銀行點金術、利滾利與 e 的對話

謝其政 [1*] 謝祥化 [2]

[1] 國立臺北科技大學附設桃園農工職業學校

[2] 聯發科技無線技術開發本部

摘　要

錢經過銀行體系的運作，利用無窮等比級數及各個國家之央行所訂定的存款準備率，銀行便可點石成金。將錢存放銀行，或向銀行借錢都會衍生利息議題，決定利息的多少除利率外，採單利、複利計算、複利週期是每年、每月、每日或分分秒秒，都會影響利息的多寡。如果將複利週期縮短到趨近於 0 時，利息又與歐拉數 e 巧妙連結。

僅使用數學工具中等比級數之技巧，便可把看似複雜的複利問題梳理清楚。當你能運用簡單的數學揭開複利計算之面紗時，數學之美沉浸於生活之中。

關鍵詞：存款準備率，單利，複利，歐拉數，等比級數

壹、前言

錢之為物，乃人類生活中交易行為的重要媒介，細數人類的貨幣史，從貝幣、銅錢到金、銀等貴金屬發展到由錢莊發行的銀票及近代由銀行發行的紙鈔、支票、信用卡、悠遊卡……等電子貨幣，不管使用何種支付工具,都可定位為廣義的「錢」。這些「錢」之所以值錢，那是因為這些使用各種不同支付工具(借條)者對發行單位有無比的信心，堅信只要手持借條，必可兌現,如此也讓人類之交易秩序得以維持。

貳、銀行點金術

銀行為了集資，吸引手頭有餘錢的普羅大眾將錢存入銀行，於是對存戶給付本金一定比例的報酬稱利息，這個一定比例稱利率。銀行又再以略高於存款利率的放款利率放貸之，利用率差，獲取利潤。如果你認為這是銀行獲利的主要方法你就太遜了。銀行經過集資之後，必須保留一定比例的金額無息存放在中央銀行此一定比例稱之為存款準備率[註 1]。假設 A 銀行集資 100 億，存款準備率為 20%，則表示 A 銀行必須提存 20 億無息儲存於中央銀行，剩餘 80 億可以對外放款，銀行原本的資產為 0，集資後擁有資產 100 億，然後簽發借條(存摺)給存戶，此時的存戶因持有借條(存摺)，相信我只要拿著銀行所簽發的借條(存摺)，一定可以領回存款並賺到利息，因此銀行的資產由 0 暴增到 100

* 為本文通訊作者

億，存戶則透過對銀行的信任，把手上的借條(存摺)上所記載的儲蓄金額視同現金。A 銀行再將此 100 億的 80%放貸給 B 銀行，B 銀行再將此 80 億的 80%放貸給 C 銀行，C 銀行再將此 64 億的 80%放貸給 D 銀行，D 銀行再將此 51.2 億的 80%放貸給 E 銀行……。如此將 100 億不斷的放款操作，A 銀行所集資的 100 億，實際上可以讓存戶及 A、B、C……諸銀行所擁有的資產分別為：

存戶：100 億元

A 銀行：100 億*0.80=80 億元

B 銀行：80 億*0.80=64 億元

C 銀行：64 億*0.80=51.2 億元

D 銀行：51.2 億*0.80=40.96 億元

求級數 $100+100*0.8+100*0.8^2+100*0.8^3+100*0.8^4$……

上述級數為首項 $a=100$，公比 $r=0.8=4/5$ 的無窮等比級數，其總和為：$Sn=a(1-r^n)/ 1-r=100〔1-(4/5)^{\infty}〕/1-(4/5)=100/(1/5)=500$(億元)[註 2]

A、B、C……等銀行原本的資產均為 0，唯一存在的資金只有存戶儲存在 A 銀行的 100 億元，經銀行間不斷的放貸款操作可以把 100 億膨脹到 500 億，只要存戶把錢存放於銀行體系運作，銀行便可輕輕鬆鬆地把資金放大 5 倍，這就是銀行的點金術。至於經過銀行經辦業務所收取的各項手續費、匯差、利率差……等所賺到的利潤則數蠅頭小利了。

存款準備率為各個國家執行貨幣政策的重要工具，也依存款性質不同而有不同準備率，以我國中央銀行公布之活期存款準備率 9.775%計[註 3]，存戶之活期存款積累 100 億，便可讓這 100 億的資金輕輕鬆鬆膨脹為 1023 億。根據無窮等比級數總和計算公式，當公比 r 的絕對值小於 1 時，亦即 $|r|<1$ 時

$Sn=a/ 1-r=100/1-(0.90225)≒1023$(億)

式中

Sn：無窮等比級數總和

a ：無窮等比級數首項

r ：無窮等比級數公比，其值為

$r=1-$存款準備率$=1-0.09775$

參、單利與複利

銀行利息之計算可分單利及複利兩種，所謂的複利就是利滾利的概念。先從單利談起，假設某甲有 100 萬元存放銀行，約定年利率為 18 %，則 1 年期滿銀行應支付本利共計 118 萬。此時某甲可以選擇將利息 18 萬提領，本金 100 萬繼續存放銀行生息，一年後再將利息 18 萬領出 100 萬繼續生息，這就是單利制。如果第 1 年期滿 18 萬利息不提領，並將其轉成本金，此時本金為 118 萬，再過 1 年利滾利的結果銀行應支付本利和 139.24 萬，第 3 年再利滾利，其本利和為 164.3 萬……。

每一年的本利和形成一個等比數列

a_0，a_1，a_2，a_3…….

