圖解平面凸多邊形方程式的幾何意義：以三邊形、四邊形、五邊形為例(I)

李輝濱

壹、前言

在研究探討平面凸多邊形面積公式時，以導入應用角度修正參數法的觀念，來推演尋求適切可用的邊長與內角組合關係，順利地發現了許多由所有邊長與各內角組合形成的邊角方程式！仔細審視這些方程式的結構內涵，在外觀上它們令人覺得很複雜、陌生。尤其是五邊形以上多邊形，其邊長與內角的配置在形態上顯現得很特異且大部份項數都是完全地呈現出組成凌亂紛雜， 令人疑惑！第一次獲得這些方程式時，還真不知道它們的外表形貌會是如此地毫無秩序！

於是直覺地嘗試利用幾何作圖法，欲來實際觀察這些方程式在幾何圖形中所顯示的實質意義；目的是藉著圖示，作出這些方程式中的每一項出現在圖形結構中的投影位置，並比對它們之間的相互位置關係以間接地瞭解這些方程式的真實內容。也因為有了幾何圖解的詮釋，使得我們更容易知悉這些方程式的用處！而這所有經過嚴謹理論推導及圖解驗證的方程式已成為凸多邊形一般化恆等式了！

方程式中有些項的內角組合是相異內角和的純加法性，這些項在推證面積公式時是有效存在的；另一些則是加與減相組合，而這些並不存在於面積公式中。如此的自然巧妙安排，使得這些恆等式方程式在需要被轉換時可以適宜地被揀選出所需要的內角組合項，以符合推證的期望，而這些企盼也都在尋找面積公式的推理過程中奇妙無瑕地一一展現。

貳、本文

A. 數學基本性質ー引理

利用角度修正參數法在推證尋求平面凸多邊形的邊角方程式時，在過程中必須應用或對照到下述已知的數個輔助基本數學性質；

引理 1. 平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\Lambda\ A_{n-1}A_n$，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的向量為 $\vec{V_1}$， $\overline{A_2A_3}=V_2$ 的向量為 $\vec{V_2}$,Λ ， $\overline{A_nA_1}=V_n$ 的向量為 $\vec{V_n}$，則此平面凸 n 邊形即為此 n 個向量按順序箭頭接

箭尾相加而成的封閉凸 n 邊形。

依向量加法性質知；$\sum_{m=1}^{n}\vec{V_m}=\vec{0}=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}=0$ 此處 θ_m 為 V_m 在直角坐標平面上的方位角。$\vec{i}$ 為正 X 軸方向的單位向量，$\vec{j}$ 為正 Y 軸方向的單位向量， 再由平面正交坐標系性質知；

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \quad 且 \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

現在，將頂點 A_1 置於直角坐標平面上的原點 O，如下圖 1，使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \cdots\cdots (1)$$

$$且 \quad \sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \cdots\cdots (2)$$

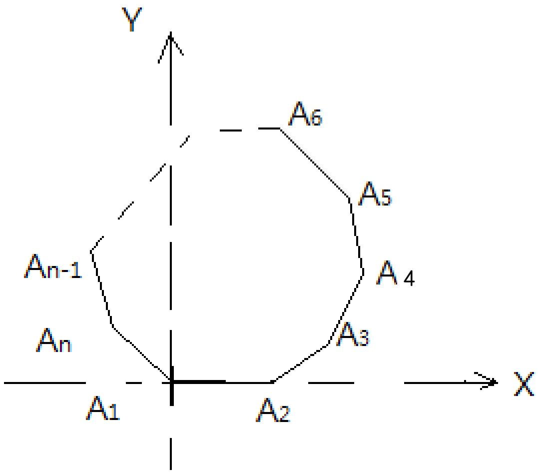

圖 1、凸 n 邊形

證明：由圖 1 知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1, A_2, A_3, \Lambda\ , A_n$,而 V_1 的方位角 θ_1 為零，V_2 的方位角 θ_2 為 $\pi-A_2$，V_3 的方位角 θ_3 為 $(\pi-A_2)+(\pi-A_3)$，V_4 的方位角 θ_4 為 $(\pi-A_2)+(\pi-A_3)+(\pi-A_4)$,Λ ,V_n 的方位角 θ_n 為 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\cdots+A_n)$。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中：$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$ 且 $\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$，

