中學生通訊解題第 97-99 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9701

已知長方體的長、寬、高皆為質數，而長方體六個面中的其中兩個面的面積和為 210，試問這樣的長方體體積的最大值為何？

簡答：3567

參考解答：

設長方體的長、寬、高分別為 a,b,c 。

(1)若這兩個面為對面的兩個面，不失一般性， $2ab=210$ ，即 $ab=105$ 。
這和 a,b 皆為質數矛盾！

(2)若這兩個面非對面的兩個面，不失一般性， $a(b+c)=210$ 。因為 a 為質數，所以有下列四種可能： $(a+b+c)=(2,105),(3,70),(5,42),(7,30)$ 。我們知道當兩正數和固定時，要此兩正數乘積越大，必須此兩正數越集中。為了求體積的最大值，根據上述這四種演變出 $(a,b,c)=(2,2,103),(3,29,41),(5,19,23),(7,13,17)$，經計算最大值為 3567 。

【評析】

同學們大都分成此兩面為相鄰或相對這兩種情況討論，然後再利用三邊長為質數的概念求出可能的情形，進而求出最大值；而得到部份分數的同學是因為只探討其中一種情況，雖然得到了正確答案，但因為未顧及所有情況，而扣一些分數。

問題編號
9702

設 x、y、$z\in R$，若 $xy+yz+zx=1$，求 $x+y+z$ 的範圍。

簡答：$x+y+z\le-\sqrt{3}$ 或 $x+y+z\ge\sqrt{3}$

參考解答：

$\because\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$

$\Rightarrow (x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\ge 0$

$\Rightarrow (x+y+z)^2\ge 3 \Rightarrow x+y+z\le-\sqrt{3}$ 或 $x+y+z\ge\sqrt{3}$ 。

等號成立 $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【解題重點】

上述解法是利用「平方和≥ 0」的概念，透過配方法利用乘法公式「$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$」以求得 $x+y+z$ 的範圍。同學千萬要

記得，解不等式時，不論用何種方法，最後一定要記得檢查是否會成立。

問題編號
9703

(1) ΔABC 中，$\overline{AB}=c, \overline{AC}=b, \angle BAC=120^{\circ}$，試求 $\overline{BC}$ 。

(2) ΔABC 中，$\overline{AB}=5, \overline{BC}=7, \overline{CA}=8$，則其第二大角的角度為何？

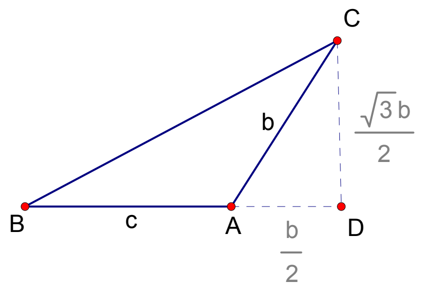
(3)若三正實數 x, y, z 滿足 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=25 \\ y^2+yz+z^2=49 \\ z^2+zx+x^2=64 \end{cases}$，則 $x+y+z$ 之值為何？

簡答：(1) $\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2+bc}$　　(2) 60°
(3) $\sqrt{129}$

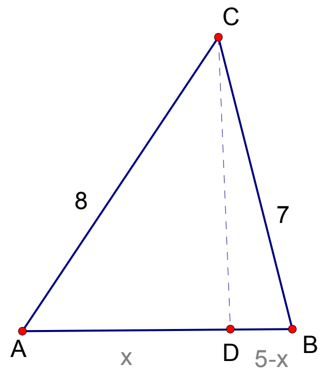
參考解答：

(1)如圖過 C 做 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overline{CD}$，則

$$\overline{BC}=\sqrt{(c+\frac{1}{2}b)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2}=\sqrt{b^2+c^2+bc}\text{ 。}$$



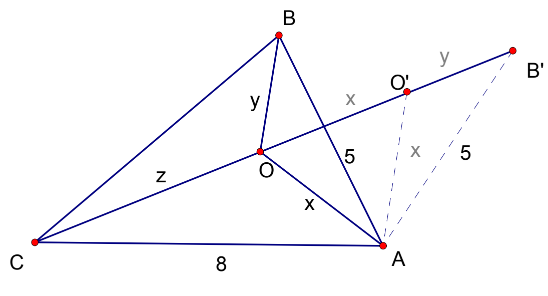
(2)如圖過 C 做 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overline{CD}$，令 $\overline{AD}=x$，則 $8^2-x^2=7^2-(5-x)^2$，可得 $x=4$，則高 $\overline{CD}=4\sqrt{3}$，故 $\angle BAC=60^{\circ}$



