石子移動之最少堆數及次數之探討

許雅晴 黃芊 胡國應 蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

一、前言

兩堆石子數量不同，假設分別有 x, y 顆，$x > y$，記為(x, y)，規定兩堆石子之間的移動方式為：從數量較多的一堆拿出數量較少那堆的個數，將其移到數量較少的那堆，移動後兩堆變成 $x - y$, $2y$ 顆，記為($x - y$, $2y$)，反覆重複這種動作直到兩堆個數相等，陳奕均 [1] 將此兩堆個數相等的狀態稱為「穩定狀態」。例如：兩堆各有 5、3 顆，經由 (5, 3)→(2, 6)→(4, 4) 形成穩定狀態。但並非所有情形皆能形成個數相等，例如：兩堆各有 17、3 顆，移動過程(17, 3)→(14, 6)→(8, 12)→(16, 4)→(12, 8)→(4, 16)→.....出現了兩堆各為 8、12 及 4、16 的循環，故無法形成穩定狀態。

陳奕均[1]利用二進位表法的規律探究形成穩定狀態的條件與次數，得到結論如下：

> 文獻結論 1（陳奕均，2015）
>
> 若$x + y = p \times 2^k$，$\gcd(x，y) = r \times 2^m$，p 及 r 為奇數，則：
>
> 1.$p = r$ 時，(x, y) 形成穩定狀態的次數為$k - 1 - m$ 次。
>
> 2.$p \neq r$ 時，(x, y) 無法形成穩定狀態。

林建銘、高暐芬、廖昇偉[2]將之推廣為多堆（三堆以上）的情形，根據相同的規則將多堆石子移動成每堆數量相等的穩定狀態。相對於兩堆石子間的移動必是由多的一堆移至少的一堆，多堆時的移動方式並不唯一，例如：(x, y, z)，$x < y < z$ 有三種移動方式，分別得到$(2x, y - x, z)$、$(2x, y, z - x)$、$(x, 2y, z - y)$三種結果。而若其中兩堆數量相等時，則僅有一種移動方法，如(x, x, y)，當$x < y$ 時，移動得$(x, 2x, y - x)$；當$x > y$ 時，移動得$(x - y, x, 2y)$。

林建銘等人[2]得到三堆石子形成穩定狀態的充要條件，並給出一個形成穩定狀態的移動規則，如文獻結論 2：

*為本文通訊作者

文獻結論 2（林建銘、高暐芬、廖昇偉，2016）

1. 形成穩定狀態的充要條件：

當 $x+y+z=3p\times 2^k$，p 為奇數，若 $\gcd(x,\ y,\ z)=p\times 2^m$，則 $(x,\ y,\ z)$ 可形成穩定狀態。

2. 形成穩定狀態的移動規則：

當 $x+y+z=3p\times 2^k$，$\gcd(x,\ y,\ z)=p\times 2^m$，$p$ 為奇數，x, y, z 用二進位表示

為 $\begin{cases} x=a_k\times 2^k+\ldots+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0 \\ y=b_k\times 2^k+\ldots+b_1\times 2^1+b_0\times 2^0 \\ z=c_k\times 2^k+\ldots+c_1\times 2^1+c_0\times 2^0 \end{cases}$，若 $\begin{cases} a_t=b_t=c_t=0, 0\le t<m \\ a_m=b_m=1 \\ c_m=0 \end{cases}$

，則移動 x, y 兩堆。

根據文獻結論 2 所提供的移動規則，可快速地得到三堆的穩定狀態，例如(11, 9, 4)形成穩定狀態的過程如下：

$$\begin{cases} 01011 \\ 01001 \\ 00100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 00010 \\ 10010 \\ 00100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 00100 \\ 10000 \\ 00100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 01000 \\ 01100 \\ 00100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 01000 \\ 01000 \\ 01000 \end{cases};$$

若其中有兩堆數量相等時，不妨設為$(x,\ x,\ y)$，僅能先就 x, y 的大小來移動，形成$(x,\ 2x,\ y-x)$或$(x-y,\ x,\ 2y)$ 的情形，然後再依移動規則形成穩定狀態，例如(10, 7, 7)形成穩定狀態的過程如下。

$$\begin{cases} 1010 \\ 0111 \\ 0111 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 0011 \\ 1110 \\ 0111 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 0110 \\ 1110 \\ 0100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 1100 \\ 1000 \\ 0100 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{cases}。$$

