中學生通訊解題第 100-101 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10001

八位數 20□□□□13 能被 2013 整除，求此八位數。

簡答：20132013，20333313，20534613，20735913 ，20937213

參考解答：

設

$A=\overline{20abcd13}=20000013+\overline{abcd}\times 100=9935\times 2013+858+\overline{abcd}\times 100$

可設 $858+\overline{abcd}\times 100=2013k$，則 k 的個位數為 6。

經檢驗得 $k=66,166,266,366,466$

此八位數為 20132013，20333313，20534613，20735913 ，20937213。

【評析】

本題屬於偏易的數論題，同學僅需運用因數分解，加上細心的計算，應不難獲得正解。

問題編號
10002

設 x 的實係數二次方程式 $ax^2-14x-7=0$ 有實根 α,β，而 y 的實係數二次方程式 $y^2-2(b-1)y+b^2-2b=0$ 有實根 γ,δ，且 $-2\le\gamma<\delta\le 4$，又已知 $\dfrac{2}{\alpha+\beta}-\dfrac{6}{\alpha\beta}+2(2\gamma-\delta^2)+14=0$，求實數 a 的範圍。

簡答：$-7\le a\le 10$ 且 $a\ne 0$

參考解答：

因為 $ax^2-14x-7=0$ 為二次方程式，所以 $a\ne 0$ ------------(a)

因為 $ax^2-14x-7=0$ 有實根，故判別式 $14^2-4a(-7)\ge 0$，

則 $a\ge -7$ ------------(b)

將 $y^2-2(b-1)y+b^2-2b=0$ 作十字交乘可配成 $(y-b)\big(y-(b-2)\big)=0$，則其兩根為 $b,b-2$，而 $\gamma<\delta$，故 $\begin{cases}\gamma=b-2\\ \delta=b\end{cases}$，代入 $-2\le\gamma<\delta\le 4$ 可得 $-2\le b-2<b\le 4$，則 $0\le b\le 4$ ------------(*)

由根與係數關係得 $\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{14}{a}\\ \alpha\beta=-\dfrac{7}{a}\end{cases}$，又

$\begin{cases}\gamma=b-2\\ \delta=b\end{cases}$，

代入 $\dfrac{2}{\alpha+\beta}-\dfrac{6}{\alpha\beta}+2(2\gamma-\delta^2)+14=0$ 中得

$\dfrac{a}{7}-(-\dfrac{6}{7}a)+2\left(2(b-2)-b^2\right)+14=0$，

整理後得 $a=2b^2-4b-6=2(b-1)^2-8$

又由 (*) 知 $0\le b\le 4$，故 $-8\le a\le 10$ ------------(c)

最後，由(a)、(b)、(c)取交集可得實數 a 的範圍為 $-7\le a\le 10$ 且 $a\ne 0$。

【解題評註】

此題為雙變數之二次不等式問題，並以二次方程式的形式呈現，算是比較少見的題型。要能正確解答此題，除了基本的十字交乘外，還需要比較根與係數關係，並且限定範圍討論二次函數的極值，更要細心地討論判別式。

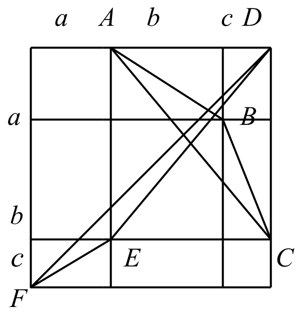
問題編號 10003

已知正數 a, b, c 滿足 $a+b+c=1$，試求 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 之最小值？

簡答：$\sqrt{2}$

參考解答：

構造一個邊長為 $a+b+c=1$ 的正方形：



$\because$ $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$，$\overline{EF}=\sqrt{c^2+a^2}$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{EF}\ge\overline{CA}+\overline{EF}=\overline{DE}+\overline{EF}\ge\overline{DF}=\sqrt{2}$。

【解題重點】

本題看其來像是代數不等式的問題，來函中，有些同學用了"柯西不等式"、"平均不等式".....等各種不等式解題。但從幾何角度來看，本題試求三條線段和的最小值，我們可以構造一個邊長為 $a+b+c$ 的正方形完成解題。

