圖解平面凸多邊形方程式的幾何意義：以三邊形、四邊形、五邊形為例(II)

李輝濱

【(續)科學教育月刊第 403 期第 33 頁之後】

B-3. 平面凸五邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸五邊形的邊角方程式

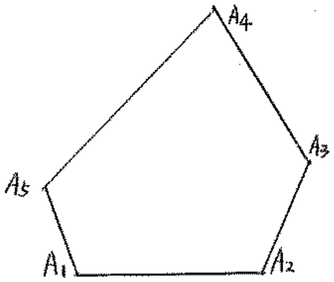

圖 8

在平面上給定一個凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，如上圖 8 由引理 1 取 n=5 代入方程式(1)與(2)，並作內角轉換，可得下列兩式；

$$V_1 - V_2\cos A_2 + V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_5+A_1) - V_5\cos A_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}1)$$

$$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_5+A_1) - V_5\sin A_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}2)$$

由引理 2.並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合僅任意選取下列 2 情況；

(Case 1) 選取 $A_1+A_3+A_5=\dfrac{3\pi}{2}+\phi$，$A_2+A_4=\dfrac{3\pi}{2}-\phi$，分別代入方程式(5-1)式與(5-2)式中；先由代入(5-1)式，得

$$V_1 - V_2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\phi-A_4\right) + V_3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\phi-A_4+A_3\right) + V_4\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_3\right)$$

$$-V_5\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_3-A_5\right)=0$$

$$\Rightarrow V_1+V_2\sin(\phi+A_4)+V_3\sin(A_3-\phi-A_4)+V_4\sin(\phi-A_3)-V_5\sin(\phi-A_3-A_5)$$
$$=0$$
$$\Rightarrow V_1+\sin\phi\,[\,V_2\cos A_4-V_3\cos(A_3-A_4)+V_4\cos A_3-V_5\cos(A_3+A_5)\,]+$$
$$\cos\phi\,[\,V_2\sin A_4+V_3\sin(A_3-A_4)-V_4\sin A_3+V_5\sin(A_3+A_5)\,]=0 \cdots\cdots(5\text{-}1a)$$

同理，由代入(5-2)式，得

$$\cos\phi\,[-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_3-A_4)-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5)\,]+$$
$$\sin\phi\,[\,V_2\sin A_4+V_3\sin(A_3-A_4)-V_4\sin A_3+V_5\sin(A_3+A_5)\,]=0 \cdots\cdots(5\text{-}2a)$$

倣效 B-2.的(Case 2) 聯立解出(5-1a)式與(5-2a)式，省略計算過程，得

$$V_1\cos(A_2+A_4)-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_3-A_4)$$
$$-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5)=0 \cdots\cdots(5\text{-}1T)$$
$$V_1\sin(A_2+A_4)-V_2\sin A_4-V_3\sin(A_3-A_4)+V_4\sin A_3$$
$$-V_5\sin(A_3+A_5)=0 \cdots\cdots(5\text{-}2T)$$

方程式 (5-1T)式與(5-2T)式即為推證出的第一組五邊形的邊角方程式。

(Case 2) 選取 $A_1+A_2+A_3+A_5=2\pi+\phi$， $A_4=\pi-\phi$，分別代入方程式 (5-1)式與(5-2)式中，先由代入(5-1)式，得

$$V_1-V_2\cos(2\pi+\phi-A_1-A_3-A_5)+V_3\cos(2\pi+\phi-A_1-A_5)+$$
$$V_4\cos(A_5+A_1)-V_5\cos A_1=0$$
$$\Rightarrow V_1-V_2\cos(\phi-A_1-A_3-A_5)+V_3\cos(\phi-A_1-A_5)+V_4\cos(A_5+A_1)$$
$$-V_5\cos A_1=0$$
$$\Rightarrow V_1+V_4\cos(A_5+A_1)-V_5\cos A_1+\cos\phi\,[-V_2\cos(A_1+A_3+A_5)$$
$$+V_3\cos(A_1+A_5)\,]+\sin\phi\,[-V_2\sin(A_1+A_3+A_5)+V_3\sin(A_1+A_5)\,]=0 \cdot (5\text{-}1b)$$