上述兩項研究將每堆數量相等的狀態稱為穩定狀態，規定數量相等兩堆無法移動，本研究探討若規定兩堆數量相等可以互移，則：$(x,\ x)\rightarrow(2x,\ 0)$、$(x,\ x,\ y)\rightarrow(0,\ 2x,\ y)$，亦即移動數量相等的兩堆時，堆數會減少一堆。進一步思考是否任意 n 堆皆能減少堆數至一堆的狀態（稱為「一堆狀態」）？若無法移成只有一堆，那麼最少的堆數為何？

二、形成一堆狀態的條件與次數

本節討論形成一堆狀態的條件與次數，依序討論兩堆、三堆及多堆的情形。

(一) 兩堆的情形

兩堆時，(x_1, x_2) 必先形成穩定狀態 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2})$ 才能形成一堆狀態 $(0, x_1+x_2)$，因此能形成一堆狀態的條件與形成穩定狀態相同，且形成一堆狀態的次數比形成穩定狀態的次數多 1 次。

結論 1： 若 $x_1+x_2 = p\times 2^k$，$\gcd(x_1,x_2) = r\times 2^m$ 且 p 及 r 為奇數，則：

1. (x_1,x_2) 形成一堆狀態的充要條件為 $p=r$。
2. 若 (x_1,x_2) 可形成一堆狀態，則形成一堆狀態的次數為 $k-m$ 次。

(二) 三堆的情形

數對 (x_1,x_2,x_3) 形成一堆狀態的過程可分成兩個階段：

$$(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\rightarrow\cdots\rightarrow(a,b,0)}_{\text{形成兩堆的過程}}\underbrace{\rightarrow\cdots\rightarrow(x_1+x_2+x_3,0,0)}_{\text{形成一堆的過程}}$$

其中僅有當 $a+b = p\times 2^k$，$\gcd(a,b) = p\times 2^m$ 時，才能由兩堆形成一堆，因此，僅需討論 $x_1+x_2+x_3 = p\times 2^k$，$\gcd(x_1,x_2,x_3) = p\times 2^m$ 的情形。顯然 (x_1,x_2,x_3) 的移動與 $(\frac{x_1}{p},\frac{x_2}{p},\frac{x_3}{p})$ 的移動相對應，進一步只討論 $x_1+x_2+x_3 = 2^k, \gcd(x_1,x_2,x_3) = 2^m$ 的情形。將 x_1,x_2,x_3 用二進位表法表示為：

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=0}^{k} a_{1,j} = a_{1,k}\times 2^k+\ldots+a_{1,m}\times 2^m+\ldots+a_{1,1}\times 2^1+a_{1,0}\times 2^0 \\ x_2 = \sum_{j=0}^{k} a_{2,j} = a_{2,k}\times 2^k+\ldots+a_{2,m}\times 2^m+\ldots+a_{2,1}\times 2^1+a_{2,0}\times 2^0 \\ x_3 = \sum_{j=0}^{k} a_{3,j} = a_{3,k}\times 2^k+\ldots+a_{3,m}\times 2^m+\ldots+a_{3,1}\times 2^1+a_{3,0}\times 2^0 \end{cases}$$

其中 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i,m} = 2 \end{cases}$

不妨假設 $a_{1,m} = a_{2,m} = 1$，$a_{3,m} = 0$，則三種移動方式的結果如下表：

移動方式	移動 x_1、x_2 兩堆	移動 x_1、x_3 兩堆 x_2、x_3 兩堆
移動結果	$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}=0\\ \sum_{i=1}^{3}a_{i,m+1}=2\end{cases}$	$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}=2\\ \sum_{i=1}^{3}a_{i,m+1}=1\ or\ 3\end{cases}$

根據上表，當 $a_{1,m}=a_{2,m}=1$時，則選擇移動 x_1、x_2 兩堆，得到 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}=0,\sum_{i=1}^{3}a_{i,m+1}=2$ 的結果，移動後再由 $a_{1,m+1}$、$a_{2,m+1}$ 及 $a_{3,m+1}$之值來進行下一次移動，根據此方法移動時，每經一次移動，必能由 $\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{t-1}a_{i,j}=0\\ \sum_{i=1}^{3}a_{i,t}=2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{t}a_{i,j}=0\\ \sum_{i=1}^{3}a_{i,t+1}=2\end{cases}$，故經過 $k-m$ 次移動得一堆狀態。