(3)[方法 1]

構造一個 ΔABC 及其內部一點 O，使其滿足 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^{\circ}$ 且 $\overline{OA}=x, \overline{OB}=y, \overline{OC}=z$，由(1)可知 $\overline{AB}=5, \overline{BC}=7, \overline{CA}=8$ 由(2)可知 $\angle BAC=60^{\circ}$，把 ΔABO 旋轉 60° 至 $\Delta AB'O'$，可得 $\overline{OO'}=\overline{OA}$，$\angle CAB'=120^{\circ}$ 且 C, O, O', B' 共線，則由(1)，

$$\overline{CB'}=x+y+z=\sqrt{8^2+5^2+8\cdot 5}=\sqrt{129}\text{ 。}$$



[方法 2]

利用 $\angle OCA=60^{\circ}-\angle OAC=\angle OAB$，且設 $\angle COA=\angle AOC=120^{\circ}$，

可得 $\Delta AOC\cong\Delta BOA$，設

$$\Rightarrow \frac{x}{z}=\frac{y}{x}\Rightarrow x^2=yz\text{，}$$

則由原條件可得 $x^2+y^2+z^2=49$，並可得 $xy+yz+zx=40$，則

$$x+y+z=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}=\sqrt{129}$$

。

[方法 3]

利用三小塊的面積和等於全部的面積

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot y\cdot z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot z\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

可得 $xy+yz+zx=40$，再利用方法二即可。

【評析】

這樣的題目主要要使用的國中工具是商高定理再加上代數與幾何的連結，當然也可以使用三角函數的餘弦定理與面積公式，作答的同學都能表達清楚且各有自己的想法，想法均具巧思，頗令人驚豔。

問題編號

9704

在面積是 99 平方單位的矩形中，放置著九個面積 15 的矩形。

求證：其中必有兩個矩形的重疊部分的面積大於或等於 1。

參考解答：

若不然，則任何兩個矩形的重疊部分的面積都小於 1。

我們任意給九個矩形編號，並設想九個矩形是依次放上去的。

先放 1 號矩形蓋住了大矩形的部分面積為 15；然後放 2 號矩形，大矩形被蓋住的部分面積增加值大於 14，依此類推，當已放好 k 號矩形，而又放上去 $k+1$ 號矩形時，大矩形被蓋住面積的增加值大於 $15-k$。

從而當九個矩形被放上去時，

蓋住的總面積大於 15+14+13+12+11+10+9+8+7=99，此與已知矛盾。

問題編號

9705

設 a_n 表示與 $\sqrt{n}$ 最接近的整數（n 為正整數），試求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2012}}$。

簡答：$88\frac{32}{45}$

參考解答：

若 $a_n=k$，則 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow k^2-k+1\le n\le k^2+k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{k^2-k+1}}+\frac{1}{a_{k^2-k+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{k^2-k}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{k}}_{2k\text{項}}=\frac{1}{k}\times 2k=2$$

又 $1981=45^2-45+1\le 2012\le 45^2+45=2070$

$\Rightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2012}}=\frac{1}{1}\times 2+\frac{1}{2}\times 4+\cdots\cdots+\frac{1}{44}\times 88+\frac{1}{45}\times(2012-1981+1)$

$=2\times 44+\frac{1}{45}\times 32=88\frac{32}{45}$ 。

問題編號 9801

求 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}$ 的小數點後第一位數字。

簡答：9

參考解答：

由乘法的分配律或二項式定理，

可得 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ 為整數，

又因 $0<(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}<0.2^{1006}<(0.008)^{300}$ ，

因此 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}$ 的小數部分為 $1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ ，

所以， $0.9<1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}<1$ ，

可知 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}$ 的小數點後第一位數字是 9。

【評析】

1. 求 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}$ 的小數點後第一位數字，直接運算或是估計，並不容易；而 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ 的估計是可行的，再加上 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ 為整數，此題便能迎刃而解。這是解此題的想法。

2. 由乘法的分配律，可得 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ 為整數，這是國中程度即可解決。以二項式定理的詳細解法如下：