$=100$，$100*(1+0.18)$，$100*(1+0.18)^2$，$100*(1+0.18)^3$……

$=100$，118，139.24，164.3……

如果將利滾利的周期縮短為每月一次，同樣的本金 100 萬，年利率 18%共存放 3 年，則 3 年後的本利和若干?

解析：

每一個月的本利和形成一個等比數列：

a，a_1，a_2，a_3……a_n

=100，100*(1+0.18/12)，

100*(1+0.18/12)^2，

100*(1+0.18/12)^3……

……，100(1+0.18/12)^n

=100，101.5，103.02，104.57……

將此列數整理成通式為:

a_n= a(1+r/12)^n [註 4]

a=100，n=36，r=0.18 代入上式得

a_n= 100(1+0.18/12)^36 =170.9(萬元)

三年期限，以一個月複利一次與以一年複利一次計算僅相差 6.6 萬元，確實差距不大。但如果將戰線延長，同樣的 100 萬，同樣的年利率 0.18 存放 20 年，分別以一個月複利一次與以一年複利一次計算，其本利和各若干？

解析:

一個月複利一次:

a_n= a(1+r/12)^n

a=100， n=240，r=0.18 代入上式得

a_n= 100(1+0.18/12)^240

=3563.28(萬元)

一年複利一次：

a_n= a(1+r)^n

a=100，n=20，r=0.18 代入上式得

a_n= 100(1+0.18)^20

=2739.30(萬元)

兩相比較差距高達 824 萬元

如果將一個月複利一次改成每日複利一次計算，其本利和若干？

a_n= a(1+r/365)^n

a=100， n=365*20=7300，r=0.18 代入上式得

a_n= 100(1+0.18/365)^7300

=3656.57(萬元)

再將每日複利一次改成每小時複利一次計算，其本利和若干?

a_n= a(1+r/365*24)^n

a=100， n=365*24*20=175200，r=0.18 代入上式得

a_n= 100(1+0.18/365*24)^175200

=3659.69(萬元)

讀者是否發現每日複利一次與每小時複利一次計算，所獲得之結果僅相差不到 1 萬元，如果你有興趣，可嘗試計算每一分鐘複利一次，其結果又如何?答案是 3659.98(萬元)，請自行演練。

如果引入極限的概念將複利計算周期縮短到趨近於 0，同樣的 100 萬元以年利率 18%計，1 年後本利和若干

解析：已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \fallingdotseq 2.718281828\ldots$$ [註 5]

$$a_n = \lim_{n\to\infty} 100\left(1+\frac{0.18}{n}\right)^n$$

=100* e^0.18 ≒119.72(萬元)，

此數字與 1 年複利一次的計算結果 118 萬

元僅增加 1.72 萬元。同樣的 100 萬元，以年利率 18%計，複利計算周期縮短到趨近於 0，20 年後之本利和為：

$$a_n=\lim_{n\to\infty}100\left(1+\frac{0.18}{n}\right)^{20n}$$

=100*e^0.18*20 ≒3659.82(萬元)，此數字與 1 年複利一次的計算結果 2739.30 萬相差 920.52 萬元；與每日複利一次計算結果的 3656.57 萬元相僅差 3.25 萬元。從此一結果可窺知，將複利周期縮短，確實可達到提高本利和之效果，但是其增加之效果有其極限，其變率與歐拉數 e 為底，以利率做指數型式成長。[註 6]

肆、房貸每月攤還金額速寫

如果主客易位，銀行在放款業務中，又是如何操作的呢？就以常見的房貸為例說明。A 君購置新宅，房價 1500 萬元，自備款 500 萬元不足 1000 萬元，以新宅向銀行辦理房貸，與銀行約定年利率 2.5%，以 20 年為期逐月攤還本息,試問某甲每個月應繳交房貸若干？

解析

先依前述將每一個月的本利和寫成一等比數列

a，a_1，a_2，a_3……a_n

=1000，1000*(1+0.025/12)，

1000*(1+0.025/12)^2，

1000*(1+0.025/12)^3……，

1000(1+0.025/12)^n

=1000，1002.08，1004.17，1006.26……

將此列數整理成通式為：

a_n= a(1+r/12)^n

a=1000，n=240，r=0.025 代入上式得

a_n= 1000(1+0.025/12)^240

=1647.86(萬元)