另一方面，因為三種移動方法移動後皆得 $\sum_{i=1}^{3}a_{i,m+1}\neq 0$，亦即不存在經 1 次移動即能由 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m-1}a_{i,j}=0$ 得 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m+1}a_{i,j}=0$ 的方法，故可知上述移動方法依序使 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m+1}a_{i,j}=0$、$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{m+2}a_{i,j}=0$、$\cdots$ $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{k-1}a_{i,j}=0$ 是形成一堆狀態的最快方法，歸納如下：

> **結論 2：** 若 $x_1+x_2+x_3=p\times 2^k$，$\gcd(x_1,x_2,x_3)=p\times 2^m$，$p$ 為奇數，則 (x_1,x_2,x_3) 形成一堆狀態的最少移動次數為 $k-m$。

不難看出，形成一堆狀態的移動方法與文獻結論 2 之形成穩定狀態的方法相似，但相對於林建銘等人[2] 歸納三堆形成穩定狀態次數時需分成多種類型，本研究所得三堆形成一堆的最少移動次數則相對簡單明瞭，其中關鍵差異在於當出現兩堆數量相等時，林建銘等人[2] 無法僅經一次移動由 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{t}a_{i,j}=0$ 得 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{t+1}a_{i,j}=0$，而本研究則可。

(三) *n* 堆的情形

數對 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 形成一堆狀態的過程可分成好多個階段：

$$(x_1, x_2, \dots x_n)\underbrace{\to \cdots \to (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0)}_{\text{形成}(n-1)\text{堆的過程}} \to \cdots \to (z_1, z_2, 0, 0, \dots, 0)\underbrace{\to \cdots \to (, 0, 0, \dots, 0)}_{\text{形成一堆的過程}}$$

同理，只需討論 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2^k$ 且 $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^m$ 的情形。

先觀察四堆的實例，將(1, 3, 5, 7) 各堆以二進位表示為 $x_i = \sum_{j=0}^{4} a_{i,j} \times 2^j$，$i = 1,2,3,4$，顯然，逐步依序得 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,0} = 0$，$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j} = 0$，$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{2} a_{i,j} = 0$，$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{3} a_{i,j} = 0$ 的移動方式會有較少的移動次數。因為 $a_{1,0} = a_{2,0} = a_{3,0} = a_{4,0} = 1$，任選兩堆移動，列出六種結果如下：

移動方式	x_1、x_2 互移	x_1、x_3 互移	x_1、x_4 互移	x_2、x_3 互移	x_2、x_4 互移	x_3、x_4 互移
移動結果	$\begin{cases}010\\010\\101\\111\end{cases}$	$\begin{cases}010\\011\\100\\111\end{cases}$	$\begin{cases}010\\011\\101\\110\end{cases}$	$\begin{cases}001\\110\\010\\111\end{cases}$	$\begin{cases}001\\110\\101\\100\end{cases}$	$\begin{cases}0001\\0011\\1010\\0010\end{cases}$

移動後結果皆得 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,0} = 2$，接著，若 $a_{s,0} = a_{t,0} = 1$，則移動 x_s, x_t 兩堆，上述六種結果再經過一次移動後可得三種不同的情形：

移動方式	x_1、x_2 互移 x_3、x_4 互移	x_1、x_3 互移 x_2、x_4 互移	x_1、x_4 互移 x_2、x_3 互移
移動結果	$\begin{cases}0010\\0010\\1010\\0010\end{cases}$	$\begin{cases}010\\110\\100\\100\end{cases}$	$\begin{cases}010\\110\\010\\110\end{cases}$
$\sum_{i=1}^{4} a_{i,0}$	0	0	0
$\sum_{i=1}^{4} a_{i,1}$	4	2	4

三種情形滿足 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,0} = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,1} = 2\ or\ 4$，顯然，選擇得到 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,1} = 2$ 的方法，

之後再經 1 次移動即可得 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,1}=0$（其他兩種情形則須 2 次移動才得 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,1}=0$），故可得最少形成一堆狀態的次數。我們歸納：當 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,0}=4$，$\sum_{i=1}^{4} a_{i,1}=2$，若 $a_{s,1}=a_{t,1}=1$，則移動 x_s、x_t 兩堆，經過 2 次移動後得到 $\sum_{i=1}^{4} a_{i,1}=2$，可以得到最少形成一堆狀態的移動次數。

考慮一般的情形，給定 n 堆$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2^k$ 且 $\gcd(x_1, x_2, ..., x_n)=2^m$ 時，各堆數量以二進位表示為 $x_i=\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}\times 2^j$，$i=1,2,...,n$，討論如下：

