

# 從「勾股收納盒」談數學

李政憲

新北市立林口國民中學

筆者研究摺紙數學的關聯性已八年有餘，一開始由一場研習開始，到帶領學生於社團中摺紙，進行組合摺紙與摺紙基本型的討論，到接下來在社團中年年學生們都會參與設計與實作的名片紙組立方體課程（如圖 1、圖 2），也頗能看到學生們的創意。後因申請教育部科教專案計畫，陸續研發了不少直接與國中課程相關的課程，頗得現場教師與學生的肯定；為推廣摺紙相關課程，提高這些教案的能見度，遂於 2015 年七月份，於 FB 正式成立「藝數摺學」社團<sup>註 1</sup>。

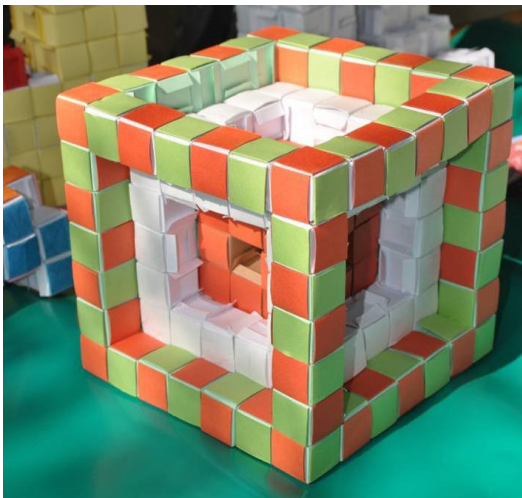


圖 1、學生作品「奇異空間」

然而在這幾年研發課程的同時，每每看到學生課程操作完後，桌上、地上一堆討論完的色紙，接下來這些紙張就要面臨



圖 2、學生作品海報展示

進到資源回收箱的命運，總會思考著除了讓這些紙張可以貼到學生們不怎麼喜歡的學習單上，如果可以用同樣的概念，進行數學討論完畢後，還可以順勢摺一個作品出來，一方面進行數學的討論，另一方面又可以作為成品收藏，也加深學生對於此課程的印象，那不是十分完美嗎？於是乎「勾股收納盒」課程的設計如是產生。

其實將摺紙與勾股定理作結合，筆者不是第一人，不過為了方便教師們操作，也讓學生們在實作後留下紀錄，於是便設計了完整的教案，配合教學用簡報與課程學習單，期使教師們操作更為方便，學生們在操作時多些感覺；也曾經於實作後新北市數學輔導團辦理的教案甄選中獲得佳

績（如圖 3），並於「藝數摺學」社團中公開分享，讓現場老師們也能方便實作（如圖 4）。而為了讓學生們加深印象與作品的實用性，於 2015 年年底，改良了原本設計為平面的「勾股收納套」後（圖 5），進階成為既美觀又實用的立體「勾股收納盒」作品（圖 6），並應香港摺友會會長招思良先生的邀請，將摺序圖畫出，公告於社團中。



圖 3、林口國中「摺紙學勾股定理」實作



圖 4、芳苑國中「摺紙學勾股定理」實作<sup>註 2</sup>

此立體作品特別的地方，在結合了三等份摺紙，討論了勾股定理的兩種證明方

式，並透過作品的自鎖結構，最後的成品兼具數學感與收納的效果。底下並針對細部的摺序圖簡單作說明。

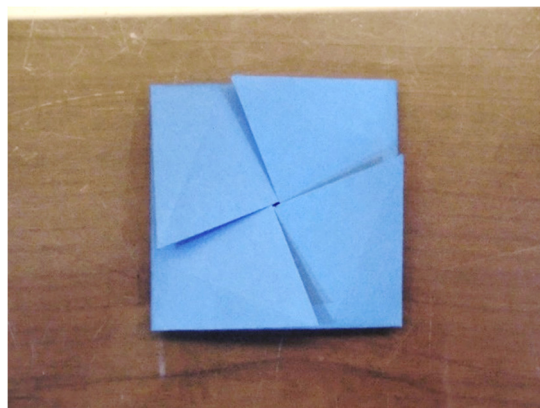


圖 5、平面「勾股收納套」作品



圖 6、立體「勾股收納盒」作品

如圖 7~9，步驟 1~3 的目的是在色紙邊上製作三等份一種常用的方式，在跟著完成的同時，不妨可一併思考利用了什麼數學原理？我們可以看到的是由於將原正方形的對角線四等份，所以左右兩個相似三角形的對應邊長比為 3:1（如圖 10），我們再透過邊長的三分之一點分別作各邊的垂線與對稱後（可以原色紙的對角線作