問題編號 10004

一張正方形紙片內有 1000 個點，這些點及正方形的頂點皆任意 3 點不共線。

現在將這 1000 個點與正方形頂點間連一些線段，將正方形全部分成小三角形（以所連線段及正方形的邊為邊，且連線段除端點外，兩兩無公共點）。

試問一共連有幾條線段？一共得到幾個三

角形？

簡答：共有 3001 條線段，共有 2002 個三角形。

參考解答：

設一共連有 x 條線段，一共得到 y 個三角形。

(1)首先注意到 y 個三角形的內角總和為 $y\times180^\circ$。

又所得 y 個三角形中，以 1000 內點為頂點的所有內角之和為 $1000\times360^\circ$；以正方形的頂點為頂點的所有內角之和為 $4\times90^\circ$。

因此，$y\times180^\circ=1000\times360^\circ+4\times90^\circ$。可解得 $y=2002$。

(2)因每個三角形有三條邊，y 個三角形共有 $3y$ 條邊。

又每個線段為兩個三角形的公共邊，而正方形的每條邊均為三角形的一邊，

於是 $3y=2x+4$，解得 $x=\frac{3}{2}y-2=3001$。

【評析】

1.本題使用到了"算兩次"的想法，將三角形的總內角和運用兩種不同算法表示，而求出三角形之個數，進而觀察共用邊的狀況，求得線段數。

2.本題亦有同學使用<u>尤拉公式</u>計算得出解答，值得鼓勵。

3.本題部分同學採用的方法是由點數找出規律，進而得出答案，可惜的是未證明此規律是正確的。觀察出的結果僅是猜測，需要加上證明才完整。

問題編號
10005

試求

$$\frac{\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}}}{\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}}$$ 的

值。

簡答：$\sqrt{2}+1$

參考解答：

令

$$S=\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}}$$

$$T=\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}$$

$$\sqrt{2}S=\sqrt{2}(\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}})=\sum_{n=1}^{9999}\sqrt{200+2\sqrt{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{9999}(\sqrt{100+\sqrt{10000-n}}+\sqrt{100-\sqrt{10000-n}})$$

$$=\sum_{n=1}^{9999}(\sqrt{100+\sqrt{n}}+\sqrt{100-\sqrt{n}})=S+T$$

即原式 $=\frac{S}{T}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$。

【另解】

亦可令

$$p=\frac{\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}}}{\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}}$$

$$p+1=\frac{\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}}}{\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}}+1$$

$$=\frac{(\sqrt{100+\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{1}})+(\sqrt{100+\sqrt{2}}+\sqrt{100-\sqrt{2}})\cdots\sqrt{100+\sqrt{9999}}+\sqrt{100-\sqrt{9999}}}{\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{100+\sqrt{9999}}+\sqrt{100+\sqrt{9998}}+\cdots\sqrt{100+\sqrt{1}})}{\sqrt{100-\sqrt{1}}+\sqrt{100-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{100-\sqrt{9999}}}=\sqrt{2}P$$

故 $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

【評析】

本題屬於數論問題，如果能充分運用根式與完全平方式相關性質，可以適度簡化計算過程。

問題編號
10101

已知 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$。設 a, b, n 為正整數，且 $a\le b$，$n<14$，

試求出 $a^2+b^2=n!$ 的所有解。

簡答：共有兩組解：$n=2$，$a=b=1$；$n=6$，$a=12$，$b=24$

參考解答：

$n=1$，無解。

$n=2$ 時，有一組解 $a=b=1$

若 $n\ge 3$，則 $a^2+b^2=n!\equiv0\ (\text{mod}3)$，

由於平方數≡0 或 1（mod3），因此 $a^2\equiv b^2\equiv 0\ (\text{mod}3)$，

$\Rightarrow 3|a$，$3|b$，$3^2\,|\,a^2+b^2=n!$，於是 $n\ge 6$，

若 $n=6$，設 $a=3a_1$，$b=3b_1$，則 $a_1^2+b_1^2=2^4\times5$，然而知 a_1，b_1同為偶數（否則 $a_1^2+b_1^2\equiv1$ 或 2（mod4））

設 $a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$，則 $a_2^2+b_2^2=2^2\times5$，同樣得 a_2，b_2為偶數，

設 $a_2=2a_3$，$b_2=2b_3$，則 $a_3^2+b_3^2=5$，得 $a_3=1$，$b_3=2$，所以 $a=12$，$b=24$，

若 $n\ge7$，則 $a^2+b^2=n!\equiv0\ (\text{mod } 7)$，於是 $a\equiv b\equiv0\ (\text{mod } 7)$，

