數學算板中碎形觀察及探索的工具

林保平

臺北市立大學數學系退休副教授

一、數學算板內建的碎形簡介

碎形（fractal）是重複或放縮地展示一個（或若干個）花樣(或圖案)的自然現象或數學集合的圖像。如果圖像中各花樣除大小外都完全一樣，稱其具有自我相似(self-similar)的特性。而碎形的數學根源就是遞迴(recursion)的概念。

遞迴定義(recursive definition)是定義一個無限序列x_{n}的方法。這個定義有兩個部分:基本(base)及歸納(induction)。基本部分定義序列的起始值，歸納部分根據第 n 及之前的項，定義出第 n+1 項。例如階乘函數 n!的遞迴定義就是：

（1）$x_0 = 1$　　　　（2）$x_{\mathrm{n+1}} = (\mathrm{n}+1)x_{\mathrm{n}}$ ，$n > 0$。

又如費波拉漆數列(Fibonacci sequence)的遞迴定義就是：

（1）$x_0 = 1$，$x_1 = 1$　　　　（2）$x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ ，$n > 0$。

透過遞迴定義求出無限序列的各項，稱為迭代（iteration)，n 稱為迭代的層次(stage)。在不同的起始點同時進行若干個迭代時，「層次」的意義就有別於迭代的次數。透過迭代求出一個無窮序列的各項，並將各項以圖示而得的圖形整體就是碎形。將碎形圖案的部分放大後，可看到與整體相似的圖形。

數學算板(MathBoard, http://mathboard.tw)內建了一些常見的碎形構圖及探索的程式工具，如雪花(Koch snowflake)碎形、席爾平斯基(Sierpinski)碎形、勾股樹(Pythagoras)碎形、邦思理蕨葉(Barnsley Fern)碎形、曼德布洛特(Mandelbrot)碎形、朱立亞(Julia)碎形及牛頓(Newton)碎形。前三者是線段或其內部構成的碎形，其他是複函數點集合構成的碎形。

邦思理蕨葉碎形是 Barnsley(1993)透過下列迭代函數系統（Iterated function system）

$$f_1(x,y) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x,y) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

$$f_3(x,y) = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

$$f_4(x,y)=\begin{bmatrix}0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

建立的碎形實例。電腦繪圖時，程式首先畫出原點（0，0），然後根據指定的機率 p_i，隨機選出上述四個函數中的一個來得到下一個點，依次迭代。迭代的次數足夠之後，就可以得到清楚的蕨葉碎形。而p_i 的起始值是根據 Barnsley 提出的下列公式決定的。設 $f_i(x,y)=A_i\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+t_i$，其中$\mathrm{A}_i=\begin{bmatrix}\mathrm{a_i} & \mathrm{b_i}\\ \mathrm{c_i} & \mathrm{d_i}\end{bmatrix}$，$t_\mathrm{i}=\begin{bmatrix}\mathrm{e_i}\\ \mathrm{g_i}\end{bmatrix}$，我們定$p_\mathrm{i}\approx\frac{|\det(\mathrm{A_i})|}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}|\det(\mathrm{A_i})|}$，其中 i=1,2,3,⋯N。

曼德布洛特碎形、朱立亞碎形及牛頓碎形是根據下列集合 M，J，N，迭代分辨點是否在該集合內，分別塗色之後作出的圖形。

曼德布洛特集合（Mandelbrot Set）M 的數學定義是

$$M=\left\{a\in\mathbb{C}\middle|\lim_{n\to\infty}Z_n\neq\infty\right\}$$

其中：

$Z_0=a$，$Z_{n+1}=f_a(Z_n)$，f_a為含有一個複常數 a 的複變數函數 f。也就是說，曼德布洛特集合是一個符合上述條件的複數集合，對於任意複數 a，若 n 趨近於無限大，而迭代的函數 $\mathrm{Z_n}$不趨近於無限大時，a 就是該集合的元素。前述條件中，最常見到的迭代函數是 $f_a(z)=z^2+a$，可一般化到函數$f_a(z)=z^d+a$，其中 d 為整數，也有人研究函數$f_a(z)=z^3+az$ 的曼德布洛特集合。

朱立亞集合（Julia Set）J 的數學定義是

$$J=\left\{c\in\mathbb{C}\middle|\lim_{n\to\infty}Z_n\neq\infty\right\}$$

其中：

$Z_0=c$，$Z_{n+1}=f_a(Z_n)$，$a\in\mathbb{C}$，f_a 為含有複數常數 a 的複變數函數 f。其定義與曼德布洛特集合相似，但對一個函數，曼德布洛特集合只有一個，而朱立亞集合卻有無限多個，每一個常數 a 都有一個朱立亞集合。朱立亞集合中的函數通常定義為$f_a(z)=\frac{p(z)}{q(z)}+a$，其中 p,q 為複係數多項式，也有研究其他函數的朱立亞集合。

牛頓集合 N 的數學定義是 $N=\left\{c\in\mathbb{C}\middle|\lim_{n\to\infty}Z_n=\xi_d\right\}$

其中：

$$Z_0=c，Z_{n+1}=Z_n+a\frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}，a\in\mathbb{C}，f(\xi_d)=0$$

，牛頓集合其實是朱立亞集合的特例，a 通常為 1，取名牛頓是因為使用「牛頓法」求方程式$f(z)=0$解的近似值。

由於迭代的序列是無窮序列，繪圖時無法畫出無窮的線段或點，前三者我們會訂出迭代的層次，只畫出該層次內的線段。對於 M，J，N 點集合的碎形，我們會內定一個畫圖框，在此圖框內的每一點，分別測試判斷是否為點集合內的點（不趨近無限大或趨近方程式的根），集合內的點與集合外的點分別塗上不同的顏色。由於我們不可能測試或迭代無限多次，因此我們就訂出了迭代的「最大次數」。判斷序列是否趨近於無限大時，若迭代所得的複數值絕對值大於 4(此時的迭代次數稱為逸出次數(escape time))，則該序列通常都會趨近無限大。因此，迭代測試時，若發現「逸出」時，我們就知道該點不在點集合裡，若測試到了迭代的「最大次數」尚未逸出，我們就把此點「視為」集合內的點。若序列要趨近一個函數的根，我們就訂出接近該根的容許值，達到容許值的點就視為函數的根，測試到迭代「最大次數」尚未達到容許值，此序列就當作「不趨近於根」，此點就「視為」不是集合內的點。畫圖框範圍愈大、容許值愈小或迭代「最大次數」定得愈大，程式運行可能就需要更長的時間。

數學算板以 java 語言建立，除了透過主程式在桌上型電腦執行之外，內建的這些碎形探索工具，可以分別整理儲存為 java web star 啟動的網頁程式。以下我們探討各種碎形探索程式共同具有的功能，然後分項討論各種碎形探索工具。

二、碎形構圖及探索工具的共同特性

碎形構圖及探索工具，具有下列特性，我們先分條加以敘述，在分類討論工具時，再舉出實例。

（1）局部放縮或整體放縮—為探索碎形的自我相似性質，對於點集合的碎形，我們內建了用滑鼠拖曳畫出矩形（若圖形不是獨立視窗需按 Shift 再拖曳出矩形），並將該矩形內的圖形放大的功能，方便使用者觀察局部圖形與整體圖形的相似性質。對於線段碎形，我們提供了整體旋轉（透過一個隱藏的旋轉點）及圖形「大小」選擇或輸入的功能。

（2）解析度或迭代層次選擇—由於點集合繪圖時，高解析度繪圖比較費時，我們提供了不同的解析度，可在探索時作選擇，對於繪圖費時的碎形，可先用低解析度繪圖，探索其大略形狀，或觀察參數對圖形形狀的影響，需要較清楚的圖形時，才畫出高解析度的圖形。對於線段碎形，選擇不同的層次可觀察圖形迭代的狀況。