則 $\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$

$=V_1+V_2\cos(\pi-A_2)+V_3\cos(2\pi-A_2-A_3)+\Lambda\ +V_n\cos\left[(n-1)\ \pi-\sum_{k=2}^{n}A_k\right]=0$

將上列等式改寫成下式：

得 $$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同理，再得 $$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

證明完成。

引理 1.的一組方程式(1)與(2)所顯示的幾何意義是；方程式(1)代表此凸多邊形各邊長在 X 軸方向的投影向量總和為零，方程式(2)則表示凸多邊形各邊長在 Y 軸方向的投影向量總和為零。

引理 1.的一組方程式(1)與(2)是因以線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 為底，疊置在水平方向 X 軸所求得的結果，若換成以 $\overline{A_2A_3}=V_2$ 為底，將求得類似的另一組方程式，以此類推，總共會得出 n 組。這 n 組方程式是非常好應用的，尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的組合關係式時至為有效！

引理 2. 在平面上給定一個凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots.A_{n-1}A_n$，則此凸多邊形所有內角總和為 $A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots.+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$

證明： 略。

引理 3. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

B. 圖解平面凸多邊形的邊角方程式

B-1. 三角形的邊角方程式：

(1) 推證三角形的邊角方程式

已知平面上一個三角形 $A_1A_2A_3$，令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，見下

圖 2 由引理 1.取 n=3 代入方程式(1)與(2)，並作內角轉換，可得下列兩式；

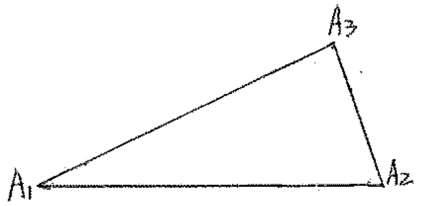

圖 2

$$V_1 = V_2 \cos A_2 + V_3 \cos A_1 \quad \text{(3-1)}$$

$$V_2 \sin A_2 - V_3 \sin A_1 = 0 \quad \text{(3-2)}$$

由引理 2.並令 ϕ 為角度修正參數，且選取 $A_1 + A_2 = (\pi/2) + \phi$ ， $A_3 = (\pi/2) - \phi$ ，分別代入方程式(3-1)式與(3-2)式中，得

$V_1 = V_2 \cos(\frac{\pi}{2} + \phi - A_1) + V_3 \cos A_1 = -V_2 \sin(\phi - A_1) + V_3 \cos A_1$ 再展開移項，得

$$V_1 - V_3 \cos A_1 = \sin\phi \cdot (-V_2 \cos A_1) + \cos\phi \cdot V_2 \sin A_1 \quad \text{(3-1a)}$$

又 $V_2 \sin A_2 = V_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \phi - A_1) = V_2 \cos(\phi - A_1) = V_3 \sin A_1$ 再展開移項，得

$$V_3 \sin A_1 = \cos\phi \cdot V_2 \cos A_1 + \sin\phi \cdot V_2 \sin A_1 \quad \text{(3-2a)}$$

聯立解(3-1a) 與 (3-2a)兩式，得下列兩式；

$$(V_1 - V_3 \cos A_1)(-\sin\phi) + V_3 \sin A_1 \cos\phi = V_2 \cos A_1 \quad \text{(3-1b)}$$

$$(V_1 - V_3 \cos A_1)\cos\phi + V_3 \sin A_1 \sin\phi = V_2 \sin A_1 \quad \text{(3-2b)}$$