1. 因 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j}=0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,m}\neq 0$ 為偶數，令 $h_m=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,m}}{2}$，不妨設 $\begin{cases} a_{i,m}=1,\ 1\le i\le 2h_m \\ a_{i,m}=0,\ 2h_m< i\le n \end{cases}$。考慮 $x_1, x_2, ..., x_{2h_m}$ 之間的兩兩互移，若 $a_{s,m}=a_{t,m}=1$ 且 $a_{s,m+1}=a_{t,m+1}(1\le s,t\le 2h_m)$，則移動 x_s、x_t 兩堆，反覆這樣的移動，經 h_m 次移動後得 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}=0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,m+1}\neq 0$ 為偶數。
2. 反覆上述程，依序得 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m+1} a_{i,j}=0$、$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m+2} a_{i,j}=0$、$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m+3} a_{i,j}=0$、…、$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} a_{i,j}=0$，即得一堆狀態。

列出上述討論過程中的移動次數 h_m 之定義如下：

定義：

當 $x_i=\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}\times 2^j$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=2^k$，$\gcd(x_1, x_2, ..., x_n)=2^m$，定義 $h_m=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,m}}{2}$.

根據討論過程中的移動方法（若 $a_{s,m}=a_{t,m}=1$ 且 $a_{s,m+1}=a_{t,m+1}(1\le s,t\le 2h_m)$，則移動 x_s、x_t 兩堆）則經過 h_m 次移動後，可得 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,m+1}$ 的最小值，即得 h_{m+1} 的最小

值，反覆這樣的移動過程，即得形成一堆的最少次數，歸納如下：

結論 3：

若 $x_i = \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} \times 2^j$ ， $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2^k$ ， $\gcd(x_1, x_2, ..., x_n) = 2^m$ ，

則 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 形成一堆狀態的最少移動次數為 $\sum_{i=m}^{k-1} h_i$ 。

以 (2, 5, 11, 14) 為例，說明如下：

1. 由 $\begin{cases} 0010 \\ 0101 \\ 1011 \\ 1110 \end{cases}$ 得 $h_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,0}}{2} = 1$ ，移動第 2、3 堆得 $\begin{cases} 0010 \\ 1010 \\ 0110 \\ 1110 \end{cases}$ ；

2. 由 $\begin{cases} 0010 \\ 1010 \\ 0110 \\ 1110 \end{cases}$ 得 $h_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}}{2} = 2$ ，先移第 1、2 堆得 $\begin{cases} 0100 \\ 1000 \\ 0110 \\ 1110 \end{cases}$

   再移第 3、4 堆得 $\begin{cases} 0100 \\ 1000 \\ 1100 \\ 1000 \end{cases}$ ；

3. 由 $\begin{cases} 0100 \\ 1000 \\ 1100 \\ 1000 \end{cases}$ 得 $h_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}}{2} = 1$ ，移動第 1、3 堆得 $\begin{cases} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{cases}$ ；

4. 由 $\begin{cases} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{cases}$ 得 $h_3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,3}}{2} = 2$ ，先移第 1、2 堆得 $\begin{cases} 10000 \\ 00000 \\ 01000 \\ 01000 \end{cases}$

   再移第 3、4 堆得 $\begin{cases} 10000 \\ 00000 \\ 10000 \\ 00000 \end{cases}$ ；

5. 由 $\begin{cases}10000\\00000\\10000\\00000\end{cases}$ 得 $h_4=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_{i,4}}{2}=1$ ，共經 $\sum_{i=0}^{4}h_i=7$ 次移動得一堆狀態。

三、多堆石子的形成的最少堆數

本節探討無法形成一堆狀態時，最少能形成的堆數為何？若任意三堆在無法形成一堆狀態的情況下皆能形成兩堆，則當有 n 堆時，任選三堆並將其移動成二堆（即減少一堆），反覆這個過程，即可將 n 堆移動成兩堆。以下僅需討論無法形成一堆的 (x_1,x_2,x_3) 是否必能形成兩堆狀態（其中 $x_1+x_2+x_3=p\times 2^k$ ， $\gcd(x_1,x_2,x_3)=r\times 2^m$ ， $r\neq p$ ）？