（3）內建參數選擇及參數微調滾輪(spinner)—由於有些參數繪出的圖形並不十分有趣，

我們提供了參數的選擇框，內建了一些常見的參數，使用者可以選擇這些參數來觀察參數對圖形的影響，當然也可以自行輸入參數來觀察輸入參數的圖形。選了參數或自訂參數時，這些參數就會被指定到參數滾輪。參數滾輪是一個有上下界的數字框，邊上有上、下三角形箭頭，可在上、下界之間上下微調改變數值。透過滾輪微調，可以改變參數及觀察參數變化時圖形的動態變化，也可以直接輸入新的滾輪數值，再加以變化。滾輪參數滾動變化的步幅（間距），也可以透過「步幅」輸入框加以改變。

（4）選擇函數或輸入函數—若碎形工具有展示函數，使用者可以透過數學算板編輯函數的選項來改變函數，若有展示函數選擇或輸入框，則可選擇內定的函數，或依規定的方式輸入函數，以觀察及探索新函數構成的圖形，複函數碎形在數學算板上使用的函數$f_a(z)$限定使用複常數變數 a。

（5）選擇或輸入著色系統—對於線段碎形，有的可以透過數學算板的顏色選項來改變碎形的顏色。對於點集合的碎形，我們提供了兩類著色方式，不同的著色構成的碎形大異其趣。朱立亞集合及曼德布洛特集合塗色基本上是根據確定「逸出的次數」，若在迭代「最大次數」內無法確定其為發散（無法逸出），則認定它為收斂。收斂的點（亦即集合內的點）內定為黑色，其他的點（非集合內的點），則根據上述「次數」在色譜中選出顏色。牛頓集合則以確定該點收斂至方程式的根（在容許值內）的迭代次數作為塗色的根據，若在迭代「最大次數」內不能確定其收斂至根，則定其為不收斂至根。第一類色譜是將顏色依序排列，根據「次數」及內插法來選取顏色，沒有收斂的序列，定其次數為迭代的「最大次數」。圖 1 左表就是第一種色譜選項，也可以輸入顏色第一個字母，以逗號分隔作為顏色順序，可用的顏色是：Red、Green、Blue、Cyan、White、Yellow、Magenta、Orange、Pink。若選取左表中的 others，程式會呈現圖 1 右表。右表前三選項中的三個數字表示將色彩的 R、G、B 三原色的二進位數字偏移的量，選 Random，程式將隨機定出三個偏移量。

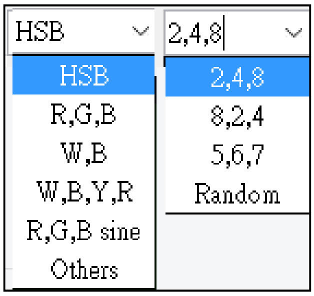


圖 1、兩種色彩系統的選項

三、碎形探索工具

（1）雪花碎形 — 雪花碎形是最簡單的碎形構圖，在數學算板中選取雪花碎形選項，程式會出現一個雪花碎形（圖 2 左），並提供遞迴層次、圖形大小、相關公式的選項，前二者也可以直接輸入數值。設 0 層次的正三角形邊長為 a，則公式選項可選擇展示第 n 層次的邊長、邊數、周長、面積，分別為$(\frac{1}{3})^n a$、$3(4)^n$、 $3(\frac{4}{3})^n a$、$\frac{\sqrt{3}}{20}(8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n)a^2$。

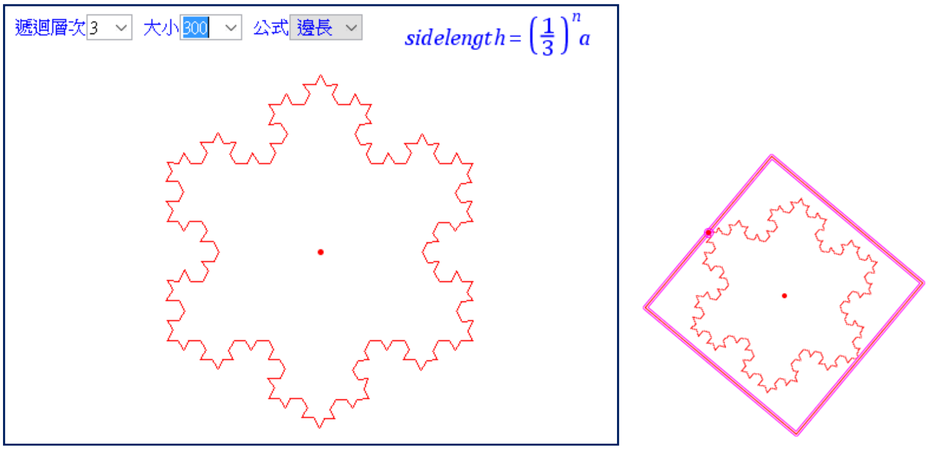


圖 2、雪花碎形畫面及旋轉的雪花

圖 3 展示選取遞迴層次 0～4 構成的圖形，可以探索雪花碎形構成的原理，每一層次就是將前一層次中的每一個線段在三分之一及三分之二的位置，作出一個向外凸起無底邊的正三角形。讓學生探索研究雪花碎形在各個層次的邊數、邊長、周長及面積是不錯的活動。

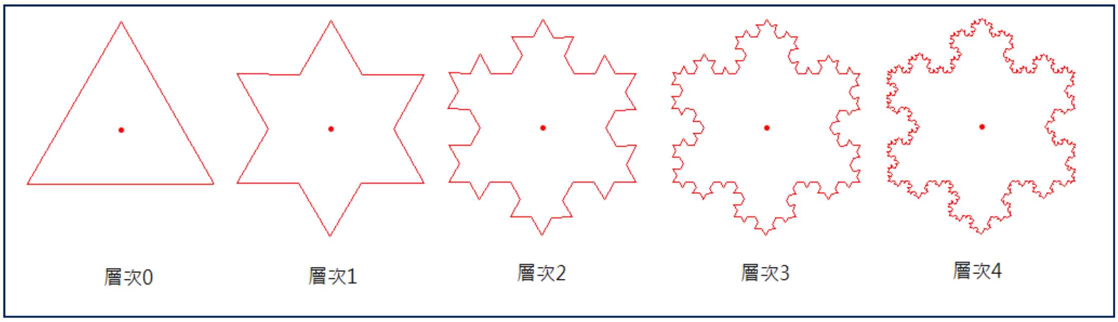


圖 3、第 0 層至第 4 層的雪花構圖

（2）席爾平斯基碎形—席爾平斯基碎形有兩種—三角碎形與地毯碎形。在數學算板中選取席爾平斯基三角碎形得到圖 4 的畫面。其探索選項分別為遞迴層次、正三角形、相關公式的選項。本程式內建為任意三角形，移動三角形三頂點可以改變三角形的形狀，按鈕「正三角形」可使圖形轉變為正三角形。設 0 層次的三角形某邊長為 a，面積為 A，公式選項可選擇展示第 n 層次的實三角形相應邊長、實三角形數、實三角形總面積，依次分別為$2^{-n}a$、3^n、$(\frac{3}{4})^n A$。透過不同遞迴層次的選定，使用者可以探索此碎形的構成方式。圖 5 為展示層次 0～層次 4 的圖形，可以看出其製作方式是「取三角形三邊中點，將實三角形內部挖空」的重複迭代。