但當 $n<14$ 時，7^2不整除 $n!$，故此時無正

整數解，因此共有兩組解：$n=2$，$a=b=1$；$n=6$，$a=12$，$b=24$。

【解題評析】

1 .由題意 n 為正整數，$n<14$，即 $n=1,2,3,\ldots,13$，所以解此題的方法為就 n 值加以討論，求出 a，b 的所有解。

2. 方法是檢驗等號的兩邊有相同的正因數。

3. 用到的數學性質有

(1)設 t 為正整數，則 $t^2\equiv 0$ 或 $1\ (\mathrm{mod}\ 3)$

(2)設 t 為正整數，則 $t^2\equiv 0$ 或 $1\ (\mathrm{mod}\ 4)$

(3)設 t 為正整數，p 為質數，若 $p\mid t^2$，則 $p\mid t$

(4)設 a，b，c，d 為非負整數，p 為質數，若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ p)$，且 $c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ p)$， 則 $a+c\equiv b+d\ (\mathrm{mod}\ p)$

4. 此題當 $n=6$ 時，依題意必須求出 a，b 的所有解，部份同學的解法中，只寫出 $a=12$，$b=24$ 為解，但未加以說明只有一解，這是較不嚴謹之處。

5. 只以一種方法求解但求不出解，並不能以此就斷定無解，這是同學在解題時應注意的觀念。

問題編號
10102

求解方程組 $\begin{cases} x+y+\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=10 \\ (x^2+9)(y^2+4)=24xy \end{cases}$，其中 x,y 為實數。

簡答：$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

參考解答：

由原式知 $x\neq 0, y\neq 0$，原方程組化為

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{9}{x}\right)+\left(y+\dfrac{4}{y}\right)=10 \\ \left(x+\dfrac{9}{x}\right)\left(y+\dfrac{4}{y}\right)=24 \end{cases}$$

於是 $x+\dfrac{9}{x}$ 與 $y+\dfrac{4}{y}$ 可看作方程式 $t^2-10t+24=0$ 的兩根，

再由 $(t-4)(t-6)=0$，得 $t_1=4, t_2=6$

則原方程組的解有以下兩種情形：

(1) $\begin{cases} x+\dfrac{9}{x}=4 \\ y+\dfrac{4}{y}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+9=0 \\ y^2-6y+4=0 \end{cases} \Rightarrow x$ 無實數解

(2)

$$\begin{cases} x+\dfrac{9}{x}=6 \\ y+\dfrac{4}{y}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ y^2-4y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2=0 \\ (y-2)^2=0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

驗算後符合，故原方程組的解為 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$。

【解題評析】

1. 有些同學由兩數和 10 及兩數積

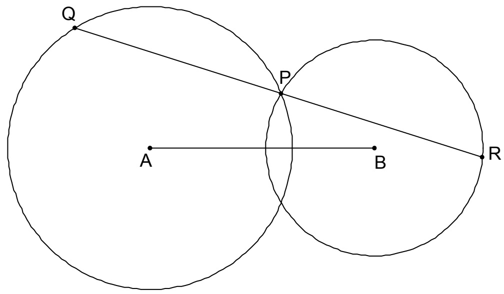
24，直接說兩數為 6 與 4，沒有計算過程，實為不妥。

2. 有些同學只用一式就算出答案也不正確，因為沒有帶到另一式驗算。

3. 有些同學把式子弄成 $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2=0$ 的情形後直接推論 $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=0,\ \sqrt{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}=0$，這是錯的推論，因為此時 $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$ 及 $\sqrt{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}$ 為複數

問題編號 10103

如圖，$\overline{AB}$=14，圓 A 半徑為 8，圓 B 半徑為 7 且兩圓相交於兩點，令其中一點為 P，一直線通過 P 點且交圓 A 於 Q 點，交圓 B 於 R 點，且 $\overline{QP}=\overline{PR}$，試求 $\overline{QP}^2$。



