中學生通訊解題第 95-96 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9501

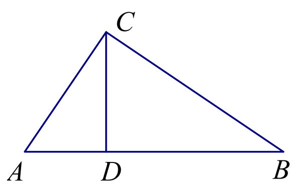
ΔABC 中，已知 $\angle ACB$ 為直角，$\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 D(D 在 $\overline{AB}$ 上)，若 $\overline{AD}$ 之長為 27 且 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 三邊長皆為自然數，求 ΔABC 之周長。

簡答：180

參考解答：

(方法一)如下圖，已知 $\angle ACB$ 為直角，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，故 $\Delta ABC \sim \Delta ACD$，得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$，即 $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}$。

令 $\overline{AB} = c$，$\overline{BC} = a$，$\overline{CA} = b$，a、b、c 皆自然數，則由 $\overline{AD} = 27$，可知 $b^2 = 27c \Rightarrow 27 \mid b^2 \Rightarrow 9 \mid b$，令 $b = 9x$，x 是自然數，則 $(9x)^2 = 27c \Rightarrow c = 3x^2$。又，因為 $\angle ACB$ 為直角，所以 $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 81x^2 = 9x^4$，即 $a^2 = 9(x^4 - 9x^2)$，故 $9 \mid a^2 \Rightarrow 3 \mid a$。



令 $a = 3y$，y 是自然數，得 $9y^2 = 9(x^4 - 9x^2) \Rightarrow y^2 = x^4 - 9x^2$，右式配成完全平方，得 $y^2 + \dfrac{81}{4} = x^4 - 9x^2 + \dfrac{81}{4}$

$\Rightarrow 4x^4 - 36x^2 + 81 = 4y^2 + 81$

$\Rightarrow (2x^2 - 9)^2 - (2y)^2 = 81 \Rightarrow (2x^2 - 9 + 2y)(2x^2 - 9 - 2y) = 81$。

$\because$ $2x^2 - 9 + 2y$、$2x^2 - 9 - 2y$ 都是整數，$2x^2 - 9 + 2y > 2x^2 - 9 - 2y$ 且 $2x^2 - 9 + 2y \geqq 1$，$\therefore$ $\begin{cases} 2x^2 - 9 + 2y = 81 \\ 2x^2 - 9 - 2y = 1 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} 2x^2 - 9 + 2y = 27 \\ 2x^2 - 9 - 2y = 3 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} 2x^2 - 9 + 2y = -1 \\ 2x^2 - 9 - 2y = -81 \end{cases}$，解得 $x^2 = 25$，$y = 20$ 或 $x^2 = 12$，$y = 6$ 或 $x^2 = -16$，$y = 20$；而 x、y 都是自然數，得 $x = 5$，$y = 20$，代回 $a = 3y$，$b = 9x$，$c = 3x^2$，得 $a = 60$，$b = 45$，$c = 75 \Rightarrow a + b + c = 180$，故所求 ΔABC 之周長為 180。

(方法二)如上圖，ΔABC 中，$\angle ACB$ 為直角，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，

可知 $\Delta ACD \sim \Delta CBD$，得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$，

即 $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{DB}$。

令 $\overline{DB} = d$，$\overline{AB} = c$，$\overline{BC} = a$，$\overline{CA} =$

b，則$\because \overline{AD}=27$，

$\therefore \overline{CD}^2=27d$，其中 a、b、c 皆自然數，$d=c-27$ 亦為自然數。

$\because \overline{CD}\perp\overline{AB}$ $\therefore$ $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$，$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

$\Rightarrow b^2=27^2+27d$，$a^2=d^2+27d$

$\Rightarrow b^2=27(27+d)=27c$，$a^2=cd\Rightarrow$ $9\mid b$，令 $b=9u$，u 是自然數，則 $c=3u^2$，$a^2=3du^2$，可知 $3d$ 為平方數，令 $d=3v^2$，v 是自然數，則 $a=3uv$。又，$d=c-27$，故 $3v^2=27-3u^2\Rightarrow u^2-v^2=9\Rightarrow(u-v)(u+v)=9\Rightarrow u-v=1$，$u+v=9$，解得 $u=5$，$v=4$，代回 $a=3uv$，$b=9u$，$c=3u^2$，得 $a=60$，$b=45$，$c=75$，$\Rightarrow a+b+c=180$，故所求 ΔABC 之周長為 180。