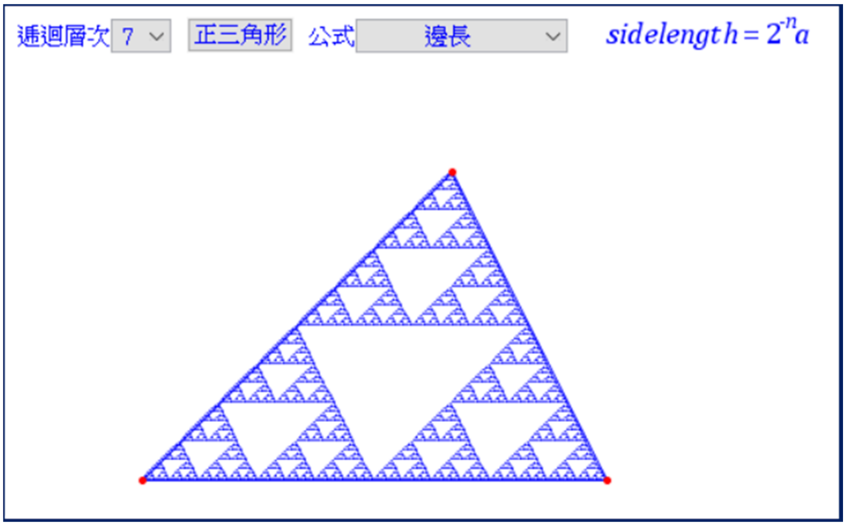


圖 4、席爾平斯基三角碎形畫面

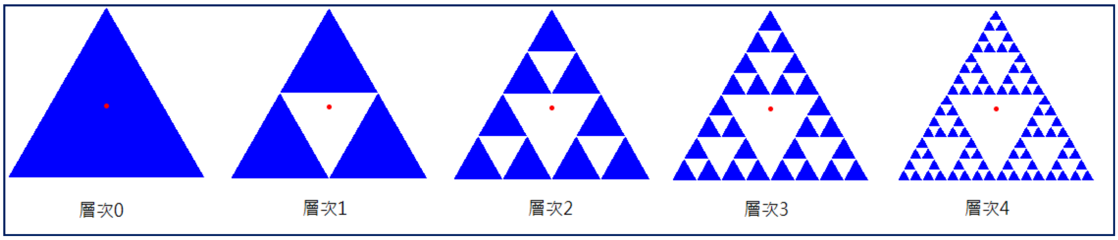


圖 5、第 0 層至第 4 層的席爾平斯基三角碎形

在數學算板中選取席爾平斯基地毯碎形得到圖 6 的畫面。移動正方形一邊上的兩端點可以改變正方形的大小及方位。其探索選項分別為遞迴層次、相關公式的選項。設 0 層次的實正方形邊長為 a，公式選項可選擇展示第 n 層次的實正方形邊長、

實正方形數、實正方形總面積，依次分別為$3^{-n}a$、8^{n}、$(\frac{8}{9})^{n}a^{2}$。透過不同遞迴層次的選定，使用者可以探索地毯碎形的構成方式。圖 7 為展示層次 0～層次 4 的圖形，可以看出其製作方式是「將實正方形平均分割為 9 個小正方形，將中間那個正方形內部挖空」的重複迭代。由於實正方形連在一起，看不出它們個別正方形樣式，數算個數時應特別注意。

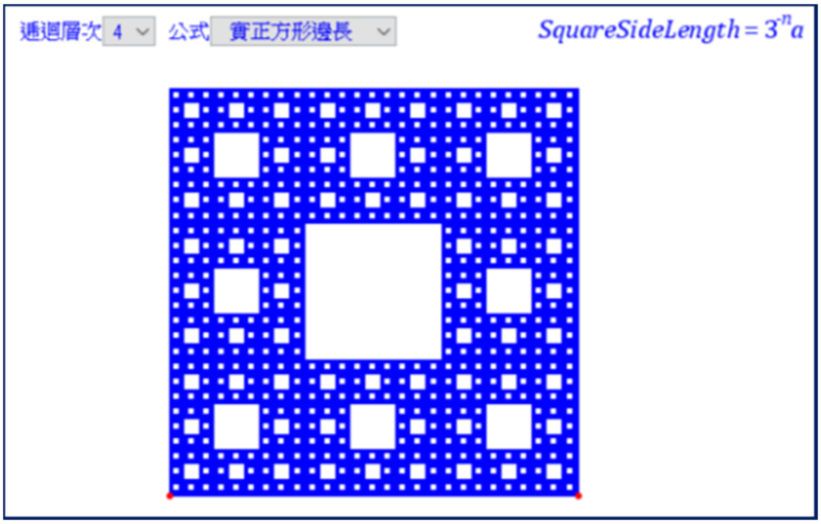


圖 6、席爾平斯基地毯碎形畫面

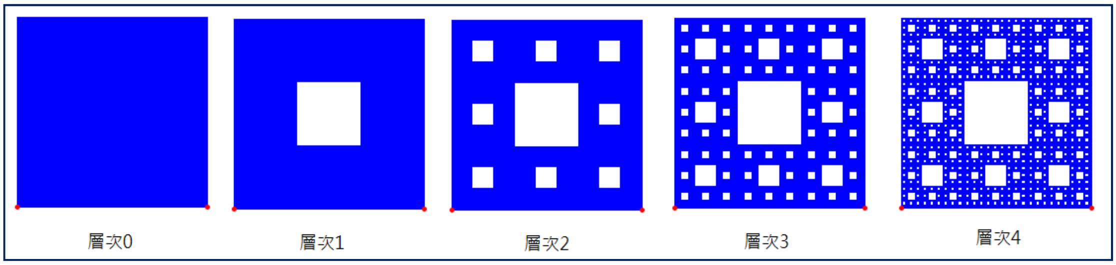


圖 7、第 0 層至第 4 層的席爾平斯基地毯碎形

（3）勾股樹碎形—勾股樹碎形是在正方形一邊作出直角三角形，然後在直角三角形兩股的線段上作出正方形，之後再重複前述的製作過程，圖 8 為展示一個層次 12 的勾股樹碎形。正方形邊上的三點可以用滑鼠移動改變其大小及方位，中間的紅點可控制直角三角形的直角頂點的位置，圖 8 左右並不對稱，三角形為等腰直角三角形時，可得對稱的勾股樹。圖 9 為展示 0～4 層次的勾股樹製作過程。讓學生計算各層次的正方形個數也是不錯的探索活動。