為對齊線)，即完成九宮格，亦即原色紙各邊長度的三分之一。

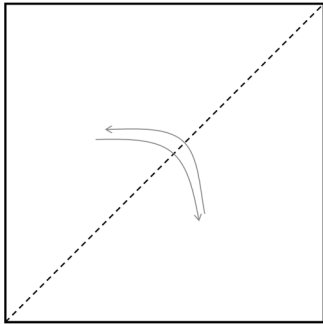


圖 7、「勾股收納盒」步驟 1

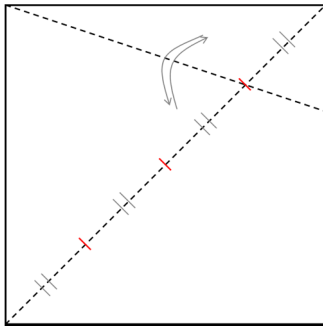


圖 8、「勾股收納盒」步驟 2

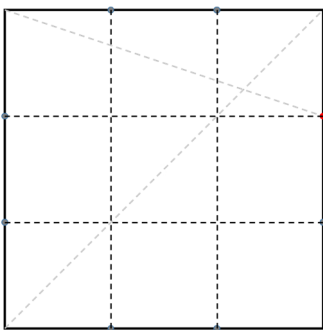


圖 9、「勾股收納盒」步驟 3

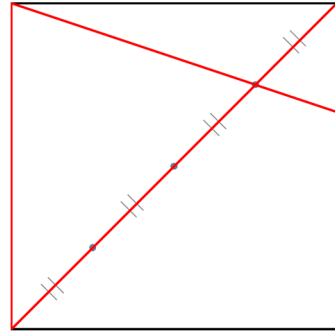


圖 10、「勾股收納盒」與相似三角形

接下來的步驟 4、5，也是這個作品原本預定討論的主要內容「勾股定理」(如圖 11、12)，透過步驟 4 的大正方形與新產生的四條摺痕，若假設四個角落的直角三角形兩股分別為  $a$ 、 $b$ ，斜邊為  $c$ ，可透過圖形觀察得到  $(a + b)^2 = c^2 + \frac{ab}{2} \times 4$ ；進一步再應用和的完全平方乘法公式  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，化簡得到  $a^2 + b^2 = c^2$  的美妙結果。而步驟 5 則是藉由  $c^2 = (a - b)^2 + \frac{ab}{2} \times 4$  的圖形，再應用差的完全平方公式  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，同樣可以得到勾股定理  $a^2 + b^2 = c^2$  的結論<sup>註 3</sup>。而在討論上述的兩個步驟的同時，不妨可以再加上四個角落的直角三角形為何全等，以及步驟 5 的作品為何為正方形的相關內容，也會對日後的全等證明學習有所幫助。

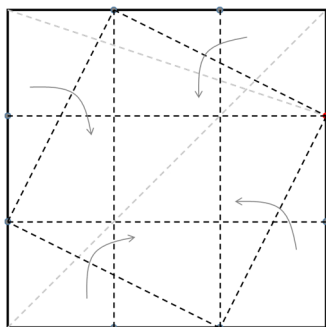


圖 11、「勾股收納盒」步驟 4

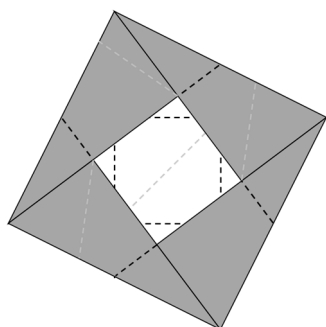


圖 12、「勾股收納盒」步驟 5

為了讓接下來的成品呈現立體的效果，步驟 6~8 的目的在摺出盒子的高度（如圖 13~15），同時也會應用到前面步驟 5 討論正方形的相關結果，加深學習的印象；而步驟 9 摺出四個直角的角平分線（如圖 18），目的在步驟 10 與步驟 11 達到自鎖的效果（如圖 17、18），最後完成如步驟 12 的成品（如圖 19）。