【評析】

這是「幾何其表，整數關係其裡」的數論問題。

ΔABC 中，a、b、c 三邊長皆為自然數，$\angle ACB$ 為直角，$\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 D，$\overline{AD}$ 之長為 27，設 $\overline{BD}$ 之長為 d，架構在直角三角形母子關係之下，a、b、c、d 四個數與 27 的一些關係式不難寫出，問題只在如何取捨、應用。本題共有 10 位同學應徵答題，答案正確者有 9 位，另 1 位同學沒有答對。其中台中市立人國中洪崗竣同學、台北市和平國中劉瀚聲同學、台北市民生國中蔡孟修同學、新北市康橋雙語中學蔡皓文同學等 4 人，答題敘述較為流暢，討論也較完整，表現最好。其他同學則有大小缺失：有因變數頗多誤以相同字元表示不同數值者，即有代號重複應用之失；有直接指稱某數為平方數的倍數而未指陳其故者，即有推論理由不明之病；亦有不慎擴充已知條件者，值得注意的是，在題設條件下，線段 $\overline{CD}$ 之長為自然數並非已知，而是推論的結果，如果藉此立基解題，指明其緣由是重點工作，也是嚴謹推理的重要基礎，不能模糊帶過。如何根據已知條件，找到有用的性質，進行有效果有條理的論述，同學平時要多練習。直接從 $\overline{CD}$ 之長為自然數切入解題的同學，是誤解？還是太過跳躍？應慎思、明辨，請再深入探索。

問題編號
9502

已知 $k\neq 1$ 且 $k\neq 2$，而二次方程式 $(k-1)(k-2)x^2-(4k-5)x+3=0$ 的兩個根皆為整數，試求所有這樣的 k 值。

簡答：$k=\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{2}$

參考解答：

把 $(k-1)(k-2)x^2-(4k-5)x+3=0$ 因式分解得 $[(k-1)x-1][(k-2)x-3]=0$，所以兩根分別為 $\alpha=\dfrac{1}{k-1},\beta=\dfrac{3}{k-2}$。

化簡後得 $k=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}=\dfrac{2\beta+3}{\beta}$，所以

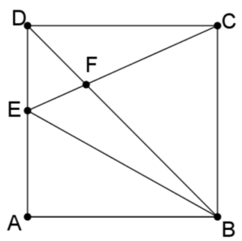
$\alpha\beta+3\alpha-\beta=0$。

分解後為 $(\alpha-1)(\beta+3)=-3$，搭配 α,β 皆為整數，得 $(\alpha,\beta)=(2,-6),(4,-4),(0,0),(-2,-2)$，

推回去得 $k=\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2}$。

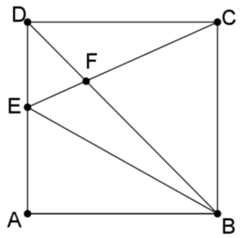
問題編號
9503

有一正方形 $ABCD$，E 為 $\overline{AD}$ 上一點，$\overline{EC}$ 與 $\overline{DB}$ 交於點 F。已知 ΔDEF 的面積為 2、ΔEAB 的面積為 6，求此正方形 $ABCD$ 的面積以及 $\overline{EA}$ 的長。



簡答：$24,\sqrt{6}$

參考解答：



(1) $\Delta DFC=\Delta DBC-\Delta FBC=\Delta EBC-\Delta FBC$
$=\Delta EFB$

假設 $x=\Delta DFC=\Delta EFB$

(2) $\Delta DAB=\Delta DCB\Rightarrow 2+6+x=x+\Delta FBC$

$\Rightarrow \Delta FBC=8$

(3) $\Delta DEF:\Delta FEB=\Delta DFC:\Delta FBC$

$\Rightarrow 2:x=x:8$

$\Rightarrow x=4$

(4)正方形 $ABCD=2\Delta DBC=2(4+8)=24$

(5) $\Delta DEF\sim\Delta BCF$

$\Rightarrow \overline{DE}^2:\overline{BC}^2=\Delta DEF:\Delta BCF=2:8=1:4$

$\Rightarrow \overline{DE}:\overline{BC}=1:2$

又 $\overline{BC}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \overline{EA}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{6}$。