同理，由代入(5-2)式，得

$$V_4\sin(A_5+A_1)-V_5\sin A_1+\sin\phi\,[\,V_2\cos(A_1+A_3+A_5)$$
$$-V_3\cos(A_1+A_5)\,]+\cos\phi\,[-V_2\sin(A_1+A_3+A_5)+V_3\sin(A_1+A_5)\,]=0 \cdot (5\text{-}2b)$$

倣效 B-2 的(Case 2).聯立解出(5-1b)式與(5-2b)式，省略計算過程，得

$$-V_1\cos A_4-V_4\cos(A_5+A_1-A_4)+V_5\cos(A_1-A_4)$$

$$=V_2\cos(A_1+A_3+A_5)-V_3\cos(A_1+A_5) \quad \cdots\cdots \text{(5-1c)}$$

與 $V_1\sin A_4-V_4\sin(A_5+A_1-A_4)+V_5\sin(A_1-A_4)$

$$=V_2\sin(A_1+A_3+A_5)-V_3\sin(A_1+A_5) \quad \cdots\cdots \text{(5-2c)}$$

由 $\cos(A_1+A_3+A_5)=\cos(3\pi-A_2-A_4)=-\cos(A_2+A_4)$，及

$\sin(A_1+A_3+A_5)=\sin(3\pi-A_2-A_4)=\sin(A_2+A_4)$，轉換內角，最後得

$$V_1\cos A_4-V_2\cos(A_2+A_4)-V_3\cos(A_1+A_5)$$

$$=-V_4\cos(A_5+A_1-A_4)+V_5\cos(A_1-A_4) \quad \cdots\cdots \text{(5-1G)}$$

$$V_1\sin A_4-V_2\sin(A_2+A_4)+V_3\sin(A_1+A_5)$$

$$=V_4\sin(A_5+A_1-A_4)-V_5\sin(A_1-A_4) \quad \cdots\cdots \text{(5-2G)}$$

方程式(5-1G)式與(5-2G)式即為推證出的第二組五邊形的邊角方程式。

(2) 圖解五邊形邊角方程式的意義

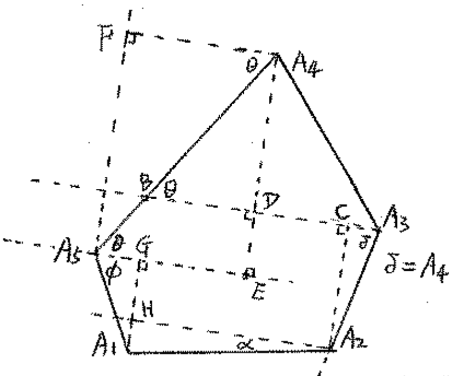

圖 9

(I) 觀察(Case 1)中的(5-1T)式與(5-2T)式這兩方程式，有兩個內角的差，即 A_3-A_4，請看上圖 9 當頂角 $A_3>A_4$時，(這不失為一般性作圖假設)

(a) 在頂角 A_3 內側作射線 A_3B，使 $\angle A_2A_3B$ 恰等於頂角 A_4，則 $\delta=A_4$，

(b) 自頂點 A_2 對射線 A_3B 作一垂直射線 A_2C，使 C 點為垂直線交點。

(c) 自頂點 A_4 對射線 A_3B 作一垂直射線 A_4E，使 D 點為兩垂直線交點。

(d) 再自頂點 A_2 作一與射線 A_3B 平行的平行射線 A_2H，另自頂點 A_1 作一與射線 A_2H 相垂直的射線 A_1G，使兩射線的垂直交點為 H 點。