同時， $\sin A_3 = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos\phi$ 且 $\cos A_3 = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi$ ，代入之，得

$$-V_1 \cos A_3 + V_3 \cos A_1 \cos A_3 + V_3 \sin A_1 \sin A_3 = V_2 \cos A_1 \quad \text{(3-1c)}$$

$$V_1 \sin A_3 - V_3 \cos A_1 \sin A_3 + V_3 \sin A_1 \cos A_3 = V_2 \sin A_1 \quad \text{(3-2c)}$$

再組合化簡，得 $V_1 \cos A_3 + V_2 \cos A_1 - V_3 \cos(A_3 - A_1) = 0$ (3-1T)

$$V_1 \sin A_3 - V_2 \sin A_1 - V_3 \sin(A_3 - A_1) = 0 \quad \text{(3-2T)}$$

方程式(3-1T)式與(3-2T)式即為推證出的一組三角形的邊角方程式！同理，還可得另兩組邊角方程式，而其外觀形貌完全類似，不再贅述。當第一次獲得這兩公式時，還真難接受它們的存在，尤其不易瞭解公式中每一項的真正意義。

(2) 圖解三角形邊角方程式的意義

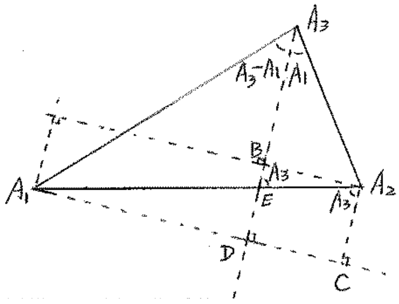

圖 3

接著，要以幾何作圖來理解方程式(3-1T)式與(3-2T)式的圖形意義；原則上幾何作圖時，每一凸多邊形圖形的第一線段邊長 V_1 都一致被設定成水平線方向位置。觀察這兩方程式，有兩個內角的差，即 A_3-A_1，所以請看上圖 3，當頂角 $A_3>A_1$ 時，(這不失為一般性作圖假設，若頂角 $A_1>A_3$ 時，方程式內角差即改換為 A_1-A_3)

(a) 在頂角 A_3 內側作一射線 A_3E，使 $\angle A_2A_3E$ 恰等於頂角 A_1，則 $\angle A_1A_3E=A_3-A_1$，

(b) 自頂點 A_1 對射線 A_3E 作一垂直射線 A_1C，使 D 點為垂直線交點，

(c) 再自頂點 A_2 作一與射線 A_3E 平行的平行射線 A_2C，使射線 A_1C 與射線 A_2C 垂直相交於 C 點。

(d) 再自頂點 A_2 作一與射線 A_3E 相垂直的射線，使兩射線的垂直交點為 B 點。

(e) 請看 ΔA_2A_3E 與 $\Delta A_1A_2A_3$，兩者有共同的內角 A_2 及 A_1，故 $\angle A_2EA_3=A_3$ 頂角，因此由平行線內側角性質知 $\angle A_1A_2C=A_3$ 頂角。至此，作圖 3 完成。

(f) 現在看方程式(3-1T)式的各項在圖 3 中出現的位置；$V_1\cos A_3$ 的值就是邊長 V_1 在射線 A_3D 上的投影長度 BD，而 $V_2\cos A_1$ 的值就是邊長 V_2 在射線 A_3D 上的投影長度 A_3B，這兩項的值相加結果即為 $V_3\cos(A_3-A_1)$ 的值，正是邊長 V_3 在射線 A_3D 上的投影長度 A_3D。

(g) 再來看方程式(3-2T)式的各項在圖 3 中出現的位置；$V_1\sin A_3$ 的值就是線段長度 A_1C，$V_2\sin A_1$ 的值就是線段長度 A_2B = 長度 DC，$V_3\sin(A_3-A_1)$ 的值就是線段長度 A_1D，所以由圖形中的線段分佈位置可得出線段長度 A_1C 恰等於線段長度 A_2B 加上線段長度 A_1D。