【評析】

本題需要用到國三基本的三角形相似、面積比等概念，所有徵答的同學均能有所掌握。

問題編號
9504

是否可找到 21 條直線，其中任三條不共點，且彼此共交出 131 個交點？若可，試舉一例。

參考解答：

(1) 若 21 條直線皆不平行，則在任三條不共點的情況下，每一條直線都可與另外 20 條直線產生不同的交點，故共有 $\frac{20\times 21}{2}=210$ 個交點，多於題設的 131 個！

由此可知，其中必有若干直線相互平行，

使得交點數目減少。

(2)由於 n 條直線最多可交出 $\frac{(n-1)n}{2}$ 個交點（任三條不共點時），因而若此 21 條直線中包含一個 n 條直線構成的平行線組，則交點數會減少 $\frac{(n-1)n}{2}$ 個。

(3) $\because\ 210-131=79$

$\therefore$ 必須找若干個平行線組，其包含的直線數總和 ≤ 21，且削減的交點數總和 $=79$。

(4) 就 n 值列表如下：

n	$\frac{(n-1)n}{2}$
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66
13	78
14	91

(5)由上表可組合出

$$79=78(13)+1(2)=66(12)+10(5)+3(3)$$
$$=55(11)+21(7)+3(3)$$

即此 21 條直線可能分為：

A. (一組 13 條平行線組)＋(一組 2 條平行線組)＋(6 條不平行的直線)

B. (一組 12 條平行線組)＋(一組 5 條平行線組)＋(一組 3 條平行線組)＋(1 條直線)

C. (一組 11 條平行線組)＋(一組 7 條平行線組)＋(一組 3 條平行線組)

問題編號
9505

黑板上有若干個＋號及－號排成一列，每次擦掉一個＋號，並把相鄰兩個的符號變號(至多改變兩個，若無相鄰者，則不變；擦掉後仍保留空格，所謂相鄰者是中間無任何空格者)，試問一開始時，在什麼情況下，可以把全部的符號都擦掉？

例如：

$++--+-\to ++-+\bullet+\to +++\bullet\bullet+\to \bullet-+\bullet\bullet$
$+\to \bullet-+\bullet\bullet\bullet\to \bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\to \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$

$++--\to \bullet---\ or\ -\bullet+-$ (無法完成)

參考解答：

設原來共有 n 個符號，

(1)欲證：不論 n 為何值，只要原來有奇數個＋號即可。

$n=1$ 時，明顯可以；

$n=2$ 時，$+-\ or\ -+$ 很容易就可完成；

$n=3$ 時，$+++\to\bullet-+$；$+--\to\bullet+-$；$-+-\to+\bullet+$；$--+\to-+\bullet$；

接下來，不論 n 為何值，若原來有奇數個＋號，由左開始找到第一個＋號，若它在第一個，不論第二個為＋號或－號，擦掉它之後，都會變成 $(n-1)$ 個符號，且仍有奇數個＋號；若它不在第一個，則擦掉它之後，會變成兩個比 n 少個且都有奇數個＋號的小段，繼續如此的方法，則可把一小段分成更短的小段且保有奇數個＋號，最後每一個小段的長度都不大於 3，則可完成。

(2)欲證：不論 n 為何值，只要原來有偶數個＋號(含 0 個)則一定不可能。

$n=1$ 時，－明顯不可以；

$n=2$ 時，$++\ or\ --$ 易知不能完成；

$n=3$ 時，$++-,-++,+-+,---$ 易知不能完成；接下來，不論 n 為何值，證明若原來有偶數個＋號時必不行。

若為 0 個，則明顯不行；若有＋號，不論由任何一個＋號開始，總可以把原來的分成兩小段，其中有一段有偶數個＋號，或者變成一個有偶數個＋號的 $(n-1)$ 個符號小段，無論如何，繼續下去必可存在一個沒有＋號的小段或一直到一個有偶數個＋號且長度不大於 3 的小段，不管是那一種情形，必定無法完成。