(e) 再自頂點 A_5 作一與射線 A_3B 平行的平行射線 A_5E，使射線 A_5E 與射線 A_4E 相交於 E 點，而 E 點為垂直點。至此，作圖 9 完成。

(f) 現在看方程式(5-1T)式的各項在圖 9 中出現的位置；

(f-1) 參閱圖 9 在頂點 A_2 位置處，兩角度 $A_2+\delta=A_2+A_4=\pi+\alpha$，則 $\cos(A_2+A_4)=-\cos\alpha$，$\sin(A_2+A_4)=-\sin\alpha$，故 $V_1\cos(A_2+A_4)=-V_1\cos\alpha$ 的值即為投影線段 A_2H 的負值。

(f-2) $-V_2\cos A_4$ 的值即為投影線段 A_3C 的負值。

(f-3) $V_3\cos(A_3-A_4)$ 的值即為投影線段 A_3D 的正值。

(f-4) 請看圖 9 中的三角形 ΔA_3A_4B，內角 $\theta=\pi-A_3$，則 $-V_4\cos A_3=V_4\cos\theta$ 其值即為投影線段 A_5E 的正值。

(f-5) 在頂點 A_5 位置處，$\theta+\phi=A_5$，$\phi=A_3+A_5-\pi$，則 $\cos\phi=-\cos(A_3+A_5)$，$\sin\phi=-\sin(A_3+A_5)$，而 $V_5\cos(A_3+A_5)=-V_5\cos\phi$ 即為投影線段 A_5G 的負值，以上這五項的值恰好滿足了方程式 (5-1T)式。

(g) 現在看方程式 (5-2T)式的各項在圖 9.中出現的位置；

(g-1) $V_1\sin(A_2+A_4)=-V_1\sin\alpha$ 的值即為線段 A_1H 的負值。

(g-2) $-V_2\sin A_4$ 的值即為線段 A_2C 的負值。

(g-3) $-V_3\sin(A_3-A_4)$ 的值即為線段 A_4D 的負值。

(g-4) $V_4\sin A_3=V_4\sin\theta$ 的值即為線段 A_4E 的正值。

(g-5) $-V_5\sin(A_3+A_5)=V_5\sin\phi$ 的值即為線段 A_1G 的正值。

以上這五項的值恰好滿足了方程式(5-2T)式。

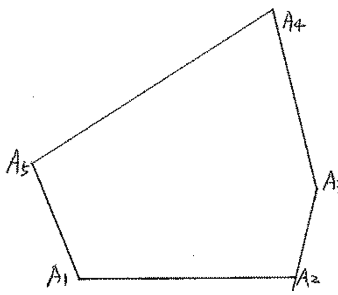

圖 10

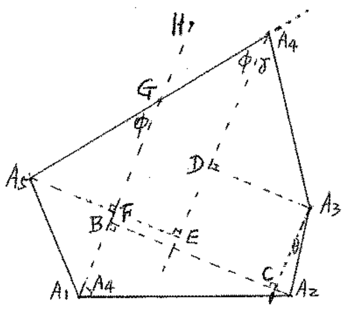

圖 11

(II) 觀察(Case 2).中的(5-1G)式與(5-2G)式這兩方程式，有兩個內角的差，即 A_1-A_4，請看上圖 11 當頂角 $A_1>A_4$時，(這不失為一般性作圖假設)

(a) 在頂角 A_1 內側作射線 A_1H，使 $\angle A_2A_1H$ 恰等於頂角 A_4，

(b) 自頂點 A_2 對射線 A_1H 作一垂直射線 A_2B，使 B 點為垂直線交點。

(c) 自頂點 A_4 作一與射線 A_1H 平行的平行射線 A_4E，

(d) 再自頂點 A_3 作一與射線 A_1H 平行的平行射線 A_3C，射線 A_3C 與射線 A_2B 相互垂直於 C 點，另自頂點 A_3 作一與射線 A_4E 相垂直的射線 A_3D，使兩射線的垂直交點為 D 點。