由以上圖示解說，可確認知方程式 (3-1T)式與 (3-2T)式兩式必為早已自然存在的一

般化三角形恆等式。

恆等式 (3-1T)式可改寫成分式型；$\dfrac{\cos(A_3 - A_1)}{V_1V_2} = \dfrac{\cos A_3}{V_2V_3} + \dfrac{\cos A_1}{V_3V_1}$ ············ (3-1F)

恆等式 (3-2T)式可改寫成分式型；$\dfrac{\sin(A_3 - A_1)}{V_1V_2} = \dfrac{\sin A_3}{V_2V_3} - \dfrac{\sin A_1}{V_3V_1}$ ············· (3-2F)

兩者相比較是很有趣的型態。

B-2. 平面凸四邊形的邊角方程式：

(1) 推證平面凸四邊形的邊角方程式

在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如下圖 4 令 線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_1} = V_4$，由引理 1.取 n=4 代入方程式(1)與(2)，並作內角轉換，可得下列兩式；

$$V_1 - V_2\cos A_2 + V_3\cos(A_2 + A_3) - V_4\cos A_1 = 0 \quad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

$$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2 + A_3) - V_4\sin A_1 = 0 \quad \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

由引理 2.並令 ϕ 為角度修正參數，內角組合的選取恰有下列 2 情況；

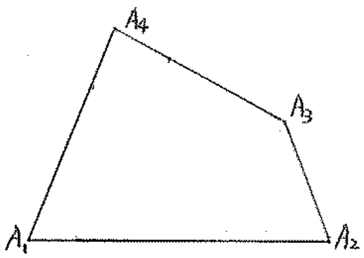

圖 4

(Case 1) 選取 $A_1 + A_3 = \pi - \phi$, $A_2 + A_4 = \pi + \phi$, 分別代入方程式(4-1) 與(4-2) 中，

得 $V_1 - V_2\cos(\pi + \phi - A_4) + V_3\cos(\pi + \phi - A_4 + A_3) - V_4\cos(\pi - \phi - A_3)$

$= 0 \Rightarrow V_1 + V_2\cos(\phi - A_4) - V_3\cos(\phi - A_4 + A_3) + V_4\cos(\phi + A_3) = 0$

展開，化簡，提出公因式，得

$$V_1 + \cos\phi\cdot[V_2\cos A_4 - V_3\cos(A_3 - A_4) + V_4\cos A_3] +$$
$$\sin\phi\cdot[V_2\sin A_4 + V_3\sin(A_3 - A_4) - V_4\sin A_3] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}1a)$$

另，$V_2\sin(\pi+\phi-A_4) - V_3\sin(\pi+\phi-A_4+A_3) - V_4\sin(\pi-\phi-A_3) = 0$

$\Rightarrow\ -V_2\sin(\phi-A_4) + V_3\sin(\phi-A_4+A_3) - V_4\sin(\phi+A_3) = 0$

展開，化簡，提出公因式，得

$$\sin\phi\cdot[-V_2\cos A_4 + V_3\cos(A_3 - A_4) - V_4\cos A_3] +$$
$$\cos\phi\cdot[V_2\sin A_4 + V_3\sin(A_3 - A_4) - V_4\sin A_3] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}2a)$$

聯立解(4-1a) 與 (4-2a) 兩式，得下列兩式；

$V_1\cos\phi = -V_2\cos A_4 + V_3\cos(A_3 - A_4) - V_4\cos A_3 = -V_1\cos(A_1 + A_3)$

$\Rightarrow\ V_1\cos(A_1 + A_3) - V_2\cos A_4 + V_3\cos(A_3 - A_4) - V_4\cos A_3 = 0$

$\Rightarrow\ V_1\cos(A_2 + A_4) - V_2\cos A_4 + V_3\cos(A_3 - A_4) - V_4\cos A_3 = 0 \cdots\cdots\cdots (4\text{-}1T)$

與 $V_1\sin\phi = -V_2\sin A_4 - V_3\sin(A_3 - A_4) + V_4\sin A_3 = V_1\sin(A_1 + A_3)$