【評析】

這樣的題目要解決的是：什麼樣的情況一定可以？而什麼樣的情況一定不可以？而這些情況必須要有一般性，而不只是一些特殊情況。各位同學的解題方法大都跳不開特殊性的方向，如果可以，大家可以再想想，對於這樣的題目，如何做出完整的表達。

問題編號
9601

在坐標平面上，橫坐標與縱座標均為整數的點稱為格子點，對任意的自然數 n，連接原點 O 與點 $A_n(n,n+3)$，用 $f(n)$ 表示線段 $\overline{OA_n}$ 上除端點外的格子點的個數，試求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)$ 之值。

簡答：1340

參考解答：

先注意到 $(n,n+3)=1$ 或 3。分下列兩種情況討論：

Case 1. 當 n 不為 3 的倍數時，則 $(n,n+3)=1$。

若 $\overline{OA_n}$ 內有格子點 (m,l) 時，其中 $1\le m<n$ 且 $1\le l<n+3$，則 $\frac{l}{m}=\frac{n+3}{n}$，又因為 $(n,n+3)=1$，

可以得到 $m=nk, l=(n+3)k$，其中 k 為大於等於 1 之自然數，

此時與 $1\le m<n$ 矛盾，因此 $\overline{OA_n}$ 內沒有格子點。

Case 2. 當 n 為 3 的倍數時，則 $(n,n+3)=3$。

設 $n=3k$，則 $\overline{OA_n}$ 內有格子點 $(k,k+1)$ 與 $(2k,2k+2)$。

由以上兩個情況知道

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)=2\times\left[\frac{2012}{3}\right]$$
$$=1340$$

【評析】

1. 本題需要分析 n 與 $n+3$ 最大公因數 $(n,n+3)$與格子點數之間的關係。
2. 本題部分同學用列舉法觀察出規律並算出答案，這是值得鼓勵的方法，但是為了數學的嚴謹性，需要對觀察出的規則提出證明。

問題編號
9602

計算

$$\frac{1}{1}+(\frac{2}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{3}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{4}{1}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{9}{1}-\frac{8}{2}+\frac{7}{3}-\frac{6}{4}+\cdots+\frac{1}{9})$$

之值。

簡答：$\dfrac{16637}{504}$

參考解答：

所求

$$=(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots+\frac{9}{1})-(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{8}{2})+\cdots-(\frac{1}{8}+\frac{2}{8})+\frac{1}{9}$$

$$=(1+2+\cdots+9)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+8)+\frac{1}{3}(1+2+\cdots+7)-\cdots-\frac{1}{8}(1+2)+\frac{1}{9}$$

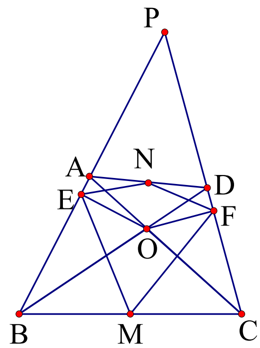
$$=45-\frac{36}{2}+\frac{28}{3}-\frac{21}{4}+\frac{15}{5}-\frac{10}{6}+\frac{6}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}=\frac{16637}{504}$$

【評析】

本題僅需將各數項做適當的重分組，再加上基本的等差級數求和與四則運算，雖屬於較容易的題型，但亦考驗著同學們的計算能力與細心程度。

問題編號
9603

給定銳角△PBC，$\overline{PB}\neq\overline{PC}$，設 A、D 分別在 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 上， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於點 O，作 $\overline{OE}\perp\overline{AB}$ 於點 E，作 $\overline{OF}\perp\overline{CD}$ 於點 F，點 M、N 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$ 的中點，若 A、B、C、D 共圓，且 $\overline{EM}\cdot\overline{FN}=k$ $\overline{EN}\cdot\overline{FM}$ ，k 為實數，求 k 之值。