(e) 再自頂點 A_5 作一與射線 A_1H 相垂直的射線 A_5E，使射線 A_5E 與射線 A_4E 相交於 E 點，而 E 點為垂直點。另再使射線 A_5E 與射線 A_1H 相交於 F 點，而 F 點為垂直點。至此，作圖 11 完成。

(f) 現在看方程式(5-1G)式的各項在圖 11 中出現的位置；

(f-1) $V_1\cos A_4$ 的值即為投影線段 A_1B。

(f-2) 圖 11 中的 $\angle A_2A_3C=\theta=\pi-A_2-A_4$，而 $\cos\theta=-\cos(A_2+A_4)$，$\sin\theta=\sin(A_2+A_4)$，則 $-V_2\cos(A_2+A_4)=V_2\cos\theta$ 的值即為投影線段 A_3C。

(f-3) 圖 11 中的 $\phi=\pi-(A_5+A_1-A_4)$，而在頂點 A_4 處 $A_4+(A_5+A_1-A_4)=\pi+\delta=A_5+A_1$，$\cos(A_5+A_1)=-\cos\delta$，$\sin(A_5+A_1)=-\sin\delta$，所以 $V_3\cos(A_1+A_5)=V_3\cos\delta$ 的值即為投影線段 A_4D。

(f-4) $-V_4\cos(A_5+A_1-A_4)=V_4\cos\phi$ 的值即為投影線段 A_4E。

(f-5) $V_5\cos(A_1-A_4)$ 的值即為投影線段 A_1F。

以上這五項的值恰好滿足了方程式 (5-1G)式。

(g) 同理，方程式(5-2G)式的各項值也都滿足了在圖 11 中出現的相關位置。

由上述圖示解說，可確認知方程式(5-1T)式，(5-2T)式，(5-1G)式與(5-2G)式四式必為早已自然存在的一般化五邊形恆等式。

B-4. 平面凸六邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸六邊形的邊角方程式

在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，如下圖 12 由引理 1 取 n=6 代入方程式(1)與(2)，並作內角轉換，可得下列兩式；

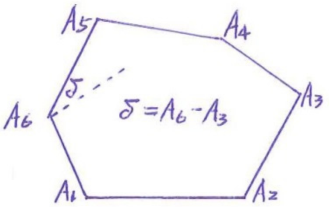

圖 12

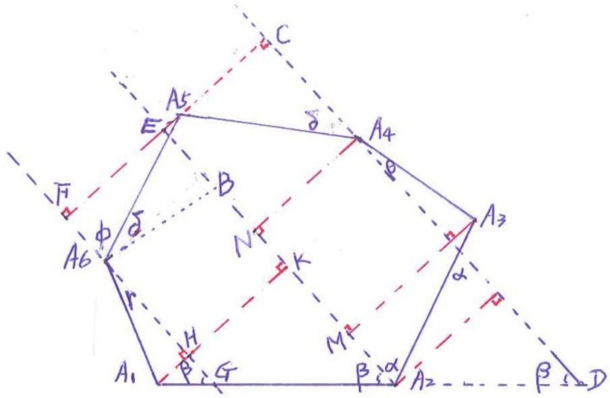

圖 13

$$V_1 - V_2 \cos A_2 + V_3 \cos(A_2 + A_3) - V_4 \cos(A_2 + A_3 + A_4)$$

$$+ V_5 \cos(A_6 + A_1) - V_6 \cos A_1 = 0 \cdots\cdots \quad (6\text{-}1)$$

$$V_2 \sin A_2 - V_3 \sin(A_2 + A_3) + V_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4) + V_5 \sin(A_6 + A_1)$$

$$- V_6 \sin A_1 = 0 \cdots\cdots \quad (6\text{-}2)$$

由引理 2 並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合僅選取下列 1 種情況為例；

選取 $A_1 + A_3 + A_5 = 2\pi - \phi$, $A_2 + A_4 + A_6 = 2\pi + \phi$, 分別代入方程式(6-1)式與(6-2) 式中；倣效 B-2 的(Case 1) 聯立解出，省略計算過程，得