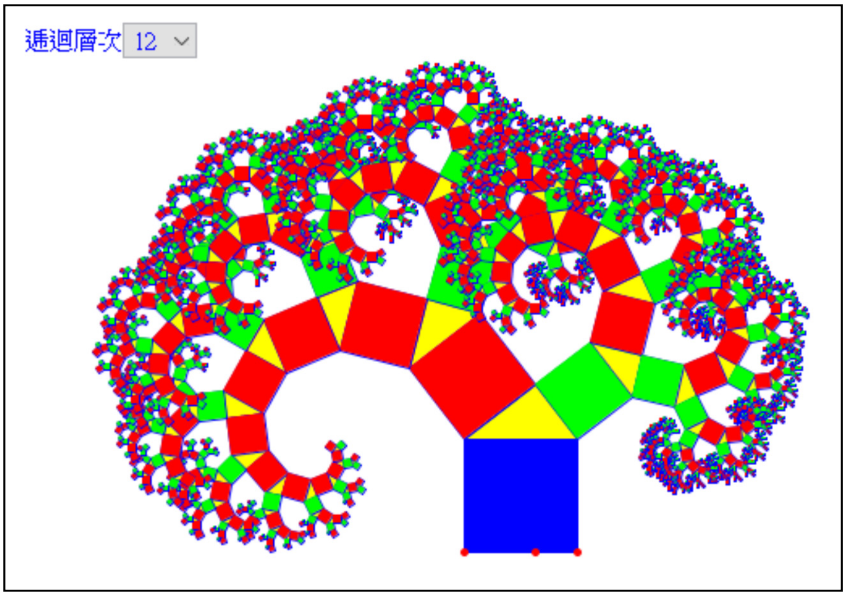


圖 8、勾股樹碎形

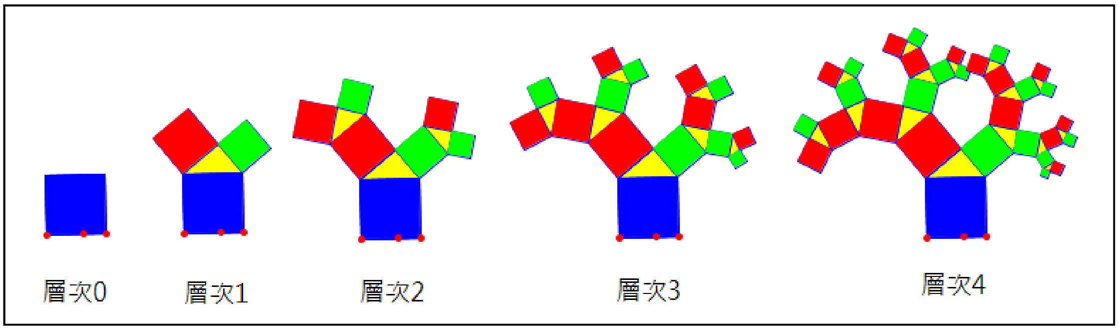


圖 9、第 0 層至第 4 層次的勾股樹

（4）蕨葉碎形—圖 10 為展示數學算板執行蕨葉碎形程式的畫面。圖 10 表中的 P 行表示各函數取點時的機率，程式將依此機率決定選取哪一個函數來迭代。圖 10 第一行探索項目分別是步幅、蕨葉種類選項、蕨葉的大小選項、迭代的次數輸入或選擇框、參數滾輪、著色選項。圖 11 為展示迭代次數不同，繪製出來的圖形。圖 12 為展示蕨葉碎形不同預設種類（整體參數的共同改變）的選擇框及顏色系統的選擇框，使用者可以選擇不同預設參數的蕨葉及不同的著色系統來著色。

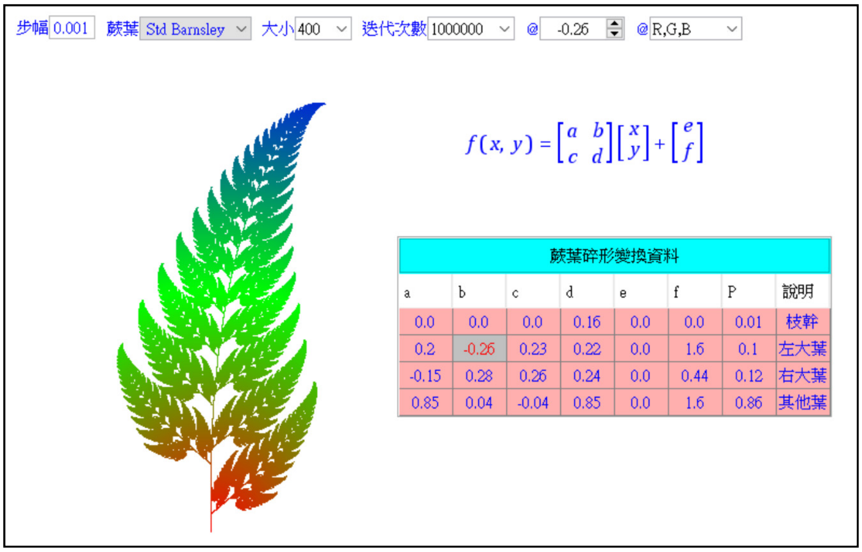


圖 10、邦思理蕨葉碎形程式畫面

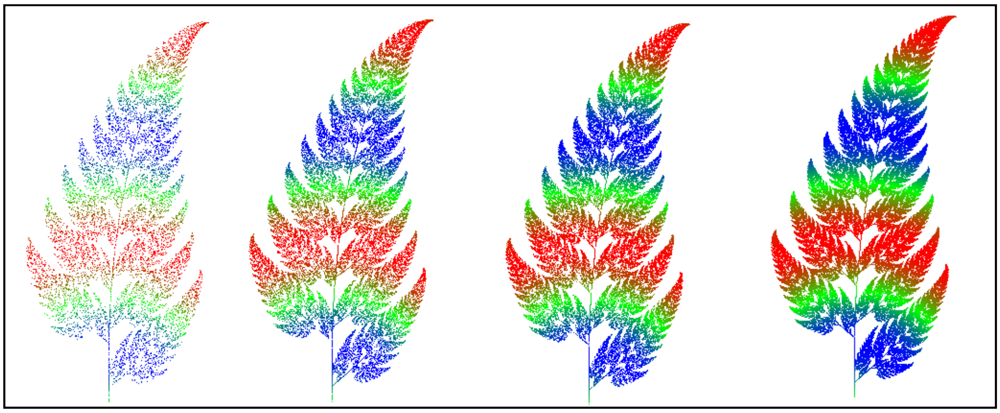


圖 11、迭代次數 10000，30000，50000，100000 繪製出的蕨葉

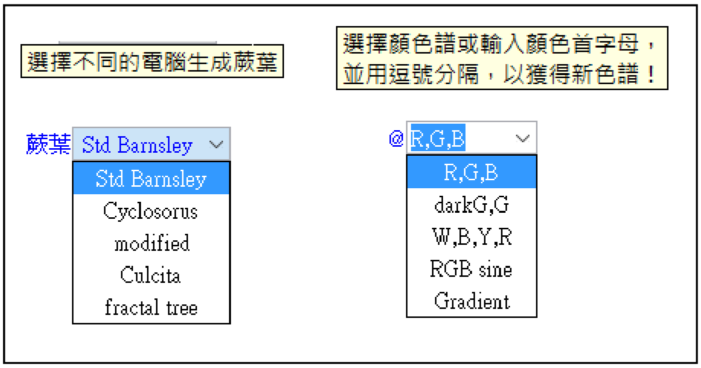
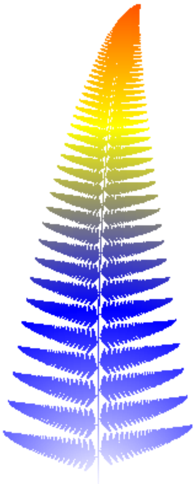


圖 12、蕨葉碎形不同預設參數的選擇框及顏色系統的選擇框

圖 13 為展示兩組不同參數表構成的蕨葉(密毛毛蕨 Cyclosorus,金毛狗蕨 Culcita)，左圖配上表，右圖配下表。



蕨葉碎形變換資料

a	b	c	d	e	f	P	說明
0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	-0.4	0.01	枝幹
0.035	-0.2	0.16	0.04	-0.09	0.02	0.035	左大葉
-0.04	0.2	0.16	0.04	0.083	0.12	0.035	右大葉
0.95	0.005	-0.005	0.93	-0.002	0.5	0.92	其他葉

蕨葉碎形變換資料

a	b	c	d	e	f	P	說明
0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	-0.14	0.01	枝幹
0.09	-0.28	0.3	0.09	0.0	0.7	0.1	左大葉
-0.09	0.28	0.3	0.09	0.0	0.7	0.1	右大葉
0.85	0.02	-0.02	0.83	0.0	1.0	0.79	其他葉

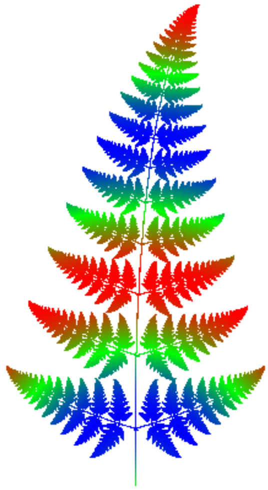
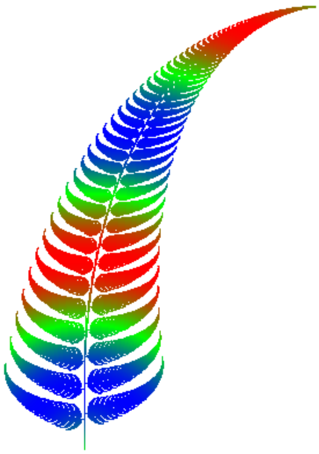