首先，若其中兩堆互移即能形成一堆，則此三堆能形成兩堆，例如：(35, 5, 133) →(30, 10, 133) →(20, 20, 133) →(0, 40, 133)。再者，有些數對須經過若干次移動（方法不唯一）才符合其中兩堆互移即形成一堆的情況，進而形成兩堆狀態，例如：(12, 6, 1)有兩種將其中兩堆形成一堆的方法：

(12, 6, 1)→(12, 5, 2)→(12, 3, 4)，第一、三堆的和為 16。

(12, 6, 1)→(11, 6, 2)，第二、三堆的和為 8。

任意三堆皆能移動形成兩堆狀態嗎？我們發現先得其中兩堆相等 (x,x,y) ，再得兩堆狀態 $(0,2x,y)$ 的方法，其中值得注意的是兩堆相等即兩堆相差為 0，故以下將關注兩堆的差。不妨規定 $x_1<x_2<x_3$，考慮第二、三堆移到第一堆的移動方法，以函數 f、g 表示：

$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,x_2-x_1,x_3)$，其中 $x_2>x_1$;

$g(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,x_2,x_3-x_1)$，其中 $x_3>x_1$;

進一步以函數的合成來表示多次移動，例如：

$f\circ f(x_1,x_2,x_3)=(4x_1,x_2-3x_1,x_3)$，其中 $x_2>3x_1$;

$g\circ f(x_1,x_2,x_3)=(4x_1,x_2-x_1,x_3-2x_1)$，其中 $x_2>x_1$ 且 $x_3>2x_1$;

$f\circ g(x_1,x_2,x_3)=(4x_1,x_2-2x_1,x_3-x_1)$，其中 $x_2>2x_1$ 且 $x_3>2x_1$;

$g\circ g(x_1,x_2,x_3)=(4x_1,x_2,x_3-3x_1)$，其中 $x_3>3x_1$，

分別計算上述六種移動之結果之第一、二堆的差，依序為：

$|x_2-3x_1|$、$|x_2-2x_1|$、$|x_2-7x_1|$、$|x_2-5x_1|$、$|x_2-6x_1|$、$|x_2-4x_1|$，

不難得到：移動 α 次後(α=1 or 2)，前兩堆的差為 $|x_2-\beta x_1|$ ，其中 $x_2>(2^\alpha-1)x_1$，$2^\alpha\leq\beta<2^{\alpha+1}$.

討論一般情形，假設移動 r 次（每次皆由第二、三堆移至第一堆），其中共有 s 次由第二堆移至第一堆（分別為第 $r_1, r_2, r_3,\ldots, r_s$ 次），則移動後第一、二堆分別為 $2^r x_1$ 及 $x_2-\sum_{i=1}^{s}2^{r_i-1}x_1$，故得第一、二堆的差為 $\left|x_2-(2^r+\sum_{i=1}^{s}2^{r_i-1})x_1\right|$；若此 r 次皆是由第三堆移至第一堆（即 s =0），則移動後第一、二堆分別為 $2^r x_1$ 及 x_2， 故得第一、二堆的差為 $\left|x_2-2^r x_1\right|$。歸納如下：

結論 4：
將移動 r 次，其中第 r_i 次(i=1, 2, ..., s) 是由第二堆移至第一堆（其餘由第三堆移至第一堆），則：
1. 當 s>0，移動後第一、二堆的差為 $\left|x_2-(2^r+\sum_{i=1}^{s}2^{r_i-1})x_1\right|$.
2. 當 s=0，移動後第一、二堆的差為 $\left|x_2-2^r x_1\right|$.

三堆為 (x_1,x_2,x_3) 時，不妨設 $x_1<x_2<x_3$，由 $x_2=a_1x_1+b_1$，$b_1<x_1$，利用結論 4，經過若干次移動後，得到前兩堆之差為 b_1，進而得到其中一堆為 b_1，即 $(x_1,x_2,x_3)\to\ldots\to(b_1,x_2',x_3')$，其中，令 $a=2^r+2^{r_1}+2^{r_2}+\ldots2^{r_i}$，即可知該如何移動而得 (b_1,x_2',x_3')，反覆這個過程即可得
$(x_1,x_2,x_3)\to\ldots\to(b_1,x_2',x_3')\to\ldots\to(b_2,x_2'',x_3'')\to\ldots\to(b_3,x_2''',x_3''')\to\ldots$
$x_1>b_1>b_2>b_3>\ldots$，不妨設 $b_i=0$ 即得兩堆狀態，以(5, 66, 136)為例說明如下：