$$V_1 \cos(A_2 + A_4 + A_6) - V_2 \cos(A_4 + A_6) + V_3 \cos(A_4 + A_6 - A_3)$$

$$- V_4 \cos(A_6 - A_3) + V_5 \cos(A_6 - A_3 - A_5) - V_6 \cos(A_3 + A_5) = 0 \cdots\cdots \quad (6\text{-}1T)$$

$$V_1 \sin(A_2 + A_4 + A_6) - V_2 \sin(A_4 + A_6) + V_3 \sin(A_4 + A_6 - A_3)$$

$$- V_4 \sin(A_6 - A_3) + V_5 \sin(A_6 - A_3 - A_5) + V_6 \sin(A_3 + A_5) = 0 \cdots\cdots \quad (6\text{-}2T)$$

方程式(6-1T)式與(6-2T)式即為推證出的一組六邊形的邊角方程式。

(2) 圖解六邊形邊角方程式的意義

觀察方程式中的 (6-1T)式與(6-2T)式這兩方程式，有兩個內角的差，即 $A_6 - A_3$，請看上圖 12 與圖 13 當頂角 $A_6 > A_3$ 時，(這不失為一般性作圖假設)

(a) 在頂角 A_6 處內側作射線 A_6B，使 $\angle A_1 A_6 B$ 恰等於頂角 A_3，則 $\delta = A_6 - A_3$，

(b) 通過頂點 A_4 處作一直線 CD，使 $\angle A_5 A_4 C$ 恰等於 $\delta = A_6 - A_3$。

(c) 接下來，仿效前述五邊形過程，將(6-1T)式與(6-2T)式的各項投影線段作圖全部呈

現在上圖 13.的圖示中，請依樣作圖模擬即可理解邊角方程式的意義。

B-5. 平面凸七邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸七邊形的邊角方程式

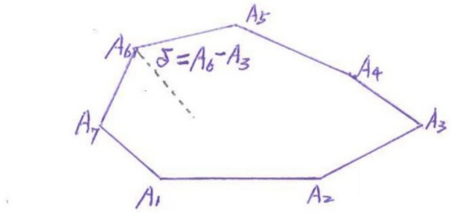

圖 14

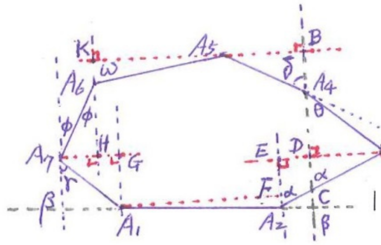

圖 15

在平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，如圖 14 由引理 2 並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合僅選取下列 1 種情況為例；

選取 $A_1 + A_3 + A_5 + A_7 = (2.5)\pi + \phi$, , $A_2 + A_4 + A_6 = (2.5)\pi - \phi$, 分別代入方程式中，仿效前述運算過程並化簡，最後得

$$V_1\cos(A_2+A_4+A_6) - V_2\cos(A_4+A_6) + V_3\cos(A_4+A_6-A_3)$$
$$-V_4\cos(A_6-A_3) + V_5\cos(A_6-A_3-A_5) - V_6\cos(A_3+A_5)$$
$$+V_7\cos(A_3+A_5+A_7) = 0 \quad \cdots\cdots (7\text{-}1\text{T})$$
$$V_1\sin(A_2+A_4+A_6) - V_2\sin(A_4+A_6) + V_3\sin(A_4+A_6-A_3)$$
$$-V_4\sin(A_6-A_3) + V_5\sin(A_6-A_3-A_5) + V_6\sin(A_3+A_5)$$
$$-V_7\sin(A_3+A_5+A_7) = 0 \quad \cdots\cdots (7\text{-}2\text{T})$$