從另一個觀點切入，設 B 君每月固定存入銀行 x 元，並以月息 0.025/12 計共執行 240 個月，每月攤還之本利和形成一以公比 r=1+(0.025/12)之等比數列：

a，a_1，a_2，a_3……a_n

= x，x (1+0.025/12)，x(1+0.025/12)^2，x (1+0.025/12)^3….x (1+0.025/12)^n

依等比數列總和公式:

Sn= x(r^n -1)/r- 1

公比為 1+ r 代入上式

Sn=x〔(1+r)^n -1〕/(1+ r)-1

= x〔(1+r)^n -1〕/ r，要攤還 1000 萬之貸款，則 Sn = x〔(1+r)^n -1〕/ r 應相當於將 1000 萬以月息 0.025/12 之利率存放銀行以複利計算，累積到第 240 月之本利和 a_n= a(1+r/12)^n，寫成通式得一計算公式:

x〔(1+r) ^n -1〕/ r= a(1+r)^n

或 x〔(1+r) ^n -1〕 = a r (1+r)^n

將上述數據代入得

x〔(1+0.025/12) ^240-1〕

=1000*(0.025/12)* (1+0.025/12)^240

先計算出(1+0.025/12)^240=1.6479 代入求一元一次方程式之根

0.6478x=3.43305，

x≒5.2995(萬元) =52,995(元)

假設 C 君向銀行申貸 500 萬元，年

利率為 0.025，每月固定攤還 5 萬元，試問 C 君何時可將貸款還清？

解析:

x〔(1+r) ^n -1〕= a r (1+r) ^n

5〔(1+0.025/12) ^n -1〕

=500*(0.025/12)* (1+0.025/12)^n

先令(1+0.025/12)^n =k，

5(k -1)=500*(0.025/12)* k ，

3.95833k=5，k=1.263

1.0021^n=1.263，

ln1.0021^n=ln1.263，

n* ln1.0021=ln1.263，

n= ln1.263/ ln1.0021=111.3 (月)，相當於 9 年又 3 個月。如果用常用對數 log [註 7]，亦可計算出相同結果，請讀者自行演練。

伍、結語

數學是很多人的夢魘，但數學其實就在生活中。撇開艱深的數學推理，將數學應用在生活中，將會使數學更有趣，也可以有更寬闊的視野審視生活，欣賞數學之美。本文僅使用數學工具中等比數列及等比級數之技巧，便可把看似複雜的複利問題梳理清楚。當你能運用簡單的數學揭開複利計算之面紗時，數學之美沉浸於生活之中。

參考文獻

註 1： 維基百科，自由的百科全書，銀行存款準備金比率（Required Reserve Ratio，也譯作存款準備金比率、現金準備比例、準備金比例、準備金要求、存款準備率），指商業銀行的初級存款中不能用於放貸的部分的比例。

註 2： 李虎雄、謝昭地等，**高中數學第 1 冊** P116，康熙圖書，台中，2005 年 8 月版。

註 3： 維基百科，自由的百科全書，各國的準備金比例公告 2011.1.1 調整之活期存款準備率為 9.775%。

註 4： 仝註 2。

註 5： 李虎雄、謝昭地等，**高中數學第 2 冊** P17，康熙圖書，台中，2005 年 2 月版。維基百科，自由的百科全書，e 作為數學常數，是自然對數函數的底數。有時被稱為歐拉數（Euler's number），以瑞士數學家歐拉命名；還有個較少見的名字納皮爾常數，用來紀念蘇格蘭數學家約翰·納皮爾引進對數。它是一個無限不循環小數，數值約是 2.71828182845904523536（小數點後 20 位）

註 6： 仝註 5，P4。

註 7： 仝註 5，P22。

投稿日期：106 年 09 月 25 日
接受日期：106 年 10 月 19 日

Bank's magic of currency, the relation between compound interest and Euler number

Chi-Cheng Hsieh [1*] and Hsiang-Hua Hsieh [2]

[1] The Affiliated Tao-Yuan Agricultural & Industrial Senior High School of National Taipei University of Technology

[2] MediaTek Inc.

Abstract

The currency in circulation increases due to the Required Reserve Ratio announced by the Central Bank. Both savings and loans result in interest problems, which are decided by it is single interest or compound interest, the period of compound interest (e.g. yearly, monthly daily etc.) besides the interest rate. If the period of compound interest is limited to 0, the formula would be subtly related to Euler's number (e), namely e.

By making good use of geometric progression, the seemly complicated compound interest problem would become much simpler.. And from then on, the beauty of the math shows.

Keywords: required reserve ratio, single interest, compound interest, Euler's number, geometric progression

* corresponding author