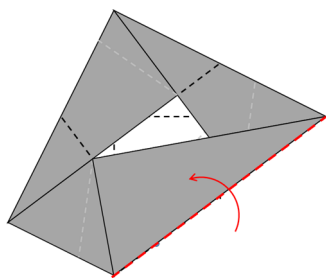


圖 13、「勾股收納盒」步驟 6

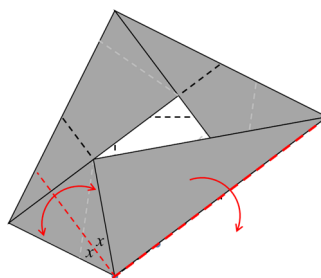


圖 14、「勾股收納盒」步驟 7

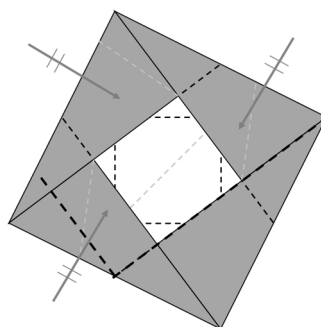


圖 15、「勾股收納盒」步驟 8

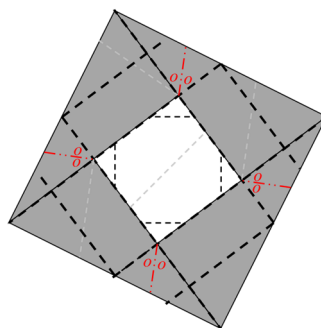


圖 16、「勾股收納盒」步驟 9

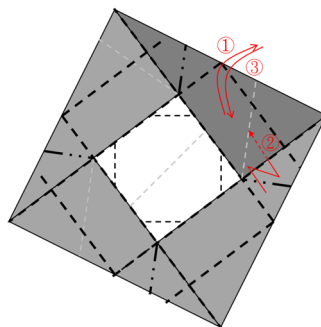


圖 17、「勾股收納盒」步驟 10

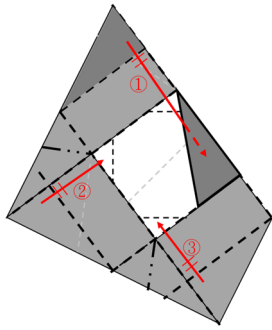


圖 18、「勾股收納盒」步驟 11

我們可以觀察出成品的上方俯視圖也恰為勾股定理中差的平方公式證明的圖示（如圖 6 與圖 19），只是細心的摺友可能會想到的是因為邊長的三分之一已給定了，那完成的作品充其量是否只能算是「勾股定理」證明的特例，不能算一般例的證明呢？事實上筆者先前設計一開始以三等份摺紙介紹的用意，在多一些數學味，也讓作品的比例較為美觀，若一開始各邊所取的等份點均相同，其實不一定要三等份，也可以完成此一作品，甚至藉由比例的計算或摺紙與數學的應用，達到互納盒中盒的效果（如圖 20），是不是十分神奇呢？

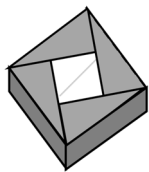


圖 19、「勾股收納盒」步驟 12 成品示意圖



圖 20、「勾股收納盒中盒」作品

而此作品一開始發表的時間，恰為過年前後，就有老師跟著實作，並在正方形紙張上印上一些富有年味的文字（如圖 21），後來筆者也以現成的材料，仿效作了頗有相同效果的作品（如圖 22），恰於農曆過年時發放，一方面介紹數學，另一方面可以收納過年時的糖果餅乾外包裝或零食外殼，也有實用的效果，只是收到的親朋好友們倒捨不得拿來用，那又是另一個意想不到的結果就是了……。

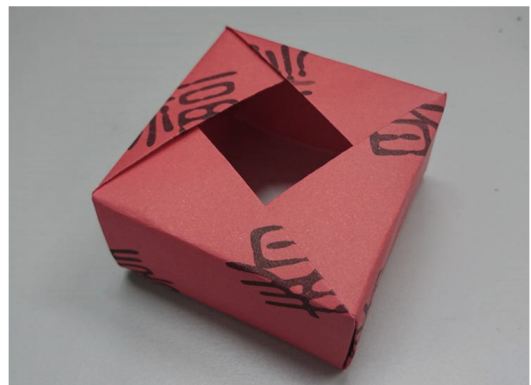


圖 21、社團網友試摺立體「勾股收納盒」作品<sup>註 4</sup>



圖 22、「勾股收納盒中盒」進階作品

有關本作品還可以進一步討論完成的作品體積，以及作為盒中盒時彼此的長度比，只是礙於篇幅與牽涉的數學較深，對數學有興趣或想深入研究的朋友們不妨先試算或試摺看看，待有機會再跟大家分享囉！

## 備註

註 1 「藝數摺學」FB 網址：

<https://www.facebook.com/groups/108923286120994/>

註 2 芳苑國中李雅文老師提供。

註 3 此摺法可作為特例介紹直角三角形三邊長關係，再適度說明其實若兩股長不為 2:1 時，一樣可以完成此作品，進一步作為接下來勾股收納盒互納效果呈現的基本概念。

註 4 仁德文賢國中王儷娟老師提供。