圖 13、不同參數表構成的不同形式蕨葉

對於任意蕨葉，以滑鼠雙擊表中一個數，此數值會呈現在有@記號的滾輪中，按滾輪的上下鍵，可以增減該數值，數值的變化會直接反應在圖形中，使用者可觀察探索該參數變化對圖形的影響。圖 14 左圖為展示圖 14 上表參數 b 行第四列的 0.005 改變到 0.030 後，圖形的最後結果（0.005 至 0.030 數值的改變在滾輪上呈現，再雙擊表中其他數時，表中的 0.005 將改為 0.030）。圖 14 右圖為展示圖 14 下表 b 行第二列參數-0.28 改變到-0.138 時，圖形的最後結果。



蕨葉碎形變換資料

a	b	c	d	e	f	P	說明
0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	-0.4	0.01	枝幹
0.035	-0.2	0.16	0.04	-0.09	0.02	0.035	左大葉
-0.04	0.2	0.16	0.04	0.083	0.12	0.035	右大葉
0.95	0.005	-0.005	0.93	-0.002	0.5	0.92	其他葉

蕨葉碎形變換資料

a	b	c	d	e	f	P	說明
0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	-0.14	0.01	枝幹
0.09	-0.28	0.3	0.09	0.0	0.7	0.1	左大葉
-0.09	0.28	0.3	0.09	0.0	0.7	0.1	右大葉
0.85	0.02	-0.02	0.83	0.0	1.0	0.79	其他葉

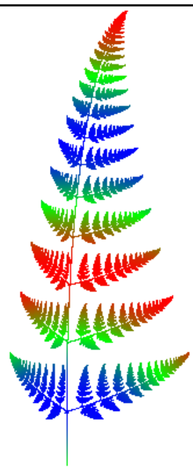


圖 14、參數改變對圖形的影響（改變的數：上表 b 行第四列，下表 b 第二列）

（5）複數碎形探索—進入複數碎形探索將見到圖 15 的畫面。標題左方選擇鍵可以選擇曼德布洛特、朱立亞或牛頓法碎形，標題右方按鈕是圖形局部放大後的還原鈕。各種碎形提供的探索項目有些不同。

A.曼德布洛特碎形—圖 15 展示的是曼德布洛特碎形。標題下方探索項目分別為函數選擇或輸入框、解析度選擇框及著色系統選擇框。圖 16 為展示圖 15 中小方框放大後的圖像。圖 17 為展示圖 16 使用不同著色方法得到的圖形。圖 18 為展示不同函數選項$(z^3+a, z^5+a, z^{-3}+a)$得出的圖形。