$\Rightarrow\ V_1\sin(A_1 + A_3) + V_2\sin A_4 + V_3\sin(A_3 - A_4) - V_4\sin A_3 = 0$

$\Rightarrow\ V_1\sin(A_2 + A_4) - V_2\sin A_4 - V_3\sin(A_3 - A_4) + V_4\sin A_3 = 0 \cdots\cdots\cdots (4\text{-}2T)$

方程式 (4-1T)式與 (4-2T)式即為推證出的第一組四邊形的邊角方程式。

(Case 2) 選取 $A_1 + A_2 = \pi - \phi$，$A_3 + A_4 = \pi + \phi$，分別代入方程式(4-1)式與(4-2)式中，得 $V_1 - V_2\cos(\pi-\phi-A_1) + V_3\cos(\pi-\phi-A_1+A_3) - V_4\cos A_1 = 0$

$\Rightarrow\ V_1 + V_2\cos(\phi+A_1) - V_3\cos(-\phi-A_1+A_3) - V_4\cos A_1 = 0$

展開，化簡，提出公因式，得

$$V_1 - V_4\cos A_1 + \cos\phi\cdot[V_2\cos A_1 - V_3\cos(A_3 - A_1)] +$$
$$\sin\phi\cdot[-V_2\sin A_1 - V_3\sin(A_3 - A_1)] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}1b)$$

另，$V_2\sin(\pi-\phi-A_1) - V_3\sin(\pi-\phi-A_1+A_3) - V_4\sin A_1 = 0$

$\Rightarrow\ V_2\sin(\phi+A_1) + V_3\sin(-\phi-A_1+A_3) - V_4\sin A_1 = 0$

展開，化簡，提出公因式，得

$$\sin\phi\cdot[V_2\cos A_1 - V_3\cos(A_3 - A_1)] +$$
$$\cos\phi\cdot[V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)] - V_4\sin A_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}2b)$$

令 B= $V_2\cos A_1 - V_3\cos(A_3 - A_1)$, C= $V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)$ ，

則 (4-1b)式 $\Rightarrow$ $V_1 - V_4\cos A_1 = (-\mathrm{B})\cos\phi + \mathrm{C}\sin\phi$ ·························· (4-1c)

(4-2b)式 $\Rightarrow$ $V_4\sin A_1 = \mathrm{B}\sin\phi + \mathrm{C}\cos\phi$ ································· (4-2c)

聯立解 (4-1c) 與 (4-2c) 兩式；得

$(V_1 - V_4\cos A_1)\cos\phi - V_4\sin A_1\sin\phi = -V_2\cos A_1 + V_3\cos(A_3 - A_1)$

$\Rightarrow V_1\cos\phi - V_4\cos A_1\cos\phi - V_4\sin A_1\sin\phi = -V_2\cos A_1 + V_3\cos(A_3 - A_1)$ ….(4-1d)

而 $\cos(A_1 + A_2) = -\cos\phi = \cos(A_3 + A_4), \sin(A_3 + A_4) = -\sin\phi$ ，

代入(4-1d)式

$\Rightarrow$ $V_1\cos\phi + V_4\cos(A_3 + A_4 - A_1) = -V_2\cos A_1 + V_3\cos(A_3 - A_1)$

$\Rightarrow$ $-V_1\cos(A_1 + A_2) + V_4\cos(A_3 + A_4 - A_1) = -V_2\cos A_1 + V_3\cos(A_3 - A_1)$

得 $V_1\cos(A_1 + A_2) - V_2\cos A_1 + V_3\cos(A_3 - A_1) - V_4\cos(A_3 + A_4 - A_1) = 0$...(4-1G)

另 $(V_1 - V_4\cos A_1)\sin\phi + V_4\sin A_1\cos\phi = V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)$

$\Rightarrow$ $V_1\sin\phi - V_4\cos A_1\sin\phi + V_4\sin A_1\cos\phi = V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)$ ….(4-2d)

$\Rightarrow$ $V_1\sin\phi + V_4\sin(A_3 + A_4 - A_1) = V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)$