方程式(7-1T)式與(7-2T)式即為推證出的一組七邊形的邊角方程式。

(2) 圖解七邊形邊角方程式的意義

請看上圖 14 與圖 15 當頂角 $A_6 > A_3$ 時，(這不失為一般性作圖假設)

(a) 圖 14.中，在頂角 A_6 處內側預先作一射線，將頂角 A_6 分割成一頂角角度 A_3 及另一角度 δ，使得 $\delta = A_6 - A_3$。

(b) 圖 15.中，通過頂點 A_4 處作一直線 CB，使 $\angle A_5A_4B$ 恰等於 $\delta = A_6 - A_3$。

(c) 接下來，仿效前述五邊形過程，將(7-1T)式與(7-2T)式的各項投影線段作圖全部呈現在上圖 15 的圖示中，請依樣作圖模擬即可理解邊角方程式的意義。

B-6. 平面凸八邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸八邊形的邊角方程式

在平面上給定一個凸八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，如圖 16

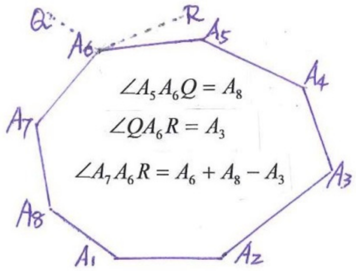

圖 16

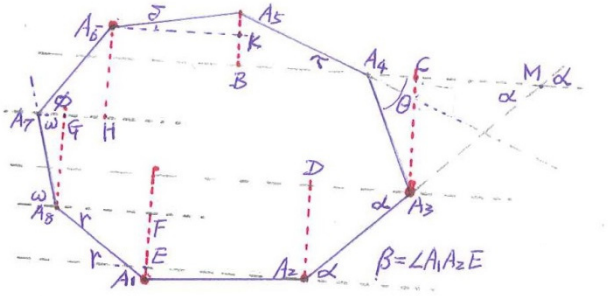

圖 17

由引理 2 並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合僅選取下列 1 種情況為例；

選取 $A_1 + A_3 + A_5 + A_7 = 3\pi + \phi$， $A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = 3\pi - \phi$，分別代入方程式中，仿效前述運算過程並化簡，最後得

$$
\begin{aligned}
& V_1\cos(A_2 + A_4 + A_6 + A_8) - V_2\cos(A_4 + A_6 + A_8) \\
& + V_3\cos(A_4 + A_6 + A_8 - A_3) - V_4\cos(A_6 + A_8 - A_3) \\
& + V_5\cos(A_6 + A_8 - A_3 - A_5) - V_6\cos(A_8 - A_3 - A_5) \\
& + V_7\cos(A_8 - A_3 - A_5 - A_7) - V_8\cos(A_3 + A_5 + A_7) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(8-1T)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& V_1\sin(A_2 + A_4 + A_6 + A_8) - V_2\sin(A_4 + A_6 + A_8) \\
& + V_3\sin(A_4 + A_6 + A_8 - A_3) - V_4\sin(A_6 + A_8 - A_3) \\
& + V_5\sin(A_6 + A_8 - A_3 - A_5) - V_6\sin(A_8 - A_3 - A_5) \\
& + V_7\sin(A_8 - A_3 - A_5 - A_7) + V_8\sin(A_3 + A_5 + A_7) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(8-2T)}
\end{aligned}
$$

方程式(8-1T)式與(8-2T)式即為推證出的一組八邊形的邊角方程式。

(2) 圖解八邊形邊角方程式的意義

觀察方程式中的(8-1T)式與(8-2T)式這兩方程式，有最簡要的內角組合，即 $A_6 + A_8 - A_3$，請看圖 16 與圖 17 當頂角 $A_6 + A_8 > A_3$ 時，

(a) 圖 16.中，在頂角 A_6 處外側預先作一射線 A_6Q ，使 $\angle A_5A_6Q$ 恰等於頂角 A_8，再作一射線 A_6R，使 $\angle QA_6R$ 恰等於頂角 A_3，則 $\angle A_7A_6R = A_6 + A_8 - A_3$。