簡答：$\frac{377}{2}$

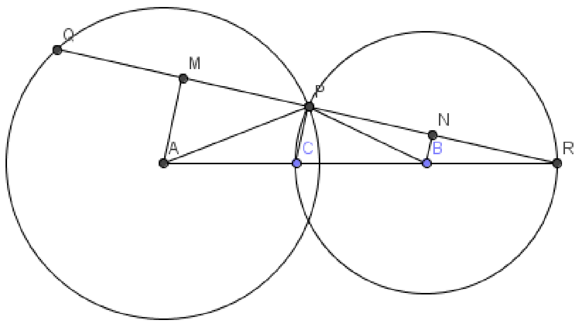
參考解答：

設 $\overline{AB}$ 與圓 B 交於 C 點，連接 $\overline{PC}$，再分別過 A,B 對 $\overline{QR}$ 做垂線交 $\overline{QR}$ 於 M,N，因為 $\overline{AC}=\overline{BC}=7$，

所以在 ΔPAB 中，由中線定理可知

$(2\overline{PC})^2+\overline{AB}^2=2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)$，

則 $\overline{PC}=\frac{\sqrt{30}}{2}$，又由梯形中線定理可知 $\overline{PC}\perp\overline{QR}$，即 $\angle CPR=90°$ 且 $\overline{CR}$ 為直徑，故 $\overline{QP}^2=\overline{PR}^2=\overline{CR}^2-\overline{CP}^2=\frac{377}{2}$。



【解題評析】

本題有 26 人參與徵答，得到 7 分滿分的有 8 人，得到 6 分的同學也是非常優秀，但是在計算上或說明上出了小錯或太過簡略，有些可惜!!另外得到 4 分的同學在利用 $\overline{AM}=3\overline{BN}$ 或利用直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交圓 B 於 R 時，沒有說明原因就直接用，這在計算過程中是很大的疏失。書寫計算與證明題如同寫篇論說文，敘事必須條理分明，論理必須理由充分，文字必須通順易讀。

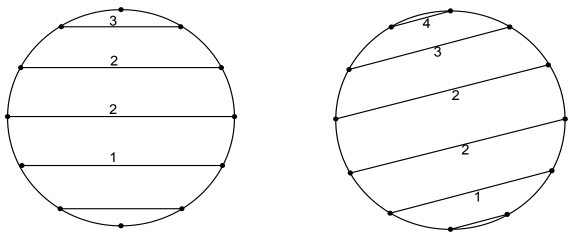
問題編號
10104

在圓周上有 12 個等分點，以這 12 個點為頂點，最多可決定幾個梯形？

簡答：120 個梯形

參考解答：

∵ 梯形之上、下底互相平行
∴ 依平形弦分類，只有下面 2 種情形：
∴ 最多可決定 6 × [(3+2+2+1) + (4+3+2+2+1)] = 120 個梯形。



【解題重點】

本題有多種計算方法，譬如：固定 1 頂點，計算所有可能的梯形個數，再乘以 12；或將梯形各邊對應的弧長，列式求整數解；或將梯形上底的長分成 4 種情形，分別計算對應的梯形個數，再求其總和；或利用梯形上下底平行的性質，分成 2 組平行弦，分別計算對應的梯形個數，再求其總和(如上圖)。

問題編號
10105

已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，若對所有 $x\in[0,1]$，恆有 $|f(x)|\le 1$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值。

簡答：17

參考解答：

$$\begin{cases} f(0)=c \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c \\ f(1)=a+b+c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=2f(1)+2f(0)-4f\left(\frac{1}{2}\right) \\ b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0) \\ c=f(0) \end{cases}$$ ，因此

$$|a|=\left|2f(1)+2f(0)-4f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le 2|f(1)|+2|f(0)|$$
$$+4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le 8$$

$$|b|=\left|4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0)\right|\le 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|$$
$$+3|f(0)|\le 8$$

$$|c|=|f(0)|\le 1$$

故 $|a|+|b|+|c|\le 17$，即最大值為 17。

發生最大值時，$|f(0)|=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=|f(1)|=1$。

取 $a=8, b=-8, c=1$，

$f(x)=8x^2-8x+1=8(x-\frac{1}{2})^2-1$時，得

$f(0)=f(1)=1, f(\frac{1}{2})=-1,$ 此時 $|f(x)|\le 1$，對

所有 $x\in[0,1]$，$|a|+|b|+|c|$有最大值 17。

【解題評析】

1. 本題主要的想法是找三個特殊點，並利用這幾點表示出 a,b,c，緊接著就可以找出 $|a|,|b|,|c|$之範圍。
2. 找出 $|a|+|b|+|c|\le 17$，必定要檢查等號是否成立，特別是 $f(x)=8x^2-8x+1$是否滿足對所有 $x\in[0,1]$，恆有 $|f(x)|\le 1$。