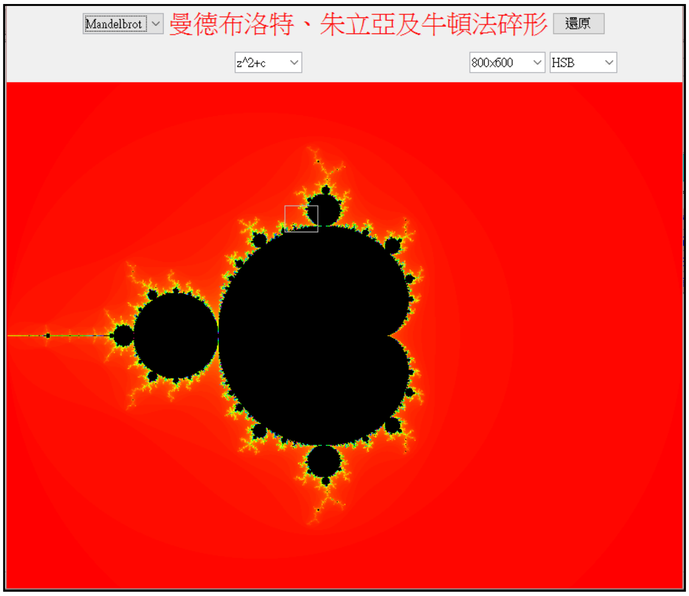


圖 15、複數碎形探索起始畫面

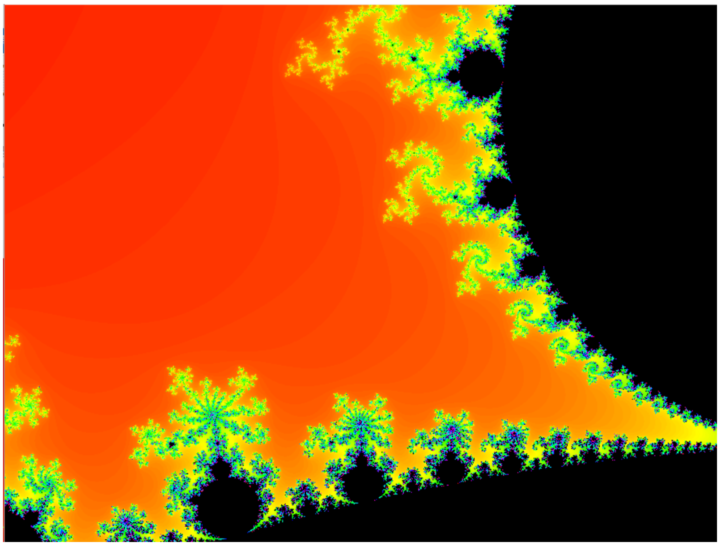


圖 16、圖 15 中小方框放大後的圖像

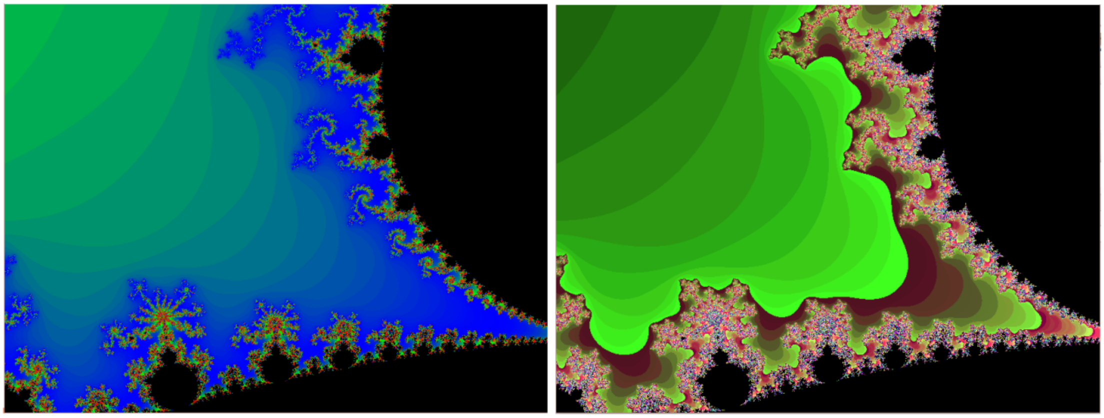


圖 17、圖 16 使用不同著色方法的結果

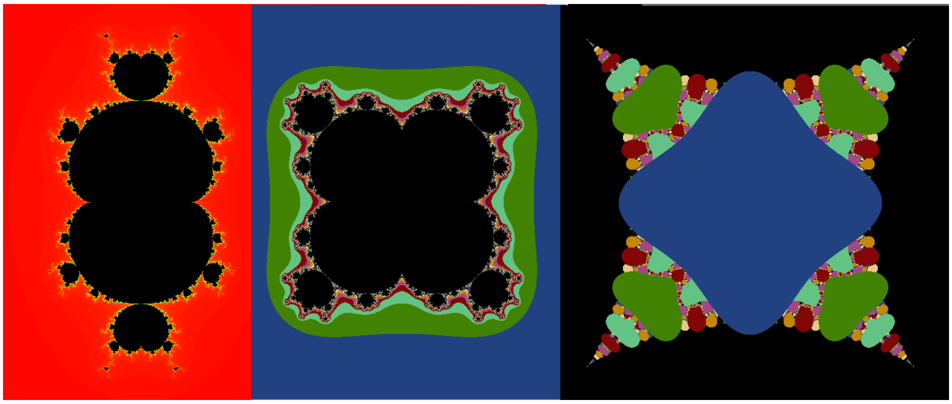


圖 18、$z^3+a, z^5+a, z^{-3}+a$ 的曼德布洛特圖形

曼德布洛特圖形是連通的(connected)圖形，其面積是有限的，但其邊長則為無限的，將其邊緣放大，可看出其邊緣變化多端，永無止境。曼德布洛特集合的維度介於 2 與 3 之間，是個分數維度(fractional dimension)這也是「碎」形得名的原因（非「整」維度，故曰「碎」)。

B. 朱立亞碎形—圖 19 展示朱立亞碎形探索的探索項目。下方按鈕依次為函數選擇框、朱立亞集合的 a 值選單（複數）、a 值實部滾輪、a 值虛部滾輪、滾輪間距、解析度、色彩系統選單一、色彩系統選單二。圖 20 及圖 21 展示$f_a(z)=z^2+a$ 在不同 a 值形成的圖形（也使用不同的色彩），若在網路上發現不同值的有趣圖形，也可以輸入此值，繪出圖形。

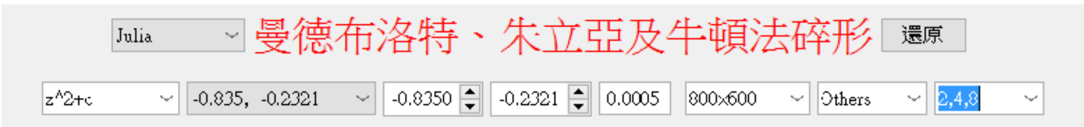


圖 19、朱立亞碎形探索的探索項目

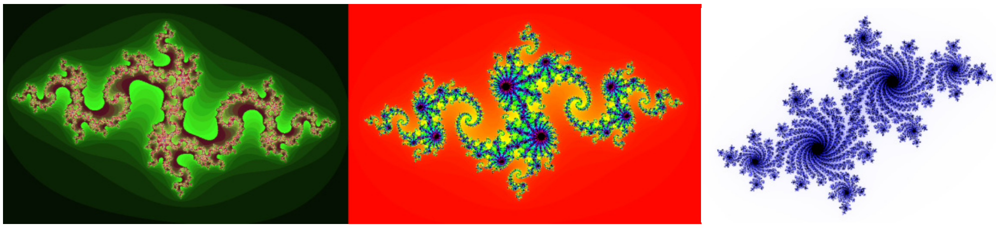


圖 20、朱立亞集合$f_a(z) = z^2 + a$，a值依次為-0.835-0.2321i、-0.8+0.156i 及-0.4+0.59i 之圖形

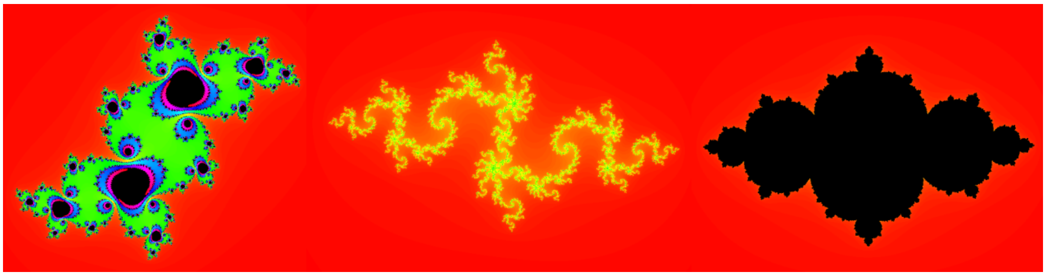


圖 21、朱立亞集合$f_a(z) = z^2 + a$，a值依次為-0.1+0.651i、-0.835-0.2321i 及-.8673+0.156i 之圖形

圖 22～圖 24 展示朱立亞集合$f_a(z) = z^3 + a$ 利用滾輪取得之圖像節錄的圖形變化，使用者只要在 a 值選單中選取或輸入數值，該數值會自動在滾輪中呈現（也可以直接在滾輪中輸入起始數值再變化該數），以滑鼠單擊或按壓上下箭頭，使數值增減，即可觀察圖形的變化。