(1) 二項式定理：

設 n 為正整數，x、y 為任意數，則

$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\Lambda+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$

(2) $\sqrt{2}^{\text{正偶數}}$ ，$\sqrt{3}^{\text{正偶數}}$ 為整數；又

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}=C_0^{2012}\sqrt{2}^{2012}+C_1^{2012}\sqrt{2}^{2011}\sqrt{3}+C_2^{2012}\sqrt{2}^{2010}\sqrt{3}^2+C_3^{2012}\sqrt{2}^{2009}\sqrt{3}^3+\Lambda+\Lambda+C_{2012}^{2012}\sqrt{3}^{2012}$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}=C_0^{2012}\sqrt{2}^{2012}-C_1^{2012}\sqrt{2}^{2011}\sqrt{3}+C_2^{2012}\sqrt{2}^{2010}\sqrt{3}^2+C_3^{2012}\sqrt{2}^{2009}\sqrt{3}^3+\Lambda-\Lambda+C_{2012}^{2012}\sqrt{3}^{2012}$

兩式相加，得

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2012}$ 為整數

問題編號 9802

已知 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 都是質數，並且 $p_1-p_2=p_2-p_3=p_3-p_4=p_4-p_5>0$ 。則 p_1 的最小可能值為何。

簡答：29

參考解答：

設 $p_4 - p_5 = d$ ，則 $p_4 = p_5 + d$ ，$p_3 = p_5 + 2d$ ，…， $p_1 = p_5 + 4d$ 。

若 2 不是 d 的因數，則 p_3, p_4 中有一個為偶數，矛盾；若 3 不是 d 的因數，則 p_1, p_2, p_3 中有一個數為 3 的倍數，矛質；故 6 是 d 的因數，取 d 的最小值為 6。

類似地，若 5 不是 d 的因數，則 $p_1,...,p_5$ 中必有一個是 5 的倍數，故取 $p_5 = 5$，此時 5, 11, 17, 23, 29 符合要求，所以 p_1 的最小值為 29。

【評析】

同學們由題目中判斷出 P_1 至 P_5 實際為一等差數列，大部分同學從公差的奇偶性出發，立即看出公差必為偶數，進而開始分情況討論。而得到部分分數的同學是因為在說明時有不清楚或不合理之處，而扣一些分數。同學們大都分成此兩面為相鄰或相對這兩種情況討論，然後再利用三邊長為質數的概念求出可能的情形，進而求出最大值；而得到部份分數的同學是因為只探討其中一種情況，雖然得到了正確答案，但因為未顧及所有情況，而扣一些分數。

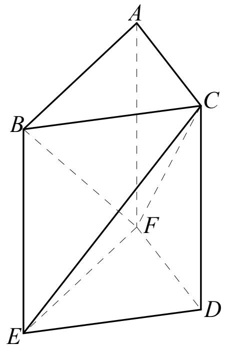
問題編號
9803

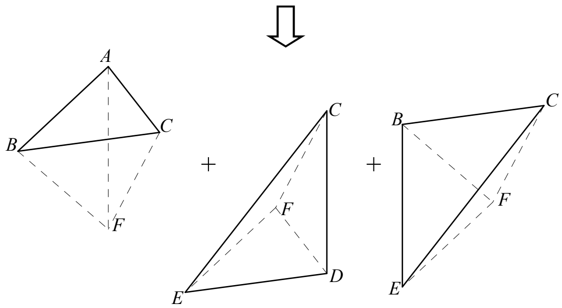
一個直立的三角柱能否切割成三個等體積的三角錐體？請證明之。

簡答：可以

參考解答：

證明三角錐體積為同底且同高三角柱體積的 $\frac{1}{3}$ 。





可切割為三角錐 $FABC$、三角錐 $CDEF$、三角錐 $EBCF$

在三角錐 $FABC$ 和三角錐 $CDEF$ 中

$\because \Delta ABC \cong \Delta DEF$，且 $\overline{AF} = \overline{DC}$ $\therefore$ 高相同

根據<u>祖暅定理</u>知，三角錐 $FABC$ 和三角錐 $CDEF$ 體積相同……(1)

在三角錐 $FCDE$ 和三角錐 $FCBE$ 中

$\because \Delta CDE \cong \Delta EBC$，且 $d(F,$平面 $BCD) = d(F,$平面 $BCDE) = d(F,$平面 $CDE)$