(b) 圖 17.中，通過頂點 A_4 處向外側作一直線 A_4M，使 $\angle A_5A_4M$ 恰等於 $\angle A_7A_6R = A_6 + A_8 - A_3$。

(c) 接下來，仿效前述五邊形過程，將(8-1T)式與(8-2T)式的各項投影線段作圖全部呈現在上圖 17 的圖示中，請依樣作圖模擬即可理解邊角方程式的意義。

B-7. 平面凸九邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸九邊形的邊角方程式

在平面上給定一個凸九邊形 $A_1A_2A_3....A_7A_8A_9$，如下圖 18。

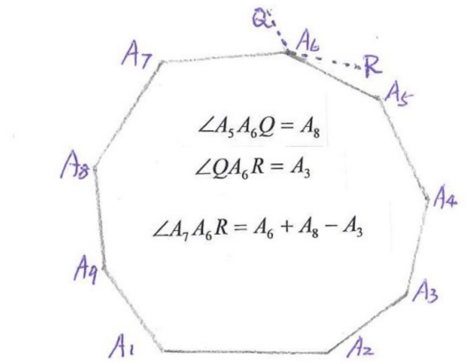

圖 18

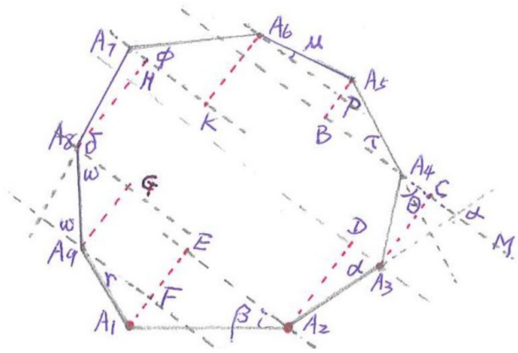

圖 19

由引理 2 並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合僅選取下列 1 種情況為例；選取 $A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 = (3.5)\pi + \phi$，$A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = (3.5)\pi - \phi$，分別代入方程式中；並化簡，仿效前述運算過程，最後得

$$
\begin{aligned}
&V_1\cos(A_2 + A_4 + A_6 + A_8) - V_2\cos(A_4 + A_6 + A_8) \\
&+V_3\cos(A_4 + A_6 + A_8 - A_3) - V_4\cos(A_6 + A_8 - A_3) \\
&+V_5\cos(A_6 + A_8 - A_3 - A_5) - V_6\cos(A_8 - A_3 - A_5) \\
&+V_7\cos(A_8 - A_3 - A_5 - A_7) - V_8\cos(A_3 + A_5 + A_7) \\
&+V_9\cos(A_3 + A_5 + A_7 + A_9) = 0 \cdots\cdots (9\text{-}1\mathrm{T})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_1\sin(A_2 + A_4 + A_6 + A_8) - V_2\sin(A_4 + A_6 + A_8) \\
&+V_3\sin(A_4 + A_6 + A_8 - A_3) - V_4\sin(A_6 + A_8 - A_3) \\
&+V_5\sin(A_6 + A_8 - A_3 - A_5) - V_6\sin(A_8 - A_3 - A_5) \\
&+V_7\sin(A_8 - A_3 - A_5 - A_7) + V_8\sin(A_3 + A_5 + A_7) \\
&-V_9\sin(A_3 + A_5 + A_7 + A_9) = 0 \cdots\cdots (9\text{-}2\mathrm{T})
\end{aligned}
$$

方程式(9-1T)式與(9-2T)式即為推證出的一組九邊形的邊角方程式。

(2) 圖解九邊形邊角方程式的意義

觀察方程式中的(9-1T)式與(9-2T)式這兩方程式，有最簡要的內角組合，即 $A_6 + A_8 - A_3$，請看圖 18 與圖 19 當頂角 $A_6 + A_8 > A_3$ 時，