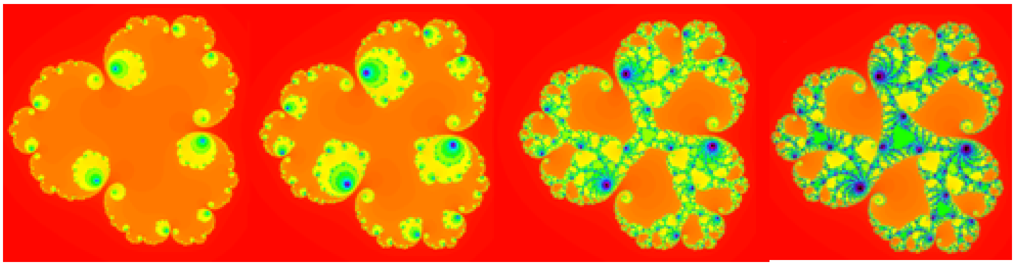


圖 22、朱立亞集$f_a(z) = z^3 + a$，a值實部 0.4，虛部分別為 0.0013，0.0020，0.0023，0.0024 之圖形變化

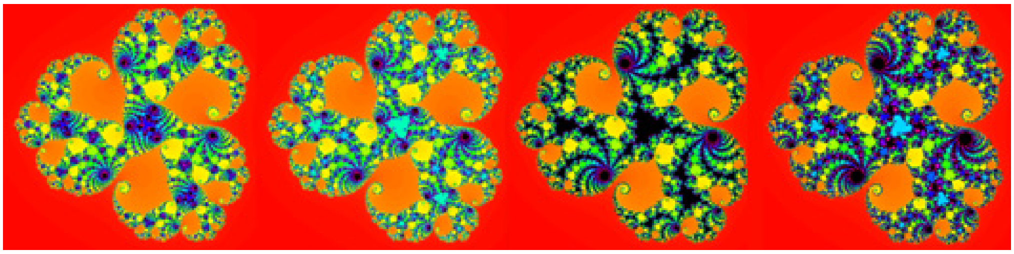


圖 23、朱立亞集合$f_a(z) = z^3 + a$，a值實部 0.4，虛部分別為 0.0025，0.0026，0.0028，0.0029 之圖形變化

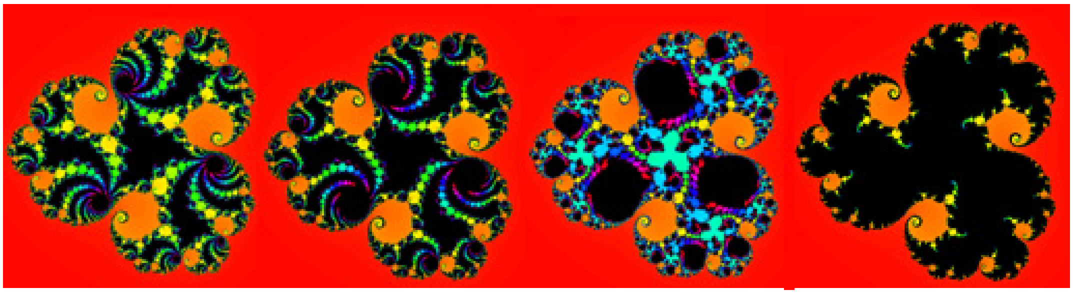


圖 24、朱立亞集合$f_a(z) = z^3 + a$，a值實部 0.4，虛部分別為 0.0030，0.0032，0.0033，0.0034 之圖形變化

C. 牛頓法碎形—圖 25 為展示牛頓法碎形探索的探索項目。下方按鈕依次為函數選擇框、牛頓法集合常數 a 之實部滾輪、常數 a 之虛部滾輪、滾輪間距、解析度選擇框、色彩輸入或選擇框。選擇函數時，選取函數$z^3 - 1$、$z^4 - 1$、$z^5 - 1$、$z^6 - 1$ 程式會將趨近相同根的點塗出相同的顏色，每一個跟都給予不同的顏色。其他函數則只看是否趨近於根，不分辨趨近哪一個根。使用者也可輸入大於 1 的整數值 n，此時程式會畫出函數$z^n - 1$之牛頓集合圖形，但不用不同的顏色分辨其趨近於哪一個根。圖 26 展示$z^3 - 1$、$z^6 - 1$兩函數依收斂至某一根而著同一色的牛頓法碎形。圖 27 展示$z^3 - 1$、$z^6 + z^3 - 1$兩函數不依根著色的牛頓法碎形。

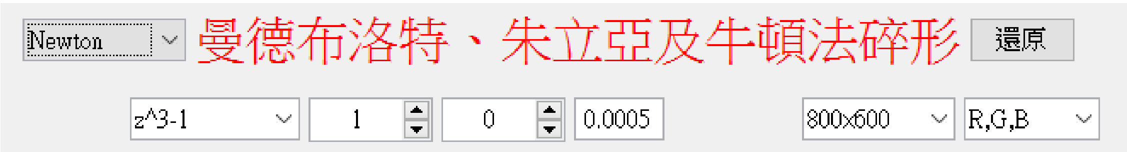


圖 25、牛頓法碎形探索的探索項目

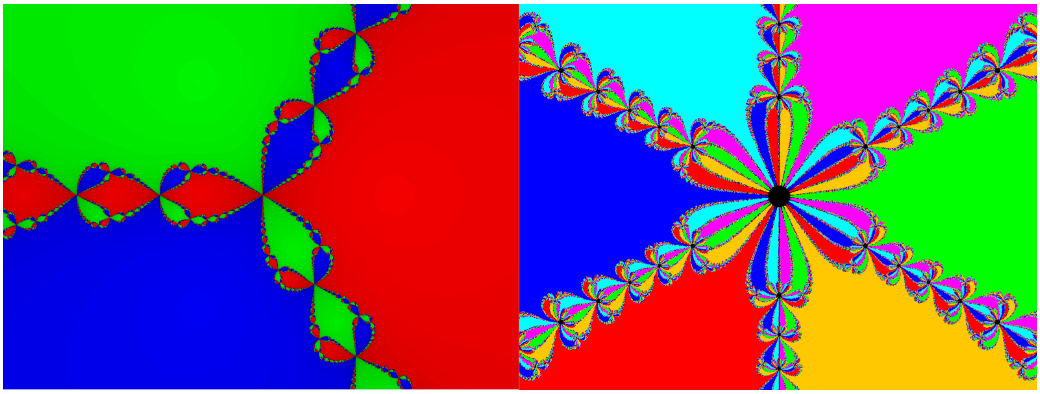


圖 26、$z^3 - 1$、$z^6 - 1$ 兩函數依收斂至某一根而著色的牛頓法碎形

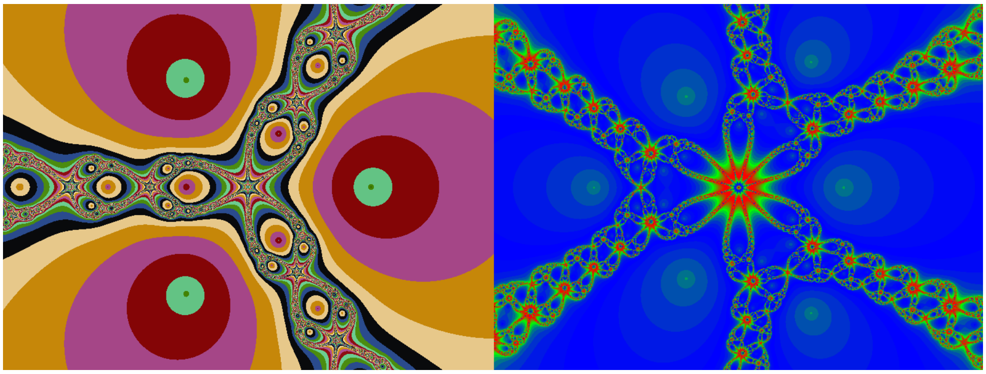


圖 27、z^3-1、z^6+z^3-1 兩函數不依根著色的牛頓之碎形

D. 曼朱碎形關係— 圖 28 為展示曼朱碎形關係探索程式的畫面。上方的探索選項分別為複函數、左圖的放大鈕、還原鈕、解析度、常數點(指定 a 值)、標題、常數 a 之實部滾輪、常數 a 之虛部滾輪、步幅、右圖的放大鈕、還原鈕、色譜選擇及輸入框。圖 28 左圖是曼德布洛特圖形，其上有一可移動的點（複數點，圖中此點為峽谷間的白點），移動此點至適當位置後，按鈕「常數點」，此點就變成朱立亞集合的 a 值，其實部及虛部將出現在 ax, ay 的微調滾輪上，而圖 28 右圖則會同時展示 a 為此常數時的朱立亞圖形（注意：畫面中複數坐標原點在畫框中心，右下方為第一象限）。

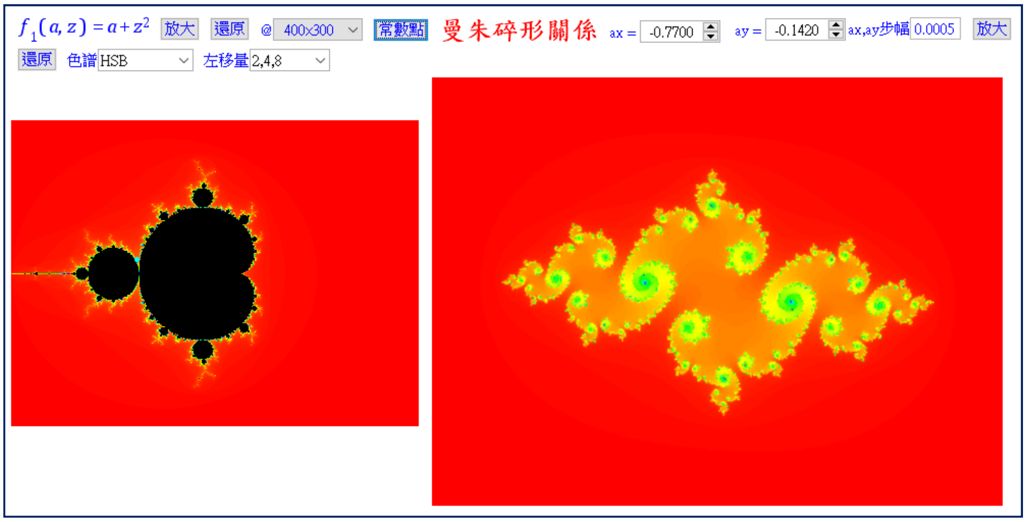


圖 28、曼朱穗形關係 a =-0.01-0.8i 畫面

微調滾輪可以看到 a 值細微變化時的圖形變化。事實上，朱立亞 a 值與曼德布洛特集合有相當有趣的關係：

* 當 a 值在曼德布洛特集合內部時，朱立亞的圖形為連通的，若在外部，圖形則是不連通的(亦即至少分成兩部分)。
* 當 a 值在邊界附近的時候，朱立亞圖形變得「纖細」且多「迴旋」一些。
* 當 a 值在邊界時，朱立亞圖形的形狀與曼德布洛特該處的圖形相似。