$\therefore$ 高相同

根據<u>祖暅定理</u>知，三角錐 $FCDE$ 和三角錐 $FCBE$ 體積相同……(2)

由(1)(2)得三角錐 $FABC$、三角錐 $CDEF$、

三角錐 $EBCF$ 體積相同，

又三角錐 $FABC$、三角錐 $CDEF$、三角錐 $EBCF$ 體積和等於原三角柱體積

$\therefore$ 三角錐 $FABC$、三角錐 $CDEF$、三角錐 $EBCF$ 之體積皆為三角柱體積之 $\frac{1}{3}$ 倍。

【解題重點】

由祖暅定理，我們知道同底且同高的錐體在等高處的橫截面面積相等。本題之解法是將三角柱體切割成 3 個三角錐體，再證明這 3 個三角錐體之體積兩兩相等，從而證明三角柱體可切割為 3 個體積相等的三角錐體。

問題編號

9804

(1)試檢驗 $9999993, 9999994, \Lambda, 10000006$ 這 14 個連續整數任意一個數的各位數字之和均不能被 8 整除。

(2)承接第(1)題，試確定 n 的最小值，使得對於任意 n 個連續正整數中，總存在一個數的各位數字之和是 8 的倍數。並說明理由。

參考解答：

(1) 此 14 個連續整數的數字之和分別為

$\underbrace{57, 58, 59, \ldots, 63}_{7個}, \underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}_{7個}$，

明顯均不能被8整除。

(2) 由第(1)題可知，當 $n=14$ 時，對於 $9999993, 9999994, \Lambda, 10000006$ 這 14 個連續整數，任意一個數的數字之和均不能被 8 整除。同理可證，

$n \le 14$ 時，題設的性質均不成立。

因此，要使題設的性質成立，應有 $n \ge 15$。

再證 $n=15$ 時，題設的性質成立。

設 $a_1, a_2, \Lambda, a_{15}$ 為任意的連續 15 個正整數，則這 15 個正整數中，個位數字為 0 的整數最多有兩個，最少有一個，可分為：

(a)當 $a_1, a_2, \Lambda, a_{15}$ 中個位數字為 0 的整數有兩個時：

設 $a_i < a_j$，且 a_i、a_j 的個位數字為 0， 則滿足 $a_i, a_i+1, \Lambda, a_i+9, a_j$ 為連續的 11 個整數，其中 $a_i, a_i+1, \Lambda, a_i+9$ 無進位。

設 n_i 表示 a_i 各位數字之和，則 $a_i, a_i+1, \Lambda, a_i+9$ 這 10 個數的各位數字之和分別為 $n_i, n_i+1, \Lambda, n_i+9$。

故這連續的 10 個數中至少有一個被 8 整除。

(b)當 $a_1, a_2, \Lambda, a_{15}$ 中個位數字為 0 的整數只有一個時(記為 a_i)：

(i)若整數 i 滿足 $1 \le i \le 8$，則在 a_i 後面至少有 7 個連續整數。
於是， $a_i, a_i+1, \Lambda, a_i+7$ 這 8 個連續整數的各位數字和也為 8 個連續整數。
所以，必有一個數能被 8 整除。

(ii)若整數 i 滿足 $9 \le i \le 15$，則在 a_i 前面至少有 8 個連續整數，不妨設為 $a_i-8, a_i-7, \Lambda, a_i-1$，這 8 個連續整數的各位數字和也為 8 個連續整數。所以，必有一個數能被 8 整除。

綜上，對於任意 15 個連續整數中，必有一

個數，其各位數字之和是8的倍數。而小於15個的任意連續整數不成立此性質。

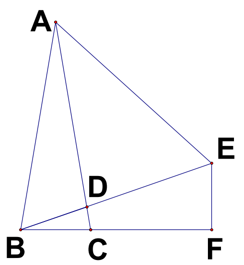
所以，n的最小值是15。

【解題重點】

1. 第(1)小題提示，當 $n \le 14$ 時，讓第(2)小題題設的性質均不成立的反例構造法。以及證明 $n \ge 15$ 題設成立時，最重要的關鍵點。
2. 由於任8個連續正整數中，必有一個8的　倍數，又對於十位數字相同的連續正整數，其各位數字和亦為連續正整數，
   因此任8個十位數相同的連續正整數，必有一個數為8的倍數。
3. 欲證明 $n = 15$ 時，題設的性質成立。
   重點在將任意的連續15個正整數，分為個位數字為0的整數恰兩個或恰一個去討論。
   (a)若個位數字為0的整數恰兩個：
   則此15個連續正整數中就有10個連續正整數其十位數相同，因此其中必有一個數為8的倍數。
   (b)若個位數字為0的整數恰一個：
   由鴿籠原理 $15 \div 2 = 7 \Lambda 1$，可看出此15個連續正整數中至少有8個十位數相同的連續正整數，因此其中必有一個數為8的倍數。
4. 最後要說明n的最小值為15，必須強調　$n = 15$ 時，滿足題設，但 $n \le 14$，皆不滿足題設，才算完整。

問題編號
9805

如圖，△ ABC 為等腰三角形，其中 $\overline{AB} = \overline{AC} = 9, \overline{BC} = 3$，而在線段 $\overline{AC}$ 上取一點 D，使得 $\overline{BD} = 3, \overline{CD} = 1$，在射線 $\overrightarrow{BD}$ 上取一點 E，使得 $\angle DAE = 2\angle BAD$，而過 E 點作直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 F 點，試求：$\overline{CF}$ 的長度。



簡答：$\dfrac{140}{27}$

參考解答：

先作 $\angle DAE$的角平分線交 $\overline{DE}$ 於 G 點，

再過 E 點作 $\overline{AC}$ 的平行線交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 H 點，

因為三邊長成比例，

所以△ ABC ~△ BCD (SSS 相似)，故 $\angle CBD = \angle BAD$；

在 △ BCD 和 △ ADG 中，因為 $\angle CBD = \angle DAG, \angle BDC = \angle ADG$，

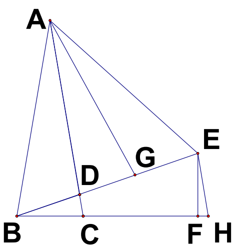
所以△ BCD ~△ AGD (AA 相似)，得

$\overline{AD} = \overline{AG} = 8, \overline{DG} = \dfrac{8}{3}$；

在 △ ABD 和 △ AEG 中，因 $\angle BAD = \angle EAG, \angle ADB = \angle AGE, \overline{AD} = \overline{AG}$，所

以△ $ABD \cong$ △ AEG (ASA 全等)，得 $\overline{EG}=3$。因為 $\overline{CD}$ 和 $\overline{EH}$ 是平行線，所以 $\overline{CH}=\frac{17}{3}, \overline{EH}=\frac{26}{9}$，另外 $\angle ACB=\angle EHF$，再加上△ ABC 為等腰三角形，所以 $\overline{FH}=\frac{13}{27}$，

故 $\overline{CF}=\frac{17}{3}-\frac{13}{27}=\frac{140}{27}$。



【解題重點】

同學們都是先作 $\angle DAE$ 的角平分線，進而利用相似形得到一些線段的長度，最後再利用面積的概念求出 $\overline{CF}$ 的長度。而得到部份分數的同學是在計算面積時出錯了，有些可惜!!

問題編號
9901

已知自然數 n 除以 35、55、77 之餘數分別是 a、b、$a+2b$，其中 $ab \neq 0$，求 a、b 之值。

簡答：$a=19$，$b=14$ 或 $a=1$，$b=21$

參考解答：

由 n 除以 35 的餘數為 a，知 $n-a$ 是 5 與 7 之公倍數，$0<a<35$；

由 n 除以 55 的餘數為 b，知 $n-b$ 是 5 與 11 的公倍數，$0<b<55$；

由 n 除以 77 的餘數為 $a+2b$，知 $n-(a+2b)$ 是 7 與 11 的公倍數，$0<a+2b<77$，

可得 $5 \mid n-a$ 且 $5 \mid n-b$；$7 \mid n-a$ 且 $7 \mid n-(a+2b)$；

$11 \mid n-b$ 且 $11 \mid n-(a+2b)$，

因此，$5 \mid (a-b)$；$7 \mid 2b \Rightarrow 7 \mid b$；$11 \mid (a+b)$。

令 $a+b=11x$，$a-b=5y$，x, y 都是整數，

則 $11x+5y=2a$，$11x-5y=2b$，

若 (α,β) 為不定方程式 $11x-5y=2b$ 的一組整數解，則 $x=\alpha+5t$，$y=\beta+11t$ $\Rightarrow$

$a=\frac{11\alpha+5\beta}{2}+55t$，$t$ 是整數，因為 $7 \mid b$，

又 $0<a<35$、$0<b<55$、$0<a+2b<77$，討論如下：

(1) $b=7$ 時，$0<a<35$，取 $(\alpha,\beta)=(4,\ 6)$

$\Rightarrow$ $a=37+55t$，沒有適合解

(2) $b=14$ 時，$0<a<35$，取 $(\alpha,\beta)=(8, 12)$

$\Rightarrow a=74+55t \Rightarrow a=19$

(3) $b=21$ 時，$0<a<35$，取 $(\alpha,\beta)=(12, 18)$ $\Rightarrow a=111+55t \Rightarrow a=1$

(4) $b=28$ 時，$0<a<21$，取 $(\alpha,\beta)=(16, 24)$ $\Rightarrow a=148+55t$，沒有適合解

(5) $b=35$ 時，$0<a<7$，，取 $(\alpha,\beta)=(20, 30)$ $\Rightarrow a=185+55t$，沒有適合解。

所以 $a=19$，$b=14$ 或 $a=1$，$b=21$。

【評析】

這個問題的核心概念是除法原理：被除數

=除數 ×商 +餘數，其中餘數為 0 或餘數的大小介於除數與 0 之間。本題依據除法原理，在題設條件下，立可界定出 a、b 二數的範圍，並推演得知 b 為 7 的倍數、$a-b$ 是 5 的倍數、$a+b$ 是 11 的倍數。掌握住這些資料之後，只要找到適當的切入點，從而思考開始一些推演與討論，即可尋得 a、b 之值。

以上詳解只是一種較為系統化的討論示例，提供同學參考。

問題編號

9902

若 x,y,z,u 均為正實數，已知

$2009x^2=2010y^2=2011z^2=2012u^2$ 且

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=1$，求

$\sqrt{2009x+2010y+2011z+2012u}$ 之值。

簡答：$\sqrt{2009}+\sqrt{2010}+\sqrt{2011}+\sqrt{2012}$

參考解答：

設 $2009x^2=2010y^2=2011z^2=2012u^2=t>0$

代入 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2009}{t}}+\sqrt{\frac{2010}{t}}+\sqrt{\frac{2011}{t}}+\sqrt{\frac{2012}{t}}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{t}=\sqrt{2009}+\sqrt{2010}+\sqrt{2011}+\sqrt{2012}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2009x+2010y+2011z+2012u}$$

$$=\sqrt{\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+\frac{t}{u}}=\sqrt{t}$$

$$=\sqrt{2009}+\sqrt{2010}+\sqrt{2011}+\sqrt{2012}$$ 。

【解題評註】

本題利用變數變換，將四個變數統一成為單一變數，再進行適當的代數運算即可。

問題編號

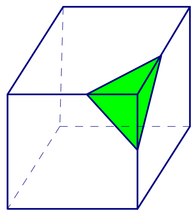
9903

用一平面截一個正立方體所成之截面可能是幾邊形？請舉例。

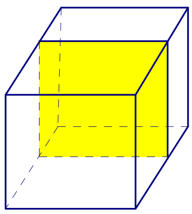
簡答：3 邊形、4 邊形、5 邊形、6 邊形

參考解答：

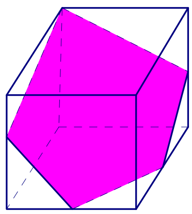
3 邊形



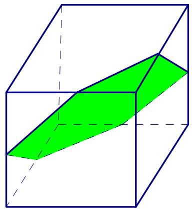
4 邊形



5 邊形



6 邊形



【解題重點】

本題是典型的空間概念問題，可直接將一平面截一個正立方體所成之各種截面圖示如上。值得一提的是上面的第四圖，當 6 個頂點恰為各稜中點時，此 6 邊形是一個正 6 邊形，且原正立方體會被切成兩個全等的立體圖形。