簡答：1

參考解答：

設 Q、R 分別是 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 的中點，作 $\overline{EQ}$、$\overline{MQ}$、$\overline{FR}$、$\overline{MR}$，則 $\overline{EQ}=\overline{OQ}=\overline{RM}$，$\overline{MQ}=\overline{RO}=\overline{RF}\Rightarrow$四邊形 $OQMR$ 是平行四邊形，所以$\angle OQM=\angle ORM$

$\because A$、B、C、D 共圓

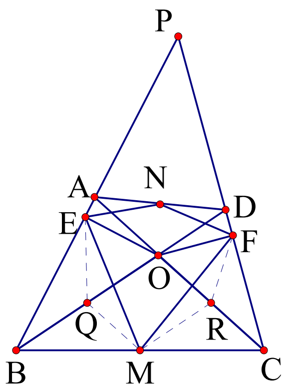
$\therefore \angle ABD=\angle ACD$

於是，$\angle EQO=2\angle ABD=2\angle ACD=\angle FRO$

$\therefore \angle EQM=\angle EQO+\angle OQM$

$=\angle FRO+\angle ORM=\angle FRM$

故$\triangle EQM\cong\triangle MRF\Rightarrow\overline{EM}=\overline{FM}$ 同理，$\overline{EN}=\overline{FN}$ 因此，$k=1$。



【評析】

(1).本題所應用的數學性質有：

1. 直角三角形，斜邊的中點到三頂點等距。
2. 兩組對邊等長的四邊形為平行四邊形。
3. 平行四邊形對角相等。
4. 對同弧的圓周角相等。
5. SAS 全等性質。
6. 兩全等三角形的對應邊等長。

(2)適當的作補助線是幾何題的關鍵之一，此題分別取 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 的中點 Q、R，作補助線 $\overline{EQ}$、$\overline{MQ}$、$\overline{FR}$、$\overline{MR}$，因此在題目的條件下，呈現幾何關係，因而解出此題。

問題編號 9604

設集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$T$ 為 A 的子集，$S(T)=T$ 之所有元素的和，求全部的 $S(T)$的總和。

簡答：28160

參考解答：

$\because A$ 的子集共有 2^{10} 個，兩兩配對成(T, T')，使 $T\cup T'=A$，$T\cap T'=\varnothing$

$\therefore$共可配成 $2^9=512$ 對

$\Rightarrow$ 全部的 $S(T)$ 的總和 $=512(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=512\times55=28160$。

【解題重點】

上述解法是將 2^{10} 個子集兩兩配對成集合 A，是一種配對法的概念。本題亦可利用分割的概念，依含 1~10 的子集分列，再求其總和。或者從 T 所含元素個數 1~10 個的子集分列，再求其總和。

問題編號
9605

設有 $n(n \ge 2)$ 名選手的比賽持續 k 天，每天各選手的得分恰為 $1,2,\cdots,n$ (沒有任何兩人有相同分數)，k 天結束時，每位選手的總分都是 14。試求所有可能的數對 (n,k)，並列出此時每位選手每天的得分情形。

參考解答：

計算全體選手所得總分之和，

有 $k(1+2+\cdots+n)=14n$ ，即 $k(n+1)=28$ ，

又 $28=2^2\times 7$ ，它共有 6 個不同的正因數：$1,2,4,7,14,28$ 。

若 $k=1$，即只有一天比賽，各選手得分不可能相同，故 $n+1\ge 3, k\ge 2$ ，

所以 (n,k) 可能為 $(13,2),(6,4),(3,7)$ 。

我們可以列出這些解中，各選手每天得分的情形如下：

$(n,k)=(13,2)$ 時，

天數	得分情形
(第1天)	$1,2,3,\cdots,13$
(第2天)	$13,12,11,\cdots,1$

$(n,k)=(6,4)$ 時，

天數	得分情形
(第1天)	$1,2,3,\cdots,6$
(第2天)	$6,5,4,\cdots,1$
(第3天)	$1,2,3,\cdots,6$
(第4天)	$6,5,4,\cdots,1$

$(n,k)=(3,7)$ 時，

天數	得分情形
(第1天)	1,2,3
(第2天)	1,2,3
(第3天)	1,2,3
(第4天)	2,3,1
(第5天)	3,1,2
(第6天)	3,2,1
(第7天)	3,2,1