$\Rightarrow$ $V_1\sin(A_1 + A_2) + V_4\sin(A_3 + A_4 - A_1) = V_2\sin A_1 + V_3\sin(A_3 - A_1)$ ，最後得

$V_1\sin(A_1 + A_2) - V_2\sin A_1 - V_3\sin(A_3 - A_1) + V_4\sin(A_3 + A_4 - A_1) = 0$……(4-2G)

方程式 (4-1G)式與 (4-2G)式即為推證出的第二組四邊形的邊角方程式。

(2) 圖解四邊形邊角方程式的意義

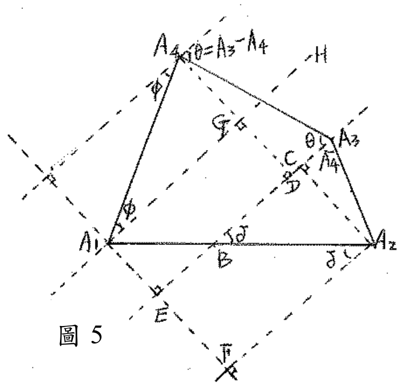

圖 5

(I) 觀察(Case 1).中的 (4-1T)式與 (4-2T)式這兩方程式， 有兩個內角的差，即 $A_3 - A_4$ ，

請看上圖 5 當頂角 $A_3 > A_4$時，(這不失為一般性作圖假設)

(a) 在頂角 A_3 內側作射線 A_3E，使 $\angle A_2A_3E$ 恰等於頂角 A_4，則 $\angle A_4A_3E$ =θ= $A_3 - A_4$，

(b) 自頂點 A_4 對射線 A_3E 作一垂直射線 A_4D，使 D 點為垂直線交點。

(c) 自頂點 A_2 對射線 A_3E 作一垂直射線 A_2C，使 C 點為垂直線交點。

(d) 再自頂點 A_2 作一與射線 A_3E 平行的平行射線 A_2F，另自頂點 A_1 作一與射線 A_2F 相垂直的射線，使兩射線的垂直交點為 F 點。

(e) 再自頂點 A_1 作一與射線 A_3E 平行的平行射線 A_1H，使射線 A_1H 與線段 A_4D 相交於 G 點，而 G 點為垂直點。至此，作圖 5 完成。

(f) 現在看方程式(4-1T)式的各項在圖 5.中出現的位置；

(f-1) 請看圖 5 中的 ΔA_2A_3B，內角 δ =π $- A_2 - A_4$，則 $\cos(A_2 + A_4) = -\cos\delta$，$\sin(A_2 + A_4) = \sin\delta$，而 $V_1\cos(A_2 + A_4) = -V_1\cos\delta$ 即為投影線段 A_2F 的負值。

(f-2) $-V_2\cos A_4$ 即為投影線段 A_3C 的負值。

(f-3) $V_3\cos(A_3 - A_4)$ 即為投影線段 A_3D。

(f-4) 圖 5 中的 $\phi = \pi - A_3$，而 $\cos\phi = -\cos A_3$，$\sin\phi = \sin A_3$，所以第四項的 $-V_4\cos A_3 = V_4\cos\phi$ 即為投影線段 A_1G 恰等於線段 ED。

以上這四項的值恰好滿足了方程式(4-1T)式。

(g) 現在看方程式(4-2T)式的各項在圖 5 中出現的位置；

(g-1) $V_1\sin(A_2 + A_4)$ 的值即為線段 A_1F。

(g-2) $-V_2\sin A_4$ 的值即為線段 A_2C 的負值。

(g-3) $-V_3\sin(A_3 - A_4)$ 的值即為線段 A_4D 的負值。

(g-4) $V_4\sin A_3 = V_4\sin\phi$ 的值即為線段 A_4G 的正值.