(a) 圖 18.中，在頂角 A_6 處外側預先作一射線 A_6Q，使 $\angle A_5 A_6 Q$ 恰等於頂角 A_8，再作一射線 A_6R，使 $\angle QA_6R$ 恰等於頂角 A_3，則 $\angle A_7 A_6 R = A_6 + A_8 - A_3$。

(b) 圖 19 中，通過頂點 A_4 處向外側作一直線 A_4M，使 $\angle A_5 A_4 M$ 恰等於 $\angle A_7 A_6 R = A_6 + A_8 - A_3$。

(c) 接下來，仿效前述五邊形過程，將(9-1T)式與(9-2T)式的各項投影線段作圖全部呈現在上圖 19 的圖示中，請依樣作圖模擬即可理解邊角方程式的意義。

本文的說明中僅列舉上述三至九邊形的邊角恆等式證明及圖解情形，而十邊形以上所有圖形者也全都能仿照前述方法一一展現。當需要運用到更多邊形的邊角恆等式，我們就會有更多樣性的思考理念找出最適合的角度組合恆等式來應用。

參、結論

檢視正文內明列的各型多邊形恆等式內涵，可發現方程式裡有部份項數的內角組合是含有內角差之型態，其餘項數則是純加法性內角組合；此兩類型的組合項數在需要被選取時，恰好可以適當地作為替代互換！尤其這些帶有純加法性內角組合的項數恰能完美巧妙地被代換在平面凸多邊形的面積公式中！

在本文的推證說理圖解過程中，每一凸多邊形都僅選取代表性的一或二種內角組合來作展示. 事實上，每一凸多邊形皆有包含許多種相異的內角組合，而每一組合都會有意想不到的用途，都能形成完全正確且有幾何意義的邊角恆等式。

幾何作圖時，歷經反覆思考，終於歸納出一套成功的作圖準則；(1)即對三，四，五邊形圖形須從有出現兩內角差的項開始分析起，先作出兩內角差的角度，接著觀察圖形的內角相關位置，即可逐項找出內角組合的圖解意義。(2)六邊形以上者須從第 4 項的邊長 V_4 內角組合開始分析作圖，即先在頂點 A_4 處向外側作出 V_4 內角組合的一直線，然後依序至 $V_3, V_2, V_1, V_n, V_{n-1}, \ldots, V_9, V_8, V_7, V_6, V_5$ 等各邊長順序在各頂點處各作出相關的平行線和垂直線，以尋找出所對應的不同內角配置。這個過程是最關鍵的，因而可由此作出恆等式中每一項出現的投影線段，再比對這些投影線段的正負值，即可徹底理解整體方程式裡的邊長與內角組合關係項數都是自然形成的正確多邊形恆等式。

幾何圖示中，是由選取內角差的邊長開始作圖，例如 V_4 邊，以順時針方向順勢作出各邊長角度投影線段來完成整個作圖過程。實際上，亦可以逆時針方向依序作出各頂點處相關的平行線和垂直線，以證明恆等式的圓滿圖形意義。

無論何種情況,所有作圖圖形中第一條被作出的直線就是指標線！自所有其餘頂點作出的平行線與垂直線都以它為基準,而恆等式中每一項的投影線段正負值也都能定向地投射到這指標線上或指標線的垂直線上。

參考文獻

李輝濱(2013)。**圓內接奇數邊多邊形的正弦定律**。數學傳播季刊 37 卷 4 期。
李輝濱(2017)。**圓內接六邊形的面積**。科學教育月刊 396 期。
李輝濱(2017)。**預測與驗證平面凸多邊形面積公式**，科學教育月刊 398，399 期。
蔡聰明(2000)。**數學發現趣談**。第 12，13 章，三民書局。
林聰源(1995)。**數學史--古典篇**。凡異出版社。
項武義(1998)。**基礎分析學**。五南圖書出版公司。
E.W. Hobson(1957) : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover .
Z.A. Melzek (1983) : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons .