrm{AB}}$ 垂線交於 E（如圖 32-3）

步驟(3)分別以 A 為圓心，x為半徑畫圓；以 E 為圓心，$\overline{\mathrm{BE}}$為半徑畫圓。此時兩圓會與$\overline{\mathrm{AE}}$交於同一點 C。

說明：$\frac{x+1}{2}+x=\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=$

$\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BE}}^2}=\sqrt{(x+1)^2+(\frac{x+1}{2})^2}$，

化簡得$x^2-x-1=0$，即 $x=\varphi$

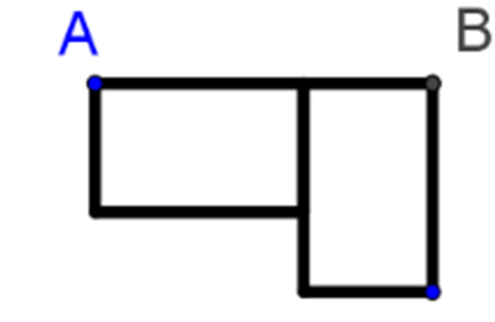

圖 32-1

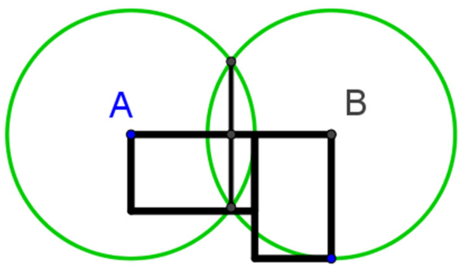

圖 32-2

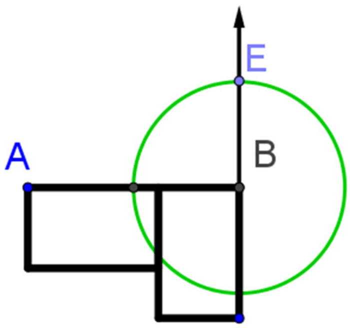

圖 32-3

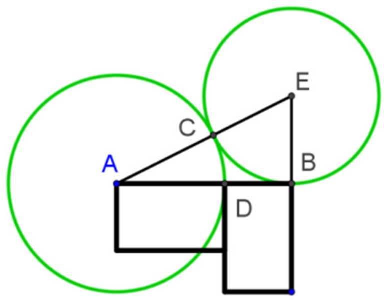

圖 32-4

至此我們整理了全部共 17 種的證明方式，其中前十二種使用了疊合的方式，利用重疊觀察比較的直觀方式，不需摺紙，只要有足夠的黃金比例名片紙就可以完成拼組與說明；接下來的五種分別利用了中學所學的相似、勾股定理等數學知識，搭配摺紙或尺規作圖，分別進行不同方式的說明與應用，十分適合作為老師與同學們在進行這些單元的教學或延伸學習時，值得一起進行討論與思考的教材。

備註

[註 1] 文章參考網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol16.htm

[註 2] 此公式因推導較為複雜，建議教師可視學生程度或補充等比數列課程後再作討論，此處不妨直接告知或省略不介紹均可。

[註 3] 林口國中第四屆數理資優班同學，目前就讀於建國中學

[註 4] 林口國中第三屆數理資優班同學，目前就讀於建國中學