因此曼德布洛特集合可說是朱立亞集合的「地圖」。圖 29 展示 a 值實部為 0.34，虛部微調分別擷取虛部為 0.071（點在邊界附近內部），0.055（點在邊界附近）及 0.04（點在邊界附近外部）的圖形，透過滾輪微調，使用者可動態觀察其變化。圖 30 為 a =-0.6-0.66i 時，曼德布洛特及朱立亞的圖形局部放大後的相近圖形。

其實在複數平面，用複變函數（或變換）將圖形做適當的調整再作迭代，也可以得到有趣的圖形，圖 31 展示一個圓，透過數學算板內建的莫必烏斯(Mobius)變換的迭代，調整圓半徑後，得到的相切圓系。

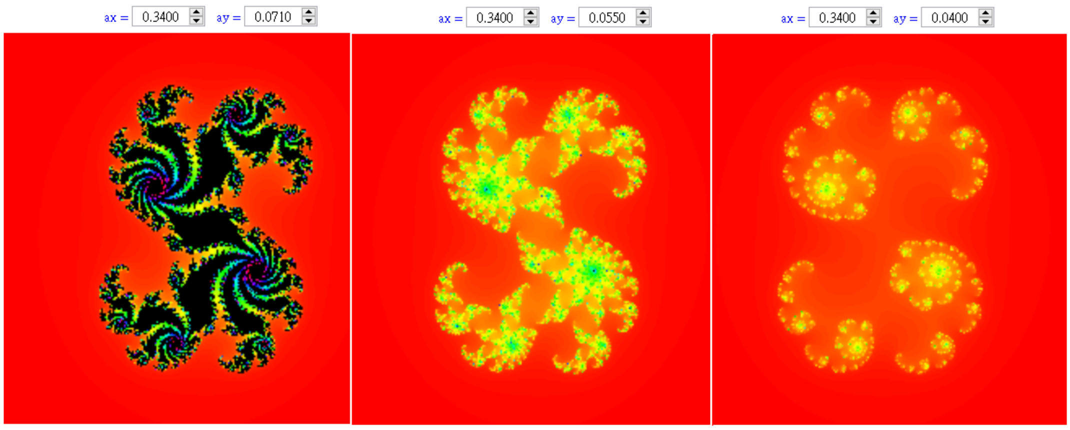


圖 29、朱立亞圖形在實部為 0.34，虛部分別為 0.071、0.055 及 0.04 之圖形

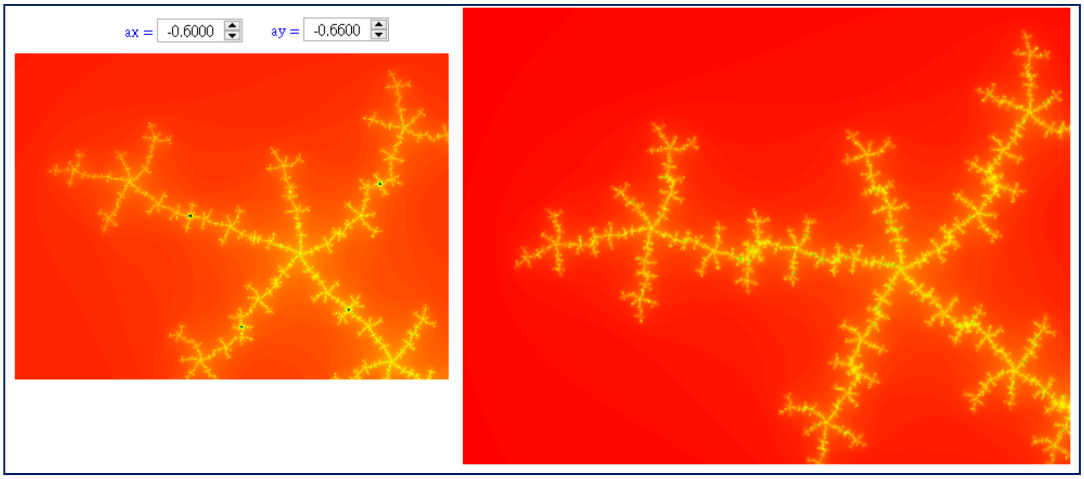


圖 30、曼朱圖形在 a =-0.6-0.66i 附近的比較（均經局部放大）

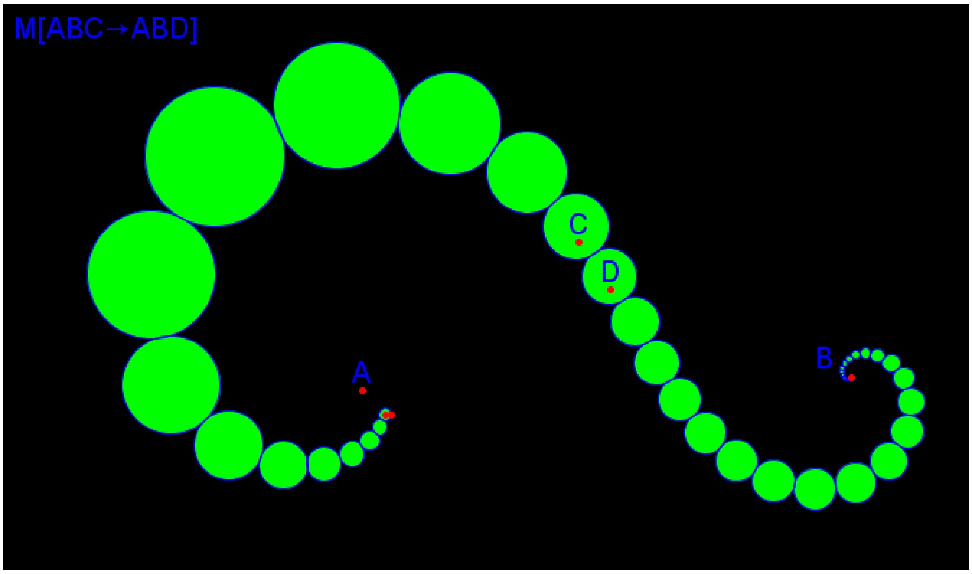


圖 31、將複平面上的 A、B、C 點對應到 A、B、D 點的 Mobius 變換將一個圓作迭代的結果，A 點右下方兩點決定的圓為變換的起始圓

四、結語

數學算板是作者退休後致力發展的一套動態數學軟體，目標在提供教師教室教學或學生在教師指導下使用的教具與學具之電腦工具。數學算板包含幾何畫板、代數算板、龜行幾何、機率與統計等模組。本文介紹數學算板中內建的碎形教學探索工具，可供教師在介紹碎形時，透過電腦投影指導學生學習及探索碎形性質及內涵。內建的工具包含雪花碎形、席爾平斯基三角及地毯碎形、勾股樹碎形、蕨葉碎形、曼德布洛特碎形、朱立亞碎形、牛頓法碎形及曼朱關係探索程式，希望對教師的教學及學生的學習有幫助。

五、後記

「數學算板測試版 1.0」已置於網頁：http://mathboard.tw（http://mathboard.org）下載區，提供給有興趣的讀者下載測試，本文相關的部分可操作圖形程式網路版，也可以在下載區取得連結。

參考文獻

Barnsley, M. F. and Rising, H. *Fractals Everywhere*, 2nd ed. Boston, MA: Academic Press, 1993.

Mandelbrot, Benoit. *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co. 1983.