以上這四項的值恰好滿足了方程式 (4-2T)式。

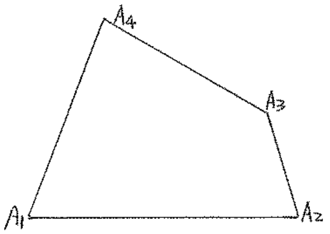

圖 6

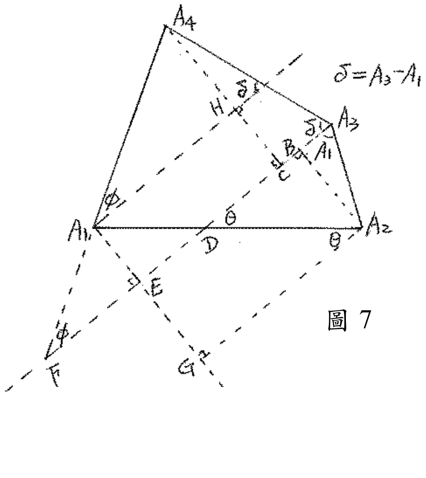

圖 7

(II) 觀察(Case 2)中的 (4-1G)式與 (4-2G)式這兩方程式，有兩個內角的差，即 $A_3 - A_1$，請看上圖 7 當頂角 $A_3 > A_1$時，(這不失為一般性作圖假設)。

(a) 在頂角 A_3 內側作射線 A_3E，使 $\angle A_2 A_3 E$ 恰等於頂角 A_1，則 $\angle A_4 A_3 E = \delta = A_3 - A_1$，

(b) 自頂點 A_2 對射線 A_3E 作一垂直射線 A_2B，使 B 點為垂直線交點。

(c) 自頂點 A_4 對射線 A_3E 作一垂直射線 A_4C，使 C 點為垂直線交點。

(d) 再自頂點 A_2 作一與射線 A_3E 平行的平行射線 A_2G，另自頂點 A_1 作一與射線 A_2G 相垂直的射線，使兩射線的垂直交點為 G 點。

(e) 再自頂點 A_1 作一與射線 A_3E 平行的平行射線 A_1H，使射線 A_1H 與線段 A_4C 相交於 H 點，而 H 點為垂直點，至此，作圖 7 完成。

(f) 現在看方程式(4-1G)式的各項在圖 7 中出現的位置；

(f-1) 請看圖 7 中的 $\Delta A_2 A_3 D$，內角 $\theta = \pi - A_2 - A_1$，則 $\cos(A_1 + A_2) = -\cos\theta$，$\sin(A_1 + A_2) = \sin\theta$，而 $V_1 \cos(A_1 + A_2) = -V_1 \cos\theta$ 即為投影線段 A_2G 的負值。

(f-2) $-V_2 \cos A_1$ 即為投影線段 A_3B 的負值。

(f-3) $V_3 \cos(A_3 - A_1)$ 即為投影線段 A_3C。

(f-4) 圖 7 中的 $\phi = \pi - A_3 - A_4 + A_1$，而 $\cos\phi = -\cos(A_3 + A_4 - A_1)$，所以第四項的 $-V_4 \cos(A_3 + A_4 - A_1) = V_4 \cos\phi$ 即為投影線段 A_1H 恰等於線段 EC，以上這四項的值恰好滿足了方程式(4-1G)式。

(g) 現在看方程式(4-2G)式的各項在圖 7 中出現的位置；

(g-1) $V_1 \sin(A_1 + A_2)$ 的值即為線段 A_1G。

(g-2) $-V_2 \sin A_1$ 的值即為線段 A_2B 的負值。

(g-3) $-V_3 \sin(A_3 - A_1)$ 的值即為線段 A_4C 的負值。

(g-4) $V_4 \sin(A_3 + A_4 - A_1) = V_4 \sin\phi$ 的值即為線段 A_4H 的正值。

以上這四項的值恰好滿足了方程式 (4-2G)式。

由上述圖示解說，可確認知方程式 (4-1T)式，(4-2T)式，(4-1G)式與 (4-2G)式四式必為早已自然存在的一般化四邊形恆等式。

(待續)