1. 將前兩堆數量 5, 66 相除，得商為 13，餘數為 1，因 $13=2^3+2^2+2^0$，由 2^3 得需經過三次移動得到前兩堆差為餘數 1，由 2^2+2^0 得第 1、3 次的移動為第二堆移至第一堆，其移動過程為：
$(5,66,136)\xrightarrow{f}(10,61,136)\xrightarrow{g}(20,61,126)\xrightarrow{f}(40,41,136)$，而 $(40,41,136)$ 再經一次移動得到 $(80,1,136)$。
2. 將 $(1,80,136)$ 的前兩兩堆數量 80, 1 相除，得商為 80，餘數為 0，因 $80=2^6+2^4$，由 2^6 得需經 6 次移動得到前兩堆差為 0，由 2^4 得第 5 次移動為第二堆移至第一堆，移動過程為：
$(1,80,136)\xrightarrow{g}(2,80,135)\xrightarrow{g}(4,80,133)\xrightarrow{g}(8,80,129)\xrightarrow{g}(16,80,121)\xrightarrow{f}$
$(32,64,121)\xrightarrow{g}(64,64,89)$，而 $(64,64,89)$ 再經一次移動得到兩堆狀態 $(0,128,89)$.

上述形成兩堆狀態的方式並不唯一，在某些情況下，先適當移動可加速形成兩堆狀態的過程，再以(5, 66, 136)為例，說明如下：

1. 將(5, 66, 136) 的第二、三堆互移，得 $(5,66,136) \longrightarrow (5,132,70)$.
2. 調整各堆次序，將 $(5,70,132)$ 前兩堆數量 5, 70 相除，得商為 14，餘數為 0，因 $14 = 2^3 + 2^2 + 2^1$，由 2^3 得需經三次移動得到前兩堆差為餘數 0，由 $2^2 + 2^1$ 得第 2、3 次移動為第二堆移至第一堆，移動過程為：
3. $(5,70,132) \xrightarrow{g} (10,70,127) \xrightarrow{f} (20,60,127) \xrightarrow{f} (20,60,127) \xrightarrow{f} (40,40,127)$，而 $(40,40,127)$ 再經一次移動得兩堆狀態 $(0,80,127)$.

當三堆數量相近時，先適當移動為某兩堆偏少的情形，例如(63, 72, 98) 的過程如下：

1. 將(63, 72, 98)第一、二堆互移，得 $(163,72,98) \longrightarrow (126,9,98)$.
2. 將(126, 9, 98)第一、三堆互移，得 $(126,9,98) \longrightarrow (28,9,196)$.
3. 將(28, 9, 196)第一、二堆互移，得 $(28,9,196) \longrightarrow (17,18,196)$.
4. 將 $(17,18,196)$ 第一、二堆互移，得 $(17,18,196) \longrightarrow (34,1,196)$.
5. 調整各堆次序，將 $(1,34,196)$ 的前兩堆數量 1, 34 相除，得商為 34，餘數為 0，經 5 次移動得到前兩堆差為 0，移動過程為：

$(1,34,196) \xrightarrow{g} (2,34,195) \xrightarrow{f} (4,32,195) \xrightarrow{g}$
$(8,32,191) \xrightarrow{g} (16,32,183) \xrightarrow{g} (32,32,167)$,再經一次移動得兩堆狀態 $(0,64,167)$。

根據我們提供的方法，可逐步減少兩堆差直至 0，即得兩堆狀態，得到以下結論。

結論 5： 三堆形成的最少堆數

若 $x_1 + x_2 + x_3 = p \times 2^k$ ， $\gcd(x_1, x_2, x_3) = r \times 2^m$ ， $p \neq r$ ，則 (x_1, x_2, x_3) 最少可形成兩堆。

根據結論 5，若有 n 堆時，可先選取其中任意 3 堆，移動使其變成 2 堆，即形成 $n-1$ 堆狀態，反覆重複這個過程，堆數逐漸減少，最終可得兩堆狀態。得到以下結論：

結論 6：

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = p \times 2^k$ ， $\gcd(x_1, x_2, ..., x_n) = r \times 2^m$ ， $p \neq r$ ，則 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 最少可形成兩堆。

參考資料：

1. 陳奕均(2015)，第 55 屆全國中小學科學展覽國中組數學科作品。**從平分問題到動態穩定**。
2. 林建銘、高暐芬、廖昇偉(2016)，第 56 屆全國中小學科學展覽國中組數學科作品。**再探均分問題的動態穩定**。