問題編號
9904

如圖，由編號 1~9 號的九個邊長為 1 的小正方形(單位正方形)所構成的邊長為 3 的大正方形，

1	2	3
4	5	6
7	8	9

每一個單位正方形方格都要塗成全黑或全白，若此 3×3 單位正方形所成之方格中沒有一個 2×2 單位正方形所成方格為全黑，試問符合此條件的塗法數有幾種？

簡答：417

參考解答：

令 $n(E)=$「至少有一個 2×2 黑色正方形」的塗法數；

$Q_i=$「左上角編號為 i 的 2×2 黑色正方形」的事件，$i=1,2,4,5$；

$n(Q_i)=$「左上角編號為 i 的 2×2 黑色正方形」的塗法數，$i=1,2,4,5$，則

$n(E)$

$=n(Q_1)+n(Q_2)+n(Q_4)+n(Q_5)$

$-[n(Q_1\cap Q_2)+n(Q_1\cap Q_4)+n(Q_1\cap Q_5)$

$+n(Q_2\cap Q_4)+n(Q_2\cap Q_5)+n(Q_4\cap Q_5)]$

$+[n((Q_1\cap Q_2\cap Q_4)+n(Q_2\cap Q_4\cap Q_5)+n(Q_2$

$\cap Q_4\cap Q_5)]-n(Q_1\cap Q_2\cap Q_4\cap Q_5)$

$=4\times2^5-[4\times2^3+2\times2^2]+4\times2-1=95$，

所求 $=2^9-95=417$。

【評析】

本題只需對排容原理(又稱容斥原理)有一定的理解，再加上適當的集合(事件)的分類與謹慎的計算，應可輕易答對。

問題編號
9905

某次數學考試共有 15 題，下表是做對 $n(n=0,1,2,\Lambda,15)$ 題的人數統計表，如果其中做對 4 題以上(含 4 題)的學生每人平均做對 6 題，做對 10 題以下(含 10 題)的學生每人平均做對 4 題，則這個表至少統計

了多少人？

n	做對 n 題人數
0	7
1	8
2	10
3	21
⋮	⋮
12	15
13	6
14	3
15	1

簡答：200

參考解答：

令做對 $n(n=0,1,2,\Lambda\ ,15)$ 題的人數分別為 $a_0,a_1,a_2,\Lambda\ ,a_{15}$，

由表可易知

$a_0+a_1+a_2+a_3=46,\ 0a_0+1a_1+2a_2+3a_3=91$，

$a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=25,\ 12a_{12}+13a_{13}+14a_{14}+15a_{15}=315$，

另依題意

$$\frac{4a_4+5a_5+6a_6+\Lambda\ +15a_{15}}{a_4+a_5+a_6+\Lambda\ +a_{15}}=6 \text{ 且}$$

$$\frac{0a_0+a_1+2a_2+\Lambda\ +10a_{10}}{a_0+a_1+a_2+\Lambda\ +a_{10}}=4 \text{ ，則}$$

$4a_4+5a_5+6a_6+\Lambda\ +15a_{15}=6(a_4+a_5+a_6+\Lambda\ +a_{15})$

且

$0a_0+a_1+2a_2+\Lambda\ +10a_{10}=4(a_0+a_1+a_2+\Lambda\ +a_{10})$

，相減可得(令 $T=a_0+a_1+a_2+\Lambda\ +a_{15}$)

$(11a_{11}+12a_{12}+\Lambda\ +15a_{15})-(0a_0+1a_1+2a_2+3a_3)$
$=6(a_4+a_5+a_6+\Lambda\ +a_{15})-4(a_0+a_1+a_2+\Lambda\ +a_{10})$

$=6[T-(a_0+a_1+a_2+a_3)]-4[T-(a_{11}+a_{12}+\Lambda\ +a_{15})]$

$=4(a_{11}+a_{12}+\Lambda\ +a_{15})-6(a_0+a_1+a_2+a_3)+2T$
$=4a_{11}+4(a_{12}+\Lambda\ +a_{15})-6(a_0+a_1+a_2+a_3)+2T$

，代入已知 $T=200+3.5a_{11}$，故當 $a_{11}=0$ 時，總數 T 有最小值 200。

而下表為一種總數 200 且符合各條件的可能。

n	人數
0	7
1	8
2	10
3	21
4	36
5	93
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	15
13	6
14	3
15	1

【評析】

這樣的題目是個半開放式的題目，主要是使用已知的條件推出總數與第 11 項的關係，基本上每個同學都能找到這個關係並寫出最小值來，但是是否有真正的一組解可以支持這個最小值是非常重要的，可惜的是大部分的同學的都未著墨於這個點，這個問題在高中學生當中也很常見，希望中學教育的老師能多幫助學生